12 Combinatoria y probabilidad.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. y 2. Ejercicios resueltos.

3. El dominó es un juego formado por 28 fichas, que combina los puntos 0 (blanca), 1, 2, 3, 4, 5 y 6 de todas las formas posibles (28), con dobles incluidos. Se elige una ficha al azar y se consideran los sucesos *A* = ”obtener ficha doble”, *B* = ”Obtener ficha que sume par” y *C* = ”los dos números de la ficha son primos”
Describe el espacio muestral y los sucesos *A*, *B*, y *C* y sus contrarios.

El espacio muestral está compuesto por los pares siguientes:

$$E=\left\{\begin{matrix}(6,6);(0,0);(0,1);(0,2);(0,3);(0,4);(0,5);(0,6);(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6)\\(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,4);(4,5);(4,6);(5,5);(5,6)\end{matrix}\right\}$$

Y los sucesos *A*, *B* y *C* y sus respectivos contrarios están formados por los siguientes sucesos elementales:

$$A=\{(0,0);(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$$

$$\overline{A}=\left\{\begin{matrix}(0,1);(0,2);(0,3);(0,4);(0,5);(0,6);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6)\\(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(3,4);(3,5);(3,6);(4,5);(4,6);(5,6)\end{matrix}\right\}$$

$$B=\{(0,0);(0,2);(0,4);(0,6);(1,1);(1,3);(1,5);(2,2);(2,4);(2,6);(3,3);(3,5);(4,4);(4,6);(5,5);(6,6)\}$$

$$\overline{B}=\{(0,1);(0,3);(0,5);(1,2);(1,4);(1,6);(2,3);(2,5);(3,4);(3,6);(4,5);(5,6)\}$$

$$C=\{(2,2);(2,3);(2,5);(3,3);(3,5);(5,5)\}$$

$$\overline{C}=\left\{\begin{matrix}(6,6);(0,0);(0,1);(0,2);(0,3);(0,4);(0,5);(0,6);(1,1);(1,2);(1,3);\\(1,4);(1,5);(1,6);(2,4);2,6);(3,4);(3,6);(4,4);(4,5);(4,6);(5,6)\end{matrix}\right\}$$

4. Un estudio ha recogido la evolución de IBEX 35 durante el mes de diciembre de 2014. Elegido un día al azar, se anota el índice. Se consideran los sucesos *A* = “el IBEX está por encima de los 10200 puntos” *B* “el IBEX está por encima de los 10100 puntos pero por debajo de los 10700”.

Describe el espacio muestral y los sucesos *A*, *B* y sus contrarios.

En este caso el espacio muestral es la semirrecta [0, infinito).

El suceso *A* y su contrario son:

$$A=(10\,200,+\infty);\ \overline{A}=[0,10\,200]$$

El suceso *B* y su contrario son:

$$B=(10\,100,10\,700);\ \overline{B}=[0,10\,100]\cup[10\,700,+\infty)$$

5. Ejercicio resuelto.

6. Se lanza un dado blanco y otro verde. Se consideran los sucesos A = "la suma de puntos es 6", B = "obtener el mismo resultado en ambos dados" y C = "obtener par en el dado verde".

a) Describe el espacio muestral.

b) Escribe los sucesos $\overline{A}, A\cup C, \overline{A}\cap B, (B\cup C)\cap A$ y $(A\cap B)-C$.

a) El espacio muestral viene dado por pares de números del 1 al 6, el primer número de la pareja representa el resultado del dado blanco y el segundo número el resultado del dado verde:

$$E=\left\{\begin{matrix}(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);\\(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6);\\(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6)\end{matrix}\right\}$$

Se describen ahora los sucesos A, B y C.

$$A=\{(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)\}$$
$$B=\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$$
$$C=\left\{\begin{matrix}(1,2);(1,4);(1,6);(2,2);(2,4);(2,6);(3,2);(3,4);(3,6);\\(4,2);(4,4);(4,6);(5,2);(5,4);(5,6);(6,2);(6,4);(6,6)\end{matrix}\right\}$$

b) Ahora tenemos que:

$$\overline{A}=\left\{\begin{matrix}(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,5);(2,6);\\(3,1);(3,2);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6);\\(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6)\end{matrix}\right\}$$

$$A\cup C=\left\{\begin{matrix}(1,2);(1,4);(1,5);(1,6);(2,2);(2,4);(2,6);(3,2);(3,3);(3,4);\\(3,6);(4,2);(4,4);(4,6);(5,2);(5,4);(5,6);(6,2);(6,4);(6,6)\end{matrix}\right\}$$

$$(A\cap B)=\{(1,1);(2,2);(4,4);(5,5);(6,6)\}$$

$$(B\cup C)\cap A=\{(2,4);(3,3);(4,2)\}$$

$$(A\cap B)-C=\{(3,3)\}$$

7. Un estudiante está dudando si cursar estudios de grado (A), hacer un ciclo formativo de grado (B) o trabajar (C). Expresa con palabras $A\cup B$, $\overline{A}\cap(B\cup C)$, $A\cap\overline{C}$ y $A\cup(B\cap C)$.

$A\cup B$: Cursar estudios de grado, hacer un ciclo o tal vez ambas.

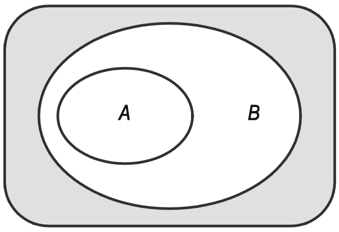
$\overline{A}\cap(B\cup C)$: No cursar estudios de grado y empezar a la vez a trabajar y a hacer un ciclo formativo.

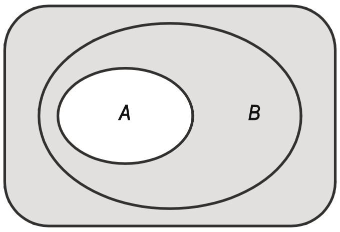
$A\cap\overline{C}$: Cursar estudios de grado y no trabajar.

$A\cup(B\cap C)$: Hacer un ciclo formativo a la vez que trabajar o cursar estudios de grado. Es posible hacer las tres cosas.

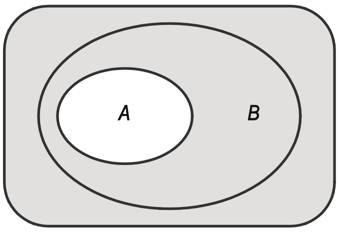
8. Prueba, mediante diagramas de Venn, que si *A* está contenido en *B*, entonces $\overline{A}$ contiene a $\overline{B}$ y $\overline{A} \cap B$ está contenido en $\overline{A \cap B}$.

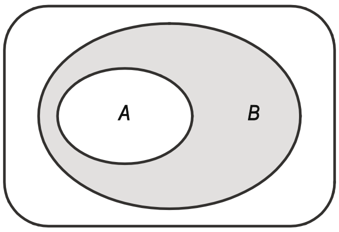
En efecto, si *A* está contenido en *B*, como se ve a continuación en el diagrama de la izquierda, entonces puede verse que el contrario de *B* está contenido en el contrario de *A*





Y, además, si *A* está contenido en *B*, $\overline{A} \cap B \subset \overline{A \cap B}$, como se ve en los dos diagramas siguientes:





9. y 10. Ejercicios resueltos.

11. Usando un ordenador se ha simulado el lanzamiento de dos monedas. La tabla muestra las frecuencias absolutas del suceso *A* = "obtener cara en una moneda y cruz en la otra".

n	10	25	50	100	250	500	750	1000
f(*A*)	3	11	26	55	128	252	373	502

Completa la tabla con las frecuencias relativas y asigna un valor aproximado a la probabilidad de *A*.

La tabla con las frecuencias relativas es:

n	10	25	50	100	250	500	750	1000
f(A)	3	11	26	55	128	252	373	502
$h_n(A)$	0,3	0,44	0,52	0,55	0,512	0,504	0,497	0,502

A la vista de las frecuencias relativas, un valor aproximado para la probabilidad del suceso *A* = "obtener cara en una moneda y cruz en la otra" puede ser $P(A) = 0{,}5$.

12. En el último campeonato de Liga de fútbol, de cada cuatro partidos jugados en casa el equipo *A* ha ganado dos, ha empatado uno y ha perdido otro. Si el próximo partido lo debe disputar en casa, ¿Cuál será la probabilidad de que el equipo *A* gane? ¿Y de que empate o pierda?

Sea el suceso *A* = "el siguiente partido lo gana el equipo *A*". Como de los cuatro partidos disputados en casa ha ganado la mitad, entonces la probabilidad del suceso *A* será $P(A) = 0{,}5$.

Razonando de manera similar, la probabilidad del suceso *B* = "el siguiente partido el equipo *A* empata o pierde", es $P(B) = 0{,}5$

13. Si P es una probabilidad definida sobre $E=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ con $P(w_2)=0,1$; $P(w_4)=3P(w_3)$; y $P(w_3)=2P(w_2)$. Halla $P(w_1)$.

De las relaciones dadas en el enunciado obtenemos que:
$P(w_2)=0,1$; $P(w_3)=2P(w_2)=2\cdot 0,1=0,2$; $P(w_4)=3P(w_3)=3\cdot 0,2=0,6$.
Por otro lado como los cuatro sucesos son incompatibles dos a dos y la unión de todos ellos es el suceso seguro tenemos:
$1=P(E)=P(w_1\cup w_2\cup w_3\cup w_4)=P(w_1)+P(w_2)+P(w_3)+P(w_4)=P(w_1)+0,1+0,2+0,6=P(w_1)+0,9$
De donde $P(w_1)=0,1$

14. y 15. Ejercicios resueltos.

16. Una bolsa contiene 3 bolas rojas, 2 blancas y 4 verdes. De la bola se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea roja.

b) No sea verde.

c) La bola sea blanca o verde.

Suponiendo que los resultados posibles son equiprobables, se puede aplicar la regla de Laplace.

a) Sea el suceso R = "la bola extraída sea roja",

$$P(R)=\frac{\text{nº de bolas rojas}}{\text{nº total de bolas}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

b) Sea V = "la bola extraída sea verde", en este caso, se debe calcular la probabilidad del contrario de V,

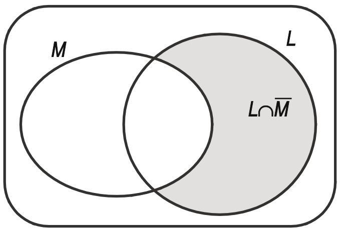
$$P(\overline{V})=P(\overline{V})=1-P(V)=1-\frac{\text{nº de bolas verdes}}{\text{nº total de bolas}}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

c) En este caso se trata de suceso $B\cup V$, siendo B = "la bola extraída es blanca" con lo que, como se trata de sucesos incompatibles:

$$P(B\cup V)=P(B)+P(V)=\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

17. La probabilidad de que un estudiante apruebe matemáticas es 0,7; y la de que apruebe lengua es 0,8. Si la probabilidad de que apruebe lengua y no matemáticas es 0,2; halla la probabilidad de que no apruebe ninguna materia.

Sean los sucesos M = "el estudiante apruebe matemáticas" y L = "el estudiante apruebe lengua".
Se tiene que: $P(M)=0,7$; $P(L)=0,8$; $P(L\cap\overline{M})=0,2$.
Gráficamente, este último conjunto lo podemos representar así:



Así se puede observar que: $P(L\cap M)=P(L)-P(L\cap\overline{M})=0,8-0,2=0,6$
De donde $P(L\cup M)=P(L)+P(M)-P(L\cap M)=0,8+0,7-0,6=0,9$
Por tanto, la probabilidad de que no apruebe ninguna materia es $P(\overline{L\cup M})=1-P(L\cup M)=1-0,9=0,1$.

18. Ejercicio interactivo.

19. y 20. Ejercicios resueltos.

21. Resuelve la siguiente ecuación $VR_{x,3} - VR_{x,2} = 2VR_{x,3} - 6x$.

La ecuación propuesta queda escrita como:

$VR_{x,3} - VR_{x,2} = 2VR_{x,3} - 6x \Rightarrow x^3 - x^2 = 2x^3 - 6x \Rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0$

Factorizando el polinomio, se obtiene:

$0 = x^3 + x^2 - 6x \Rightarrow 0 = x(x-2)(x+3)$

Por tanto las soluciones son: $x = -3$; $x = 0$; $x = 2$.

En términos combinatorios la solución 0 es trivial y la solución $x = -3$ no tiene sentido.

22. Se lanzan tres monedas y se observan los resultados obtenidos. Calcula la probabilidad de obtener

a) Tres caras.

b) Al menos dos caras

El número de resultados posibles equiprobables del experimento “lanzar tres monedas” es $VR_{2,3} = 2^3 = 8$.
Y su espacio muestral, si C representa “cara” y X “cruz” $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX\}$

a) En el caso del suceso A = “Obtener tres caras” el número de resultados favorables es 1, de donde $P(A) = \frac{1}{8}$.

b) En el caso del suceso B = “Obtener al menos dos caras” el número de resultados favorables es 4 (obtener 2 o tres caras), de donde $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

23. ¿Cuántas palabras, tengan o no sentido, de 3 letras distintas pueden formarse con las cinco vocales? Calcula la probabilidad de que:

a) La palabra formada acabe en u.

b) La palabra formada empiece por a y acabe en u.

Con las vocales {a, e, i, o, u} se pueden formar $V_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ palabras de letras distintas, ya que una palabra se distingue de otra por las vocales elegidas y por el orden en el que se colocan. De forma que el número de resultados posibles igualmente probables es 60.

a) Si la palabra acaba en u, quedan 4 vocales para elegir 2; es decir $V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$, luego aplicando la regla de Laplace: $P(\text{la palabra acaba en u}) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

b) Si la palabra acaba en u y empieza por a, quedan 3 vocales para elegir 1; es decir $V_{3,1} = \frac{3!}{2!} = 3$, luego:

c) $P(\text{la palabra empieza por a y acaba en u}) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$

24. Ejercicio resuelto.

25. En una estantería se van a ordenar 3 libros de Física, 2 de Filosofía y 2 de Matemáticas. Los libros de cada materia son idénticos entre sí halla la probabilidad de que:

a) Queden juntos los tres de Física.

b) Queden juntos los dos de Matemáticas.

a) El número total de formas distintas de colocar los libros haciendo indistinguibles los libros iguales es:

$$P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Para averiguar en cuántas de ellas quedan los tres libros de Física juntos podemos considerar el conjunto de los tres libros como uno solo y ordenar, por tanto, un bloque de Física, dos de Filosofía y 2 de Matemáticas. Luego el número de casos favorables al suceso es: $P_5^{1,2,2} = \frac{5!}{1!2!2!} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ y la probabilidad pedida es

$$P(\text{"queden juntos los tres de física"}) = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}.$$

b) Razonando de manera similar, el número de casos en los que quedan juntos los dos de Matemáticas es: $P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ y la probabilidad pedida es:

$$P(\text{"queden juntos los dos de matemáticas"}) = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$$

26. Con todas las letras de la palabra *CASCARRABIAS* ¿cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar?

En la palabra *CASCARRABIAS* tenemos 4 veces la letra *A*, 2 veces la letra *C*, 2 veces la letra *S*, 2 veces la letra *R* y una sola vez cada una de las letra *B* e *I*.
Por tanto el número de palabras distintas será:

$$P_{12}^{4,2,2,2,1,1} = \frac{12!}{4!2!2!2!1!1!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4}!}{\cancel{4}! \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2\,494\,800 .$$

27. Ejercicio interactivo.

28. Ejercicio resuelto.

29. De una urna con 6 bolas blancas y 4 rojas, se extraen sucesivamente al azar dos bolas, calcula la probabilidad de que las dos bolas sean rojas si las extracciones se realizan:

a) Sin reemplazo.

b) Con reemplazo.

Sean los sucesos $R_1 =$ "la primera bola extraída es roja" y $R_2 =$ "la segunda bola extraída es roja".

a) Si la bola extraída en primer lugar no se devuelve a la urna, resulta:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

b) Si la bola extraída se devuelve a la urna, los sucesos R_1 y R_2 son independientes, con lo que:.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$

30. El 30 % de los habitantes de un municipio consume habitualmente café y se sabe que el 40 % de los consumidores de café no toma postre en las comidas. Elegido al azar un habitante, calcula la probabilidad de que sea consumidor de café y tome postre.

Sean los sucesos A = "el habitante consume habitualmente café" y B = "el habitante toma postre".

La información proporcionada es $P(A)=0,3$; $P(A)=0,3$; $P(\overline{B}\mid A)=0,4$.

Y, por tanto, se tiene también que $P(B\mid A)=1-P(\overline{B}\mid A)=0,6$.

Se pide la probabilidad del suceso $A\cap B$ = "el habitante consume habitualmente café y toma postre", entonces $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)=0,3\cdot 0,6=0,18$.

31. Ejercicio resuelto.

32. Para ir a la universidad, Juan coge el autobús el 60 % de los días, el resto prefiere ir andando. Si va en autobús llega puntual con probabilidad 0,98, mientras que si va andando la probabilidad de ser puntual es 0,8. Calcula la probabilidad de que, un día al azar:

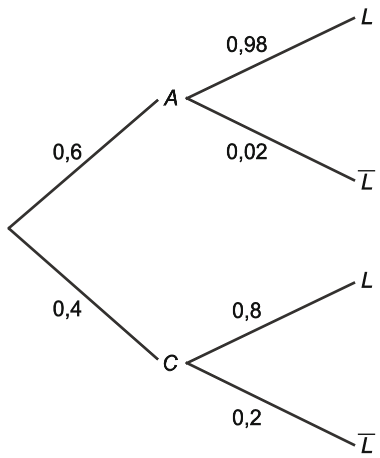
a) Llegue puntual a clase.

b) Llegue tarde a clase.

Considera los sucesos A = "Juan coge el autobús", C = "Juan va caminando" y L = "Juan llega puntual".

Se sabe que: $P(A)=0,6$; $P(C)=0,4$; $P(L\mid A)=0,98$; $P(L\mid C)=0,8$.

La situación se puede representar mediante un diagrama de árbol:



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$P(L)=P(A)P(L\mid A)+P(C)P(L\mid C)=0,6\cdot 0,98+0,4\cdot 0,8=0,908$.

b) como el suceso llegar tarde es el contrario del suceso ser puntual, será:

P("llegar tarde") = $1 - P(L) = 1 - 0,908 = 0,092$.

33. Un centro ofrece clases de pilates de tres niveles, inicial, medio y avanzado. El nivel medio lo practican el 45 % de los matriculados, mientras que en el nivel avanzado se encuentran el 24 %. En el nivel inicial hay un 37 % de mujeres, en el medio la cuarta parte son hombres y en el avanzado hay igual número de mujeres que de hombres. Se elige al azar a una persona que practica pilates, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

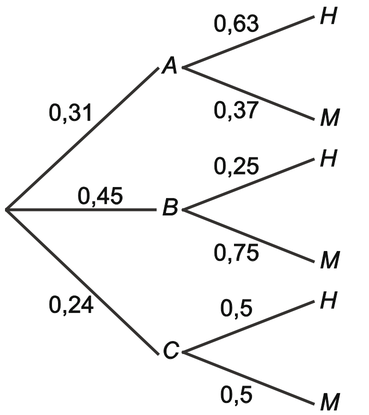
Consideramos los sucesos H = "Es hombre", M = "Es mujer", A = "Está en el nivel inicial", B = "Está en el nivel medio" y C = "Está en el nivel avanzado".

Se sabe que:
$P(B) = 0{,}45$; $P(C) = 0{,}24$; de donde: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (0{,}45 + 0{,}24) = 0{,}31$.

Además:

$$P(M \mid A) = 0{,}37 \Rightarrow P(H \mid A) = 1 - P(M \mid A) = 1 - 0{,}37 = 0{,}63$$
$$P(H \mid B) = \frac{1}{4} = 0{,}25 \Rightarrow P(M \mid B) = 1 - P(H \mid B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$
$$P(H \mid C) = P(M \mid C) = 0{,}5$$

El diagrama de árbol es:



Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad pedida es:

$$P(H) = P(A)\,P(H \mid A) + P(B)\,P(H \mid B) + P(C)\,P(H \mid C) = 0{,}31 \cdot 0{,}63 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 + 0{,}24 \cdot 0{,}5 = 0{,}4278$$

34. Ejercicio resuelto

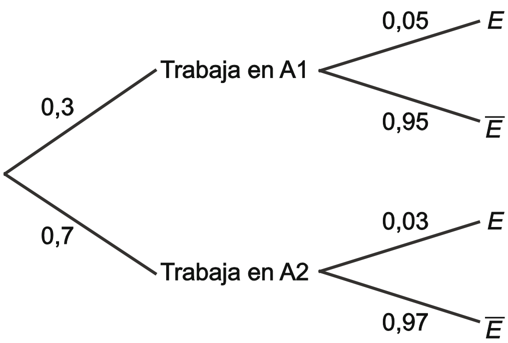
35. Una empresa tiene distribuidos sus centros de producción en dos polígonos industriales A_1 y A_2. En A_1 trabaja un 30 % de la plantilla, el resto lo hace en A_2. En el último mes un 5% de los trabajadores de A_1 padeció algún tipo de enfermedad, mientras que en A_2 ese porcentaje fue del 3%. Se selecciona al azar un trabajador y estuvo enfermo. Calcula la probabilidad de que trabaje en A_1.

Sean los sucesos:

E = "el trabajador ha estado enfermo", A_1 = "el trabajador es del centro A_1" y A_2 = "el trabajador es del centro A_2".

$P(A_1) = 0,3$; $P(A_2) = 0,7$; $P(E \mid A_1) = 0,05$; $P(E \mid A_2) = 0,03$

El diagrama de árbol describe las diferentes posibilidades con las respectivas probabilidades:



La probabilidad de que el trabajador seleccionado trabaje en el centro A_1, sabiendo que ha estado enfermo, se obtiene por el teorema de Bayes.

La probabilidad de que un empleado haya estado enfermo es:

$$P(E) = P(A_1)\,P(E \mid A_1) + P(A_2)\,P(E \mid A_2) = 0,3 \cdot 0,05 + 0,7 \cdot 0,03 = 0,036$$

Y ahora la probabilidad pedida será:

$$.\ P(A_1 \mid E) = \frac{P(A_1)P(E \mid A_1)}{P(E)} = \frac{0,3 \cdot 0,05}{0,036} = 0,4167$$

36. La alarma de un comercio salta en el 97 % de los atracos, y suena sin motivo un 2 % de las veces. Un 12 % de comercios ha sufrido un atraco. Si ha saltado la alarma, calcula la probabilidad de que el comercio haya sufrido un intento de atraco

Sean los sucesos:

S = "la alarma suena", $\overline{S}$ = "la alarma no suena"

A= "el comercio ha sufrido un atraco", $\overline{A}$ = "el comercio no ha sufrido un atraco"

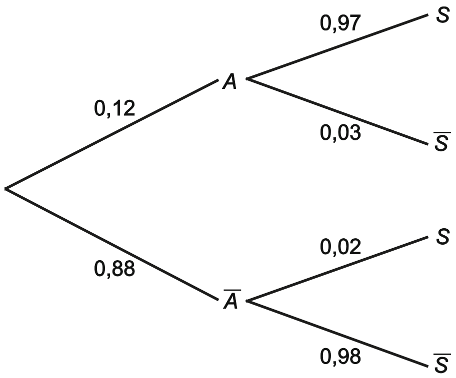
La alarma funciona correctamente cuando suena si se produce un atraco y no suena si no se produce un atraco y, en consecuencia, no funciona correctamente si suena cuando no se produce atraco y no suena cuando se produce un atraco. Es decir:

$$P(S \mid A) = 0{,}97 \,;\, P\left(\overline{S} \mid A\right) == 0{,}03 \,;\, P\left(S \mid \overline{A}\right) = 0{,}02 \,;\, P\left(\overline{S} \mid \overline{A}\right) = 0{,}98$$

Además:

$$P(A) = 0{,}12 \,;\, P(\overline{A}) = 0{,}88$$

En un diagrama de árbol:



La probabilidad de que la alarma suene se calcula con el teorema de la probabilidad total:

$$P(S) = P(A) \cdot P(S \mid A) + P(\overline{A}) P\left(S \mid \overline{A}\right) = 0{,}12 \cdot 0{,}97 + 0{,}88 \cdot 0{,}02 = 0{,}134$$

La probabilidad que se pide se obtiene por medio de la regla de Bayes:

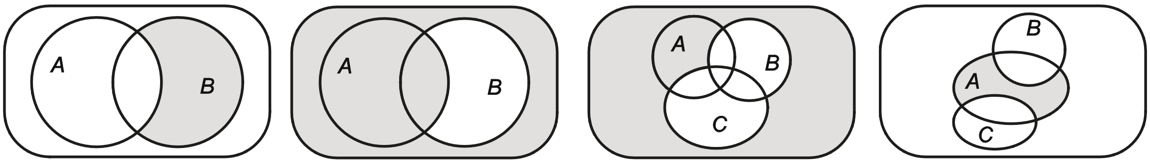
$$P(A \mid S) = \frac{P(A) \cdot P(S \mid A)}{P(S)} = \frac{0{,}12 \cdot 0{,}97}{0{,}134} = 0{,}8687$$

37. a 47. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Experimentos aleatorios. Sucesos

48. En los siguientes diagramas de Venn, indica la parte coloreada mediante operaciones con sucesos:



a) $B-A=B\cap\overline{A}$

b) $\overline{B-A}=A\cup\overline{B}$

c) $\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}$

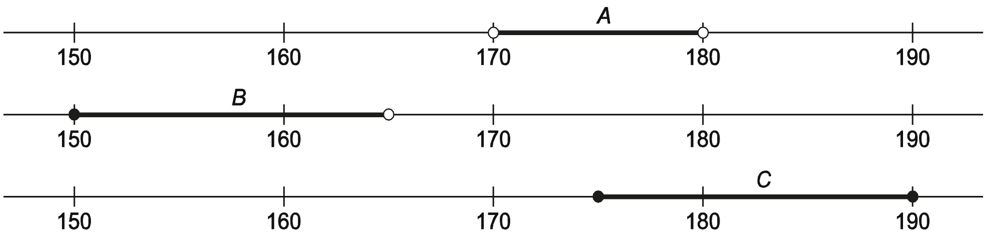
d) $A-B=\overline{\overline{A}\cup B\cup C}$

49. En un centro educativo se mide la estatura en centímetros de los estudiantes de 1º de Bachillerato y resulta el espacio muestral *E* = [150, 190]. Sean los sucesos *A* = "medir más de 170 cm, pero menos de 180 cm", *B* = "medir menos de 165 cm", y *C* = "medir por lo menos 175 cm", describe los siguientes sucesos.

a) $A\cap B$ **c)** $\overline{A}\cap C$ **e)** $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

b) $\overline{B}$ **d)** $\overline{B}\cap C$ **f)** $(B\cap C)\cup A$

Partiendo de los tres conjuntos iniciales $A=(170,180)$; $B=[150,165)$; $C=[175,190]$ y de un gráfico orientativo,



las respuestas son:

a) $A\cap B=\varnothing$ (Medir menos de 165 y más de 170 no es posible)

b) $\overline{B}=[165,190]$ (No medir menos de 165 cm)

c) $\overline{A}\cap C=[180,190]$ (No medir entre 170 y 180 cm y medir más de 175 cm).

d) $\overline{B}\cap C=[175,190]$ (No medir menos de 165 cm y medir por lo menos 175 cm).

e) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=[165,170]$ (No medir ni entre 170 y 180 cm, ni menos de 165cm ni por lo menos 175 cm).

f) $\left(B\cap C\right)\cup A=\varnothing\cup A=(170,180)$ (Medir menos de 165 y por lo menos 175 imposible, por lo que al unir *A*, nos queda solo *A*)

50. De una baraja de 40 cartas se selecciona una al azar. Considera los sucesos A = "obtener un basto", B = "obtener un as", y C = "obtener carta con número menor o igual que 5". Describe el espacio muestral y los sucesos:

a) $A \cap B$ **c)** $\overline{A} \cap B$ **e)** $\overline{A} \cup \overline{B}$

b) $A \cup C$ **d)** $A \cap B \cap C$ **f)** $A \cap \overline{B}$

El espacio muestral está formado por las 40 cartas de la baraja: 10 de oros, 10 de espadas, 10 de copas y 10 de bastos.

a) $A \cap B$ = "Obtener el as de bastos".

b) $A \cup C$ = "Obtener una carta de bastos o menor o igual que 5" = "Las diez cartas del palo de bastos y las cinco cartas del as al 5 de oros, copas y espadas".

c) $\overline{A} \cap B$ = "Obtener un as que NO sea de bastos" = "Obtener el as de oros, el de copas o el de espadas".

d) $A \cap B \cap C$ = "Obtener el as de bastos".

e) $\overline{A} \cup \overline{B}$ = "No obtener un basto o bien no obtener un as".
En este caso, podemos ver que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ = "No obtener el as de bastos".

f) $A \cap \overline{B}$ = "Obtener un basto que no sea el as".

51. En un pequeña ciudad se consideran los sucesos A = "ser socio del equipo de fútbol local", y B = "ser del club de amigos de la música". Escribe simbólicamente los siguientes sucesos:

a) Pertenecer al menos a uno de los dos.

b) No pertenecer a ninguno.

c) Pertenecer como máximo a uno de los dos.

d) Pertenecer a los dos.

a) El suceso "pertenecer al menos a uno de los dos" es el suceso $A \cup B$.

b) El suceso "no pertenecer a ninguno de los dos" es el suceso $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

c) El suceso "pertenecer como máximo a uno de los dos" es el suceso $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

d) El suceso "pertenecer a los dos" es el suceso $A \cap B$.

52. Considera el experimento consistente en lanzar un dado dos veces consecutivas. Describe el espacio muestral. Sean los sucesos *A* = "la suma de los resultados es 7", *B* = "la diferencia de resultados en valor absoluto es 2", y *C* = "el resultado de ambos lanzamientos es par". Escribe los sucesos:

a) $A \cap C$ **c)** $\overline{A} \cap C$ **e)** $B - C$ **g)** $\overline{A \cup B \cup C}$

b) $B \cap C$ **d)** $A - B$ **f)** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ **h)** $(A \cup B) \cap \overline{C}$

El espacio muestral del experimento "lanzar dos veces consecutivas un dado" es:

$$E = \left\{ \begin{matrix} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6) \end{matrix} \right\}$$

Los sucesos *A*, *B* y *C* los forman los siguientes sucesos elementales

$$A = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$$
$$B = \{(1,3);(2,4);(3,5);(4,6);(3,1);(4,2);(5,3);(6,4)\}$$
$$C = \{(2,2);(2,4);(2,6);(4,2);(4,4);(4,6);(6,2);(6,4);(6,6)\}$$

a) $A \cap C = \varnothing$. Si ambos son pares no pueden sumar 7.

b) $B \cap C = \{(2,4);(4,2);(4,6);(6,4)\}$

c) Es consecuencia de a) anterior ya que *C* debe estar contenido en el contrario de *A*.

$$\overline{A} = \left\{ \begin{matrix} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);\ (1,5);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2)(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6) \end{matrix} \right\}$$

$$\overline{A} \cap C = C = \{(2,2);(2,4);(2,6);(4,2);(4,4);(4,6);(6,2);(6,4);(6,6)\}$$

d) $A - B = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\} = A$
La intersección de *A* y *B* es el vacío, de ahí que se obtenga de nuevo *A*.

e) $B - C = \{(1,3);(3,5);(3,1);(5,3)\}$

f) $$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \left\{ \begin{matrix} (1,1);(1,2);(1,4);(1,5);(2,1);(2,3); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,6);(4,1);(4,5); \\ (5,1);(5,4);(5,5);(5,6);\ (6,3);(6,5) \end{matrix} \right\}$$

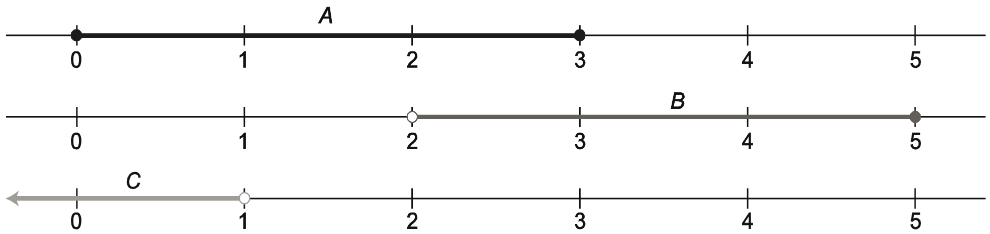
g) $(A \cup B) \cap \overline{C} = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1);(1,3);(3,5);(3,1);(5,3)\}$

53. Se elige al azar un número *x* de la recta real. Considera los sucesos *A* = "el número elegido está entre 0 y 3 ambos incluidos", *B* = "el número elegido es mayor que 2 y menor o igual que 5" y *C* = "el número elegido es inferior a 1". Describe los siguientes sucesos:

a) $\overline{A}$ **c)** $B\cup\overline{C}$ **e)** $A-B$ **g)** $A\cap B\cap C$

b) $A\cup C$ **d)** $\overline{A}\cap\overline{C}$ **f)** $B-C$ **h)** $(A\cup B)\cap\overline{C}$

Se determinan los conjuntos dados, para lo que será útil una representación esquemática:
$A=[0,3],\ B=[2,5),\ C=(-\infty,1)$



a) $\overline{A}=(-\infty,0)\cup(3,\infty)$

b) $A\cup C=[0,3]\cup(-\infty,1)=(-\infty,3]$

c) $B\cup\overline{C}=(2,5]\cup[1,\infty)=[1,\infty)$

d) Aplicando las leyes de De Morgan tenemos $\overline{A}\cap\overline{C}=\overline{A\cup C}=(3,+\infty)$.

e) $A-B=[0,2]$

f) Como *B* y *C* tienen intersección vacía: $B-C=B=(2,5]$

g) $A\cap B\cap C=\varnothing$

h) $(A\cup B)\cap\overline{C}=([0,3]\cup(2,5])\cap[1,\infty)=[0,5]\cap[1,\infty)=[1,5]$

54. Seleccionamos una bola al azar de una bolsa que contiene 5 bolas verdes numeradas del 1 al 5 y otras cinco bolas rojas numeradas también del 1 al 5. Sean los sucesos *A* = "la bola seleccionada tiene número par", *B* = "la bola seleccionada tiene número menor que 3", *C* = "la bola seleccionada es roja". Describir el espacio muestral y los sucesos:

a) A **c)** C **e)** $A\cap B\cap C$ **g)** $(A\cap B)\cup C$

b) B **d)** $A\cup B$ **f)** $\overline{A}\cap C$ **h)** $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

Para describir el espacio muestral se nombra cada bola con la inicial de su color seguida de su número. Así:
$E=\{R1,R2,R3,R4,R5,V1,V2,V3,V4,V5\}$, de donde:

a) $A=\{R2,R4,V2,V4\}$

b) $B=\{R1,R2,V1,V2\}$

c) $C=\{R1,R2,R3,R4,R5\}$

d) $A\cup B=\{R1,R2,R4,V1,V2,V4\}$

e) $A\cap B\cap C=\{R2\}$

f) $\overline{A}=\{R1,R3,R5,V1,V3,V5\}\Rightarrow\overline{A}\cap C=\{R1,R3,R5\}$

g) $(A\cap B)\cup C=\{R1,R2,R3,R4,R5,V2\}$

h) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\{V3,V5\}$

Probabilidad y propiedades.

55. Sean los sucesos *A*, *B* y *C* asociados a un experimento aleatorio. Si se sabe que *P*(*A*) = 0,6; *P*(*B*) = 0,4 y $P(A \cup B) = 0{,}75$; calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(\overline{A})$ **c)** $P(A \cap B)$ **e)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) $P(\overline{B})$ **d)** $P(A \cap \overline{B})$ **f)** $P(\underline{A} \cap \overline{B})$

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

c) Dado que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}75 = 0{,}6 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

d) $P(A \cup \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$

e) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

f) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

56. De los sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio se sabe que *P*(*A*) = 0,35 y *P*(*B*) = 0,6. Calcula la probabilidad del suceso *B* – *A* en cada uno de los casos siguientes:

a) *A* y *B* son incompatibles.

b) *A* está contenido en *B*.

c) $P(A \cap B) = 0{,}2$

d) $P(A \cup B) = 0{,}8$

e) $P(A - B) = 0{,}1$

a) Si *A* y *B* son incompatibles entonces $P(A \cap B) = 0$ de donde $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}6 - 0 = 0{,}6$

b) Si *A* está contenido en *B* entonces $A \cap B = A$ y por tanto: $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(A) = 0{,}6 - 0{,}35 = 0{,}25$

c) Si $P(A \cap B) = 0{,}2$ entonces $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

d) Si $P(A \cup B) = 0{,}8$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}8 = 0{,}35 + 0{,}6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}15$

Y de ahí: $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}6 - 0{,}15 = 0{,}45$

e) Si $P(A - B) = 0{,}1$, como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}1 = 0{,}35 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}25$

Y de ahí: $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$

57. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Si *P*(*A*) = 0,5, *P*(*B*) = 0,4 y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2$; calcula la probabilidad de:

a) Que al menos ocurra uno de los dos.

b) Que los dos sucesos ocurran.

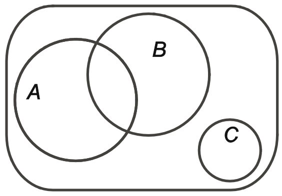
c) Que ocurra solo uno de ellos.

a) Que al menos suceda uno de los dos no es sino la unión de los sucesos por tanto:
$0{,}2 = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0{,}8$

b) Que ocurran los dos no es sino la intersección de los sucesos por tanto:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}8 = 0{,}5 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

c) Que ocurra solo uno de los dos supone que ocurra *A*, o *B* pero no los dos a la vez, es decir:
$P((A \cup B) - (A \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}1 = 0{,}7$
Otra forma de verlo es la siguiente:
$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}1 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}7$

58. Dados los sucesos *A*, *B* y *C* asociados a un experimento aleatorio, representados en el diagrama de Venn adjunto: Se sabe que *P*(*A*) = 0,3; *P*(*B*) = 0,4 y *P*(*C*) = 0,1 y $P(A \cap B) = 0{,}2$; calcula la probabilidad de que



a) Solo ocurra *A*.

b) Ocurran los tres.

c) Ocurran dos y solo dos de ellos.

d) Ocurra al menos uno de los tres.

e) No ocurra ninguno de los tres.

f) Como mucho ocurra uno de los tres.

Antes de comenzar los cálculos destaquemos que *C* es incompatible con *A* y con *B*.

a) En este caso, que solo ocurra *A* es *A* □□*B*, de donde $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$

b) Que ocurran los tres es $A \cap B \cap C = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0$

c) Que ocurran dos y solo dos de ellos es $S = (A \cap B - C) \cup (A \cap C - B) \cup (B \cap C - A)$ pero el primero coincide con $A \cap B$ y los dos últimos son vacíos luego: $P(S) = (A \cap B) = 0{,}2$

d) Que ocurra al menos uno de los tres es la unión de los conjuntos, y como *C* es incompatible con los otros: $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \Rightarrow 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}6$

e) Que no ocurra ninguno es el contrario de la unión: $P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

f) Que como mucho ocurra uno de los tres, al ser *C* incompatible con *A* y *B* resulta ser $T = \left((A \cup B) - (A \cap B)\right) \cup C$ de donde:

$$P(T) = P(A \cup B) - P(A \cap B) + P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + P(C) = 0{,}3 + 0{,}4 - 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4$$

Asignación de probabilidades. Espacios finitos.

59. Se lanzan dos dados y se observa el resultado obtenido en cada uno de ellos. Calcula la probabilidad de:

a) Obtener al menos un 6.

b) Que la suma sea par y salga al menos un 5.

c) Que la suma sea 7.

Empecemos describiendo el espacio muestral y los sucesos propuestos para aplicar después la regla de Laplace (suponiendo equiprobabilidad)

$$E = \left\{ \begin{array}{c} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6) \end{array} \right\}$$

a) El suceso A = "obtener al menos un 6" está formado por los sucesos elementales:

b) $A = \left\{ \begin{array}{c} (1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6) \\ (6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5) \end{array} \right\}$; $P(A) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{11}{36}$

c) El suceso B = "Que la suma sea par y salga al menos un 5." está formado por los sucesos elementales:

$$B = \{(1,5);(3,5);(5,5);(5,3);(5,1)\}; \quad P(B) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{5}{36}$$

d) El suceso C = "que la suma sea 7" está formado por los sucesos elementales:

$$C = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}; \quad P(C) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

60. Una bolsa contiene 10 bolas blancas y 5 verdes. Se extraen simultáneamente dos bolas al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) las dos sean blancas.

b) sea una de cada color.

c) sean del mismo color.

Al ser la extracción de las bolas simultánea, el orden no influye, por lo que el número de resultados posibles igualmente probables es:

$$C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

a) Sea el suceso $A =$ "las dos bolas sean blancas". Las dos bolas blancas se deben obtener de las 10 blancas de la bolsa, luego el número de resultados favorables es

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

Y, aplicando la regla de Laplace, $P(A) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{45}{105} = \dfrac{3}{7}$.

b) Sea el suceso $B =$ "sea una bola de cada color". Por cada bola blanca extraída (de las 10) se podrán elegir 5 bolas verdes, de modo que el número de resultados favorables es:

$$C_{10,1} \cdot C_{5,1} = \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} = 10 \cdot 5 = 50$$

Aplicando la regla de Laplace, $P(B) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{50}{105} = \dfrac{10}{21}$.

c) El suceso $C =$ "las dos bolas sean del mismo color" consiste en que "las dos bolas sean blancas" o "las dos bolas sean verdes", cuyo número de resultados favorables es:

$$C_{10,2} + C_{5,2} = \binom{10}{2} + \binom{5}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} = 55$$

Con lo que finalmente: $P(C) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{55}{105} = \dfrac{11}{21}$

61. De una baraja de 40 cartas se extraen dos simultáneamente al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) las dos sean de oros. **b)** las dos sean ases. **c)** al menos una de ellas sea de oros.

En este caso, al ser la extracción de las dos cartas de forma simultánea, el orden no influye y el número de resultados posibles igualmente probables es $C_{40,2} = \binom{40}{2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$.

a) Sea el suceso A = "las dos cartas sean de oros". El número de resultados favorables al suceso A es, como hay 10 cartas de oros, $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

De manera que aplicando la regla de Laplace: $P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{45}{780} = \frac{3}{52}$

b) Sea el suceso B = "las dos cartas sean ases". Como en la baraja hay 4 ases, el número de resultados favorables al suceso C es $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Y, aplicando la regla de Laplace, resulta: $P(B) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{6}{780} = \frac{1}{130}$.

c) El suceso C = "al menos una de las dos cartas sea de oros", es el suceso contrario de "ninguna de las dos cartas es de oros". El número de resultados favorables al suceso $\overline{C}$ es $C_{30,2} = \binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$.

De modo que la probabilidad del suceso $\overline{C}$ es $P(\overline{C}) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{435}{780} = \frac{29}{52}$.

Y, finalmente, la probabilidad del suceso C es $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{29}{52} = \frac{23}{52}$.

62. Con el fin de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de primer curso de bachillerato realizan una rifa de 500 números. Un profesor compra dos números.

a) Si solo hay un premio. ¿Cuál es la probabilidad de que le toque al profesor?

b) Si hay dos premios. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno le toque al profesor?

a) En este caso, la probabilidad se calcula de forma inmediata aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{2}{500} = \frac{1}{250} = 0{,}004$$

b) En este caso, la rifa se compone de 498 bolas blancas (B) y 2 rojas (R). Entonces, si se nombra el suceso B = "al menos uno le toque al profesor", cuyo suceso contrario es $\overline{B}$ = "ninguno de los dos le toque al profesor", el número de resultados favorables al suceso $\overline{B}$ es

$C_{498,2} = \binom{498}{2} = \frac{498 \cdot 497}{2} = 123\,753$, mientras que el número de casos posibles si el profesor compra dos números (no importa el orden en el que lo haya hecho) será $C_{500,2} = \binom{500}{2} = \frac{500 \cdot 499}{2} = 124\,750$, con lo que:

$$P(\overline{B}) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{123\,753}{124\,750} = 0{,}992$$

Y, finalmente, la probabilidad del suceso B es: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}992 = 0{,}008$.

63. En un examen teórico de educación vial hay 14 preguntas sobre normas de circulación, 12 sobre señales y 8 de comportamiento cívico. Si se eligen dos preguntas al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean de normas de circulación.

b) Ninguna sea de normas de circulación.

En la elección de las dos preguntas no importa el orden, luego como hay 34 preguntas, el número de resultados posibles es: $C_{34,2} = \binom{34}{2} = \frac{34 \cdot 33}{2} = 561$.

a) Sea A = "las dos preguntas elegidas sean de normas de circulación". Como hay 14 preguntas de circulación, el número de resultados favorables es: $C_{14,2} = \binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$.

Y, aplicando la regla de Laplace: $P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{91}{561} = 0{,}16221$.

b) Sea B = "ninguna de las dos sea de normas de circulación". Dado que hay 20 preguntas que no son de circulación, el número de resultados favorables al suceso B es $C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$.

Y, aplicando la regla de Laplace: $P(B) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{190}{561} = 0{,}33868$.

64. Disponemos de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5. Con ellas se forman al azar números de dos cifras. Calcula la probabilidad de que el número formado sea par si:

a) Las cifras de cada número deben ser diferentes.

b) Si en cada número puede haber cifras repetidas.

a) Si las cifras deben ser diferentes, el número de resultados posibles es $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$, mientras que el número de resultados favorables al suceso A = "el número formado sea par" es $2V_{4,1} = 2 \cdot 4 = 8$, ya que dos son las cifras pares (2 y 4) y queda una a elegir de las cuatro restantes. De modo que la probabilidad del suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

b) En este caso, el número de resultados posibles es $VR_{5,2} = 5^2 = 25$ y el número de resultados favorables al suceso B = "el número formado es par" es $2 \cdot VR_{5,1} = 2 \cdot 5 = 10$. Por tanto:

$$P(B) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

65. Un grupo de 8 amigos y amigas ha conseguido entradas para la final de un torneo de tenis. Si las ocho butacas están en la misma fila y se sientan al azar, calcula la probabilidad de que Andrés y Carmen se sienten en butacas contiguas.

El número de ordenaciones posibles de los ocho amigos y amigas es: $P_8 = 8! = 40\,320$.

Sea A = "Andrés y Carmen se sientan en butacas contiguas"

Si ahora consideramos la pareja Andrés - Ana como un único elemento, el número de formas de ordenar 7 elementos es P_7, pero como además Andrés y Ana podrían intercambiar sus posiciones y seguirían estando juntos, el número de resultados favorables al suceso A es: $P_2 P_7 = 2!7! = 10\,080$

Aplicando la regla de Laplace: $P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{10\,800}{40\,320} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

66. Con las letras *AAARRRS* se forman todas las palabras posibles, tengan o no sentido. Calcula la probabilidad de que la palabra formada sea *ARRASAR*.

El número de palabras distintas que se pueden formar con las letras *AAARRRS* es el de permutaciones con repetición de la 7 letras, donde la *A* se repite 3 veces, la *R* otras 3 veces y la *S* una vez. Es decir:

$$PR_7^{3,3,1} = \frac{7!}{3!3!1!} = 140$$

Que son los resultados posibles. Como solo una de esas es la palabra *ARRASAR*, utilizando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{1}{140} = 0,00714$$

67. En una lotería de 100 números se sortean dos premios: un ebook y una tablet. Juan lleva 8 números, halla la probabilidad de que gane:

a) Solo uno de los dos premios.

b) Por lo menos uno de los dos premios.

De los 100 números de la lotería, Juan lleva 8, de manera que en el bombo se tienen 8 números favorables a Juan y 92 números desfavorables.

Del bombo se extraen dos premios, por lo que el número de resultados posibles equiprobables es:

$$C_{100,2} = \binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$

a) Sea el suceso *A*= "Juan gana solo uno de los dos premios". Para que ocurra el suceso *A*, un número premiado debe ser de los 8 que lleva Juan y el otro de los 92 restantes:

Número de resultados favorables al suceso *A*: $C_{8,1} \cdot C_{92,1} = 8 \cdot 92 = 736$

De modo que la probabilidad de que gane un solo premio es, por la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{736}{4950} = 0,1469$$

b) Sea el suceso *B*= "Juan gana al menos uno de los dos premios". Considera el suceso contrario a *B*:

$\overline{B}$ = "Juan no gana ninguno de los premios"

Número de resultados favorables a $\overline{B}$ (los 2 números premiados son de los 92 que no lleva Juan) :

$$C_{90,2} = \binom{90}{2} = \frac{92 \cdot 91}{2} = 4186 \quad \text{Luego} \quad P(\overline{B}) = \frac{4186}{4950} = 0,8457 \Rightarrow P(B) = 1 - 0,8457 = 0,1543$$

68. Considera las familias con 5 hijos. Suponiendo que la probabilidad de que al nacer el bebé sea niño o niña es la misma, calcula la probabilidad de que una familia elegida al azar tenga:

a) Al menos un niño.

b) Exactamente 3 niñas.

c) Como mucho 4 niños.

d) 2 niñas y tres niños.

En las familias con 5 hijos, el número de resultados posibles igualmente probables (la probabilidad de nacer niño o niña es la misma) es el de variaciones con repetición de orden 5 (los cinco hijos) de los 2 elementos (niño, niña).

Es decir: $VR_{2,5} = 2^5 = 32$

a) Sea el suceso $A =$ "la familia tiene al menos un niño". El suceso contrario de A es $\overline{A} =$ "la familia no tiene ningún niño", con solo un resultado favorable(todas niñas). Por tanto, mediante la regla de Laplace $P(\overline{A}) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{1}{32} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{32} = \dfrac{31}{32}$

b) Sea el suceso $B =$ "la familia tiene exactamente 3 niñas". El número de resultados favorables al suceso B es el de permutaciones con repetición de 5 elementos (los cinco hijos) donde niña se repite 3 veces y niño 2 veces, luego: $PR_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$.

De modo que, utilizando la regla de Laplace: $P(B) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{16}$

c) Sea el suceso $C =$ "Como mucho 4 niños". El suceso contrario a C es $\overline{C} =$ "Más de 4 niños", es decir, 5 niños. Y este suceso solo tiene un caso posible, de donde, al igual que en el apartado a) mediante la regla de Laplace $P(\overline{C}) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{1}{32} \Rightarrow P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \dfrac{1}{32} = \dfrac{31}{32}$

d) Sea el suceso $D =$ "2 niñas y tres niños". El número de resultados favorables al suceso B es el de permutaciones con repetición de 5 elementos (los cinco hijos) donde niña se repite 2 veces y niño 3 veces (nótese la simetría con el apartado b)), luego $PR_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$

De modo que, utilizando la regla de Laplace: $P(D) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{16}$

69. Se lanza un dado dos veces y se consideran los sucesos A = "obtener al menos un 6" y B = "la diferencia de puntuaciones es 1". Calcula la probabilidad del suceso $A \cup B$

El espacio muestral del experimento viene dado por:

$$E = \begin{Bmatrix} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6) \end{Bmatrix}$$

que tiene 36 sucesos elementales que suponemos equiprobables.

Los sucesos A y B están formados por los siguientes sucesos elementales:

$$A = \begin{Bmatrix} (1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6) \\ (6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5) \end{Bmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} (1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,6) \\ (2,1);(3,2);(4,3);(5,4);(6,5) \end{Bmatrix}$$

$$A \cup B = \begin{Bmatrix} (1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,6);(4,6);(3,6);(2,6);(1,6);(6,6); \\ (2,1);(3,2);(4,3);(5,4);(6,5);(6,4);(6,3);(6,2);(6,1) \end{Bmatrix}$$

De modo que, utilizando la regla de Laplace: $P(A \cup B) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{19}{36}$.

70. En una rifa benéfica, se venden 500 papeletas, de las cuales 150 tienen un premio de 20 euros, 100 tienen un premio de 50 euros y el resto no tiene premio. Si una persona compra una papeleta, calcula la probabilidad de que:

a) Gane un premio de 20 euros.

b) Si la persona compra dos papeletas, gane al menos un premio.

Se supone que los resultados posibles son equiprobables por lo que se utiliza la regla de Laplace.

a) Sea el suceso A = "gane un premio de 20 euros", que tiene 150 papeletas "favorables", luego:

$$P(A) = \frac{150}{500} = \frac{3}{10}$$

b) Si se compran dos papeletas, el número de resultados posibles es: $C_{500,2} = \binom{500}{2} = \frac{500 \cdot 499}{2!} = 124\,750$.

ya que no importa el orden en que se compren las papeletas.

Para calcular la probabilidad del suceso B = "la persona gane al menos un premio", se considera el suceso contrario $\overline{C}$ = "la persona no gane ningún premio" y el número de resultados favorables al suceso $\overline{C}$ es:

$$C_{250,2} = \binom{250}{2} = \frac{250 \cdot 249}{2!} = 31125$$

De modo que, utilizando la regla de

Laplace: $P(\overline{C}) = \frac{31125}{124750} = 0,2495 \Rightarrow P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,2495 = 0,7505$

71. Disponemos de un dado trucado de modo que la probabilidad de que salga número par es doble que la de obtener impar. Si se lanza el dado una vez, calcula la probabilidad de obtener:

a) Número par.

b) Número impar.

c) Un número menor que 4.

Suponiendo que la probabilidad de obtener cualquier número impar (1, 3 o 5) es la misma, sea p, y que también es la misma la de obtener cualquier número par (2, 4 o 6), es decir $2p$, entonces:

$$p + p + p + 2p + 2p + 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{9}$$

a) La probabilidad del suceso A = "obtener número par" es $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

b) La probabilidad del suceso B = "obtener número impar" es $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

c) La probabilidad del suceso C = "obtener número menor que 4" $P(C) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

72. Se lanza diez veces una moneda equilibrada. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Dos caras y ocho cruces.

b) Como mucho dos caras.

c) Un número par de caras.

El número de resultados posibles al lanzar 10 veces una moneda equilibrada (*C* y *X* equiprobables) es el de variaciones con repetición de orden 10 (los 10 lanzamientos), de los dos elementos (*C* y *X*), es decir: $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$.

a) Sea el suceso *A* = "obtener 2 caras y 8 cruces". Los resultados favorables a este suceso se pueden contar como permutaciones con repetición o, al tratarse de dos elementos (*C*, *X*) como combinaciones, ya que:

$$PR_{10}^{2,8} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$$

Y, entonces, la probabilidad del suceso *A* es: $P(A) = \dfrac{45}{1024} = 0,0439$.

b) Sea *B* = "obtener como mucho 2 caras". Este suceso es la unión de 3 sucesos incompatibles:

B_0= "ninguna cara"; Resultados favorables a B_0: 1

B_1= "exactamente 1 cara"; Resultados favorables a B_1: $PR_{10}^{1,9} = \dfrac{10!}{1!\cdot 9!} = 10$

B_2= "exactamente 2 caras" Resultados favorables a B_2: 45 (calculados en apartado a))

Entonces, $P(B) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) = \dfrac{1}{1024} + \dfrac{10}{1024} + \dfrac{45}{1024} = \dfrac{56}{1024} = \dfrac{7}{128} = 0,0547$

c) Sea *C* = "obtener un número par de caras". Se puede escribir el suceso *C* como unión de los sucesos incompatibles C_j = "obtener *j* caras" con *j* = 0, 2, 4, 6, 8 y 10.

Resultados favorables al suceso C_j : $PR_{10}^{j,10-j} = \dfrac{10!}{j!(10-j)!}$.

Entonces:

$$P(C) = P(C_0) + P(C_2) + P(C_4) + P(C_6) + P(C_8) + P(C_{10}) = \frac{1}{1024} + \frac{45}{1024} + \frac{210}{1024} + \frac{210}{1024} + \frac{45}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{512}{1024} = 0,5$$

Probabilidad condicionada. Independencia.

73. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que *P*(*A*) = 0,25; *P*(*B*|*A*) = 0,5; *P*(*A*|*B*) = 0,25.

a) ¿Son *A* y *B* incompatibles?

b) ¿Son *A* y *B* independientes?

c) Calcula $P(\overline{A} \mid \overline{B})$.

a) *A* y *B* son incompatibles si $P(A \cap B) = 0$ Como

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 \neq 0$$, *A* y *B* no son incompatibles.

b) Son independientes si $P(A \cap B) => P(A) \cdot P(B)$ y en este caso, como $P(A \mid B) = 0,25 = P(A)$ sí son independientes. Otra forma de comprobarlo es la siguiente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \mid B)} = \frac{0,125}{0,25} = 0,5 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 = P(A \cap B)$$

c) Como $P(A) = P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(A \mid \overline{B}) \Rightarrow 0,25 = 0,5 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot P(A \mid \overline{B}) \Rightarrow P(A \mid \overline{B}) = 0,25$ se tiene que $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1 - P(A \mid \overline{B}) = 0,75$

74. Sean *A* y *B* dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A) = 0{,}3$ y que $P(B) = 0{,}7$. Calcula la probabilidad de que:

a) Ocurra al menos uno de los dos sucesos.

b) Ocurra *A*, si se sabe que al menos uno de los dos ha ocurrido.

c) Ocurra *B*, si se sabe que *A* no ha ocurrido.

a) Que ocurra al menos uno, no es sino la unión de ambos sucesos. Como por ser independientes se tiene que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$. La probabilidad pedida es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}7 - 0{,}21 = 0{,}79$$

b) $P(A \mid (A \cup B)) = \dfrac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}79} = 0{,}37975$

c) Se sabe que $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow 0{,}7 = 0{,}21 + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow P(B \cap \overline{A}) = 0{,}49$ por tanto: $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(A)}{1 - P(A)} = \dfrac{0{,}49}{0{,}7} = 0{,}7$

(Nótese que era un resultado inmediato, ya que si *A* y *B* son independientes, $\overline{A}$ y *B* también lo son, por lo que $P\left(B \mid \overline{A}\right) = P(B) = 0{,}7$).

75. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}75$. Calcula:

a) $P(\overline{A} \mid B)$

b) $P(B \mid A)$

a) Como $0{,}75 = P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}25$

$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \dfrac{0{,}25}{0{,}4} = 0{,}375$.

b) $P\left(\overline{B} \mid A\right) = 1 - P(B \mid A) = 1 - \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - \dfrac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5.$

76. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio, con $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2$.

a) Los sucesos *A* y *B* ¿son independientes?

b) Calcula $P(\overline{B} \mid A)$.

a) Como $0{,}2 = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0{,}8$

Ahora como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}8 = 0{,}5 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

Pero $0{,}1 = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$ Luego *A* y *B* no son independientes.

b) $P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \dfrac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}8$

77. Se consideran los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A) = \frac{1}{3};\ P(B) = \frac{1}{4};\ P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

a) ¿Son A y B independientes?

b) Calcula las siguientes probabilidades: **i.** $P(\overline{A} \mid \overline{B})$ **ii.** $P(\overline{A} \mid B)$ **iii.** $P(B \mid \overline{A})$

c)

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$

Por tanto sí son independientes.

b) Recordemos que si A y B son independientes, también lo son A y $\overline{B}$, ya que

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$

por tanto:

i) $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1 - P(A \mid \overline{B}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

ii) $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

iii) $P(B \mid \overline{A}) = P(B) = \frac{1}{4}$

Probabilidad total y teorema de Bayes.

78. Se lanza una moneda y si el resultado es cara, a continuación se lanzas un dado que tiene 4 caras rojas y dos blancas. En cambio, si sale cruz, se lanza un dado con 2 caras rojas y 4 blancas.

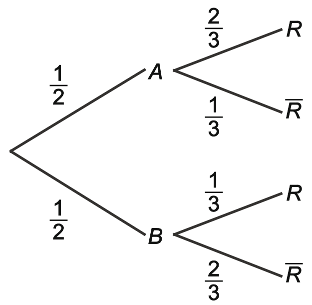
a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una cara roja?

b) Si el resultado del dado fue una cara roja, ¿cuál es la probabilidad de que se obtuviera cara al lanzar la moneda?

Sean los sucesos
A = "lanzar el dado de 4 caras rojas y 2 blancas"
B = "lanzar el dado de 2 caras rojas y 4 blancas"
R = "obtener cara roja".

Se tiene que: $P(A) = \frac{1}{2};\ P(B) = \frac{1}{2};\ P(R \mid A) = \frac{2}{3};\ P(R \mid B) = \frac{1}{3}$

El diagrama de árbol adjunto recoge la situación.



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total: $P(R) = P(A) \cdot P(R \mid A) + P(B) \cdot P(R \mid B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

b) Por el teorema de Bayes: $P(A \mid R) = \dfrac{P(A) \cdot P(R \mid A)}{P(R)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

79. Se tienen tres cajas. Se lanza un dado equilibrado, si sale número par se elige la caja que contiene 3 bolas verdes, 2 blancas y 2 rojas, si el resultado del dado es 1, la caja elegida contiene 4 bolas verdes, 2 blancas y 5 rojas. En otro caso, se elige la caja que contiene 2 bolas verdes, 3 blancas y 1 roja. De la caja elegida se extraen dos bolas. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos bolas extraídas sean verdes.

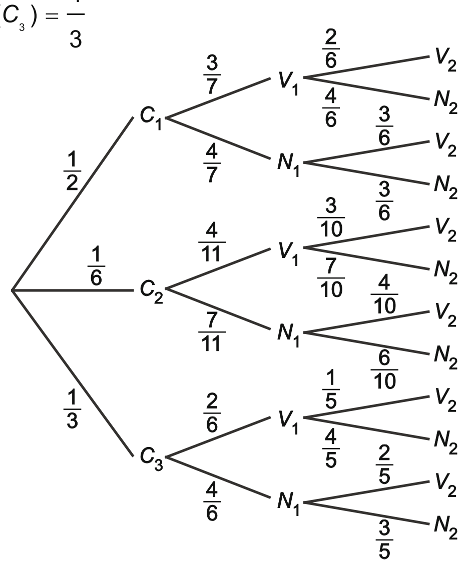
b) Si las dos bolas extraídas son verdes, sean de la caja que solo contiene 2 bolas verdes.

Sean las cajas: $C_1 = \{3V, 2B, 2R\}$; $C_2 = \{4V, 2B, 5R\}$; $C_3 = \{2V, 3B, 1R\}$

La probabilidad de elegir una u otra caja depende del resultado del lanzamiento del dado.

$$P(C_1) = \frac{1}{2};\ P(C_2) = \frac{1}{6};\ P(C_3) = \frac{1}{3}$$

Suponiendo que la extracción es sin reemplazamiento y recogemos las distintas posibilidades de que la extracción sea una bola verde (V) o no lo sea (N) en el diagrama de árbol adjunto:



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(V_1V_2) = P(C_1)\cdot P(V_1 \mid C_1)\cdot P(V_2 \mid (V_1 \cap C_1)) + P(C_2)\cdot P(V_1 \mid C_2)\cdot P(V_2 \mid (V_1 \cap C_2)) +$$

$$+P(C_3)\cdot P(V_1 \mid C_3)\cdot P(V_2 \mid (V_1 \cap C_3)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{155}{1386} = 0{,}1118$$

b) Por el teorema de Bayes: $P(C_3 \mid V_1V_2) = \dfrac{P(C_3)\cdot P(V_1V_2 \mid C_3)}{P(V_1V_2)} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{155}{1386}} = \dfrac{154}{775} = 0{,}1987$

Síntesis

80. De los sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio se sabe que *P(A)* = 0,3 y *P(B)* = 0,4. Calcula en cada caso la probabilidad del suceso *B* – *A* cuando:

a) *A* y *B* son incompatibles.

b) *A* y *B* son independientes.

c) $P(A \cup B) = 0{,}5$.

a) Si *A* y *B* son incompatibles: $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) = 0{,}4$.

b) Si *A* y *B* son independientes:

$$P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12 \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}28.$$

c) Si $0{,}5 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$.

Por tanto $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

81. Sean *A* y *B* dos sucesos de un espacio muestral, con P(*A*) = 0,55 y P(*B*) = 0,3. Calcula en cada caso las probabilidades de los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ si:

a) *A* y *B* son incompatibles.

b) Si *A* y *B* son independientes.

c) Si $P(A \mid B) = 0,6$.

a) Si *A* y *B* son incompatibles $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,55 + 0,3 = 0,85$

b) Si *A* y *B* son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,55 \cdot 0,3 = 0,165$

Y por tanto $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,55 + 0,3 - 0,165 = 0,685$

c) Si $0,6 = P(A \mid B) \Rightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{0,3} = 0,6 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$

Por tanto $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,55 + 0,3 - 0,18 = 0,67$

CUESTIONES

82. Comprueba que si *A* y *B* son dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio, se verifica que: $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$

Por ser independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, por tanto:

$$1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - \big((1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))\big) = 1 - \big(1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)\big) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$

83. Sean *A* y *B* dos sucesos. Considerar el suceso *C*: "solo ocurre uno de los dos", Demuestra que: $P(C) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$

El suceso *C* es $C = (A - B) \cup (B - A)$ siendo estos dos incompatibles, y de aquí:

$$P(C) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$$

84. Sean *A*, *B* y *C* tres sucesos de un espacio muestral tales que:

$$P(A \mid C) \geq P(B \mid C)\ ;\ P(A \mid \overline{C}) \geq P(B \mid \overline{C})\ ;\ P(\overline{C}) > 0\ ;\ P(C) > 0$$

Razona cuál de las siguientes dos afirmaciones es correcta:

a) $P(A) \leq P(B)$

b) $P(B) \leq P(A)$

Dado que ni *C* ni su contrario tienen probabilidad nula, aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(C) \cdot P(A \mid C) + P(\overline{C}) \cdot P(A \mid \overline{C}) \geq P(C) \cdot P(B \mid C) + P(\overline{C}) \cdot P(B \mid \overline{C}) = P(B)$$

Es decir, la afirmación correcta es a).

PROBLEMAS

85. Considera dos urnas, la primera con 5 bolas blancas y 6 verdes y la segunda con 4 bolas blancas y 3 verdes. De la primera urna se extrae una bola al azar y se pasa a la segunda urna. Finalmente, de la segunda urna se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que esta sea verde.

Sean $U_1 = \{5B, 6V\}$ y $U_2 = \{4B, 3V\}$ las dos urnas propuestas (B: bola blanca; V: bola verde).

En la primera etapa del experimento, se pasa una bola al azar de la urna U_1 a la U_2, que puede ser blanca o verde, dando lugar respectivamente a las urnas

$U_{21} = \{5B, 3V\}$ o $U_{22} = \{4B, 4V\}$

con las siguientes probabilidades, teniendo en cuenta que, al extraer la bola de U_1, los resultados posibles son equiprobables y se aplica la regla de Laplace:

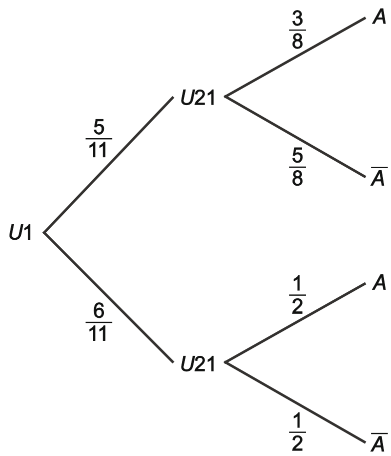
$$P(U_{21}) = \frac{5}{11}; \qquad P(U_{22}) = \frac{6}{11}$$

De la urna formada en la primera etapa se extrae una bola al azar, sea el suceso A = "la bola extraída es verde".

Dependiendo de que la urna formada sea U_{21} o U_{22}, la probabilidad de extraer bola verde es distinta:

$$P(A \mid U_{21}) = \frac{3}{8}; \qquad P(A \mid U_{22}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

En el diagrama de árbol se muestran las dos etapas.



de forma que aplicando el teorema de la probabilidad total, se obtiene:

$$P(A) = P(A \mid U_{21}) \cdot P(U_{21}) + P(A \mid U_{22}) \cdot P(U_{22}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{39}{88} = 0,4432$$

86. En un congreso internacional se consideran oficiales tres idiomas: *A*, *B* y *C*. El 40% de los participantes domina el idioma *A*, el 36 % domina el *B*, el 18 % el *C*, el 30 % domina los idiomas *A* y *B*, el 14% domina los idiomas *A* y *C* y el 12 % *B* y *C*. Finalmente un 8 % de los congresistas domina los tres idiomas. Entre los asistentes se selecciona una persona al azar. Calcula la probabilidad de que:

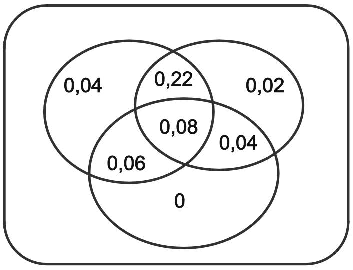
a) No domine ninguno de los tres idiomas.

b) Domine solo uno de los tres.

c) Domine el idioma *B* pero no el *C*.

d) Domine exactamente dos de los tres idiomas.

Considera los sucesos



A = "domina el idioma *A*", B = "domina el idioma *B*", C = "domina el idioma *C*"

a) Si una persona es seleccionada al azar:
el suceso "no domine ninguno de los tres idiomas" es el suceso $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$,
cuya probabilidad es

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)=1-P\left(A\cup B\cup C\right)$$

Como $P\left(A\cup B\cup C\right)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

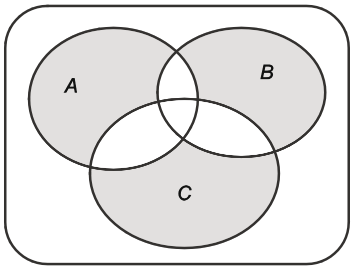
Se tiene que $P\left(A\cup B\cup C\right)=0,40+0,36+0,18-0,30-0,14-0,12+0,08=0,46$

en consecuencia: $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)=1-P\left(A\cup B\cup C\right)=1-0,46=0,54$

b) Sea U = "Domina solo uno de los tres idiomas". Se debe calcular la probabilidad de la unión de los sucesos incompatibles: "solo domina el idioma *A*", "solo domina el idioma *B*" y "solo domina el idioma *C*", que se escriben respectivamente:

$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$; $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$; $\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$

Como se muestra en el diagrama siguiente.



$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$

$=0,40-0,30-0,14+0,08=0,04$

$P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})=P(B)-P(A\cap B)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$

$=0,36-0,30-0,12+0,08=0,02$

$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=P(C)-P(C\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$

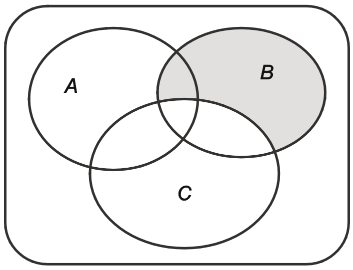
$=0,18-0,14-0,12+0,08=0$

La probabilidad pedida es $P(U)=0,04+0,02=0,06$.

c) La probabilidad del suceso $B-C$ = "domina el idioma *B* pero no el *C*",

$P(B-C)=P(B)-P(B\cap C)=0,36-0,12=0,24$

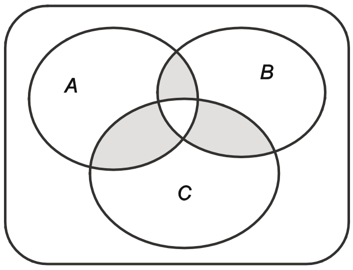
Como se muestra en el diagrama.



d) Sea el suceso D = "domine exactamente 2 de los 3 idiomas" es la unión de los sucesos "domina *A* y *B* pero no *C*", "domina *A* y *C* pero no *B*" y "domina *B* y *C* pero no *A*", que se escriben respectivamente:

$A\cap B\cap\overline{C}$; $A\cap\overline{B}\cap C$; $\overline{A}\cap B\cap C$

que se pueden ver en el diagrama siguiente.
Sus probabilidades son:



$P(A\cap B\cap\overline{C})=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)=0,30-0,08=0,22$

$P(A\cap\overline{B}\cap C)=P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)=0,14-0,08=0,06$

$P(\overline{A}\cap B\cap C)=P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)=0,12-0,08=0,04$

Por tanto: $P(D)=0,22+0,06+0,04=0,32$

87. En las elecciones al Consejo Escolar de un instituto se sabe que la probabilidad de que una madre acuda a votar es 0,28, la probabilidad de que vote el padre es 0,21 y la de que voten los dos 0,15. Calcula la probabilidad de que

a) Al menos uno de los dos vote.

b) No vote ninguno de los dos.

c) Solo vote la madre.

Sean los sucesos: A = "vota la madre" B = "vota el padre". Se sabe que $P(A) = 0,28$; $P(B) = 0,21$; $P(A \cap B) = 0,15$.

a) El suceso "al menos uno de los dos vote" es el suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,28 + 0,21 - 0,15 = 0,34$$

b) El suceso "no vote ninguno de los dos" es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$, y su probabilidad es:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,34 = 0,66.$$

c) El suceso "solo vote la madre" es el suceso $A \cap \overline{B} = A - B$ cuya probabilidad es:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,28 - 0,15 = 0,13$$

88. Un estudiante se presenta a una prueba que consta de 20 temas de los cuales ha preparado 10. En la prueba se eligen por sorteo 3 temas de los 20 y debe contestar a uno que él escoja. Calcula la probabilidad de que:

a) Sepa contestar solo uno de los tres temas.

b) Supere la prueba.

Como no importa el orden en el que se elijan los temas, el número de resultados posibles (equiprobables) al extraer 3 temas de los 20, es:

$$C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$$

a) Para el estudiante, los 20 temas se dividen en dos grupos: 10 que sabe y 10 que no sabe
Sea el suceso A = "el estudiante sabe contestar solo uno de los tres temas".
El tema que sabe se elige de los 10 que sabe y los otros dos de los 10 que no sabe, luego el número de resultados favorables es:

$$C_{10,1} \cdot C_{10,2} = \frac{10}{1!} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2!} = 450$$

De manera que, aplicando la regla de Laplace, resulta: $P(A) = \frac{450}{1140} = \frac{15}{38} = 0,39474$

b) Sea el suceso B = "el estudiantes supere la prueba" que se puede enunciar "el estudiante sabe al menos uno de los tres temas".
Se considera el suceso contrario de B: $\overline{B}$ = "el estudiante no supera la prueba" que se puede enunciar: "el estudiante no sabe ninguno de los tres temas",
En este caso, los tres temas deben salir de los 10 que no sabe, por lo que el número de resultados favorables al suceso $\overline{B}$ es: $C_{10,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$

Utilizando la regla de Laplace se tiene: $P(\overline{B}) = \frac{140}{1140} = \frac{2}{19} = 0,10526$

Y finalmente, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{19} = \frac{17}{19} = 0,89474$

89. En un lote de 100 piezas, se sabe que el 5 % son defectuosas. Del lote se van seleccionando al azar piezas una a una sin reemplazo. Calcula la probabilidad de que la primera pieza defectuosa se obtenga en la tercera extracción.

En el lote hay 95 piezas buenas y 5 defectuosas

Sean los sucesos:

B_1 = "obtener pieza buena en la primera extracción",

B_2 = "obtener pieza buena en la segunda extracción"

D_3 = "obtener pieza defectuosa en la tercera extracción"

Entonces, se pide la probabilidad del suceso $B_1 \cap B_2 \cap D_3$.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap D_3) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) \cdot P(D_3 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{5}{98} = 0,04602$$

90. En una ciudad, el 35 % de los ciudadanos utiliza el metro al menos una vez al día, el 24% usa el autobús y un 15% ambos medios de transporte. Se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Use el autobús si se sabe que coge el metro.

b) Sabiendo que monta en metro, no utilice el autobús.

c) No utilice ni metro ni autobús.

Considera los sucesos:

M = "utiliza el metro al menos una vez al día"

A = "utiliza el autobús al menos una vez al día"

Se sabe que si una persona ha sido elegida al azar,

$$P(M) = 0,35 \;\; ; \;\; P(A) = 0,24 \;\; ; \;\; P(M \cap A) = 0,15$$

a) Se trata de calcular la probabilidad de A condicionada por M:

$$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0,15}{0,35} = \frac{3}{7} = 0,42857$$

b) En este caso, se debe calcular la probabilidad del suceso $\overline{A}$, contrario de A, condicionado a que ocurre M.

$$P(\overline{A} \mid M) = 1 - P(A \mid M) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} = 0,57143$$

c) Ahora debemos calcular

$$P\left(\overline{M} \cap \overline{A}\right) = P\left(\overline{M \cup A}\right) = 1 - P\left(M \cup A\right) = 1 - \left(P(M) + P(A) - P(M \cap A)\right) = 1 - \left(0,35 + 0,24 - 0,15\right) = 0,56$$

91. En una determinada especie de mamíferos aparecen dos características genéticas *A* y *B* independientes con probabilidades 0,5 y 0,8 respectivamente. Calcula la probabilidad de que un ejemplar de esta especie elegido al azar

a) Presente ambas características.

b) No presente ninguna de las dos características.

c) Presente solo una de las dos.

d) Presente la característica *A* si se sabe que tiene la *B*.

Considera los sucesos:

$A =$ "el mamífero presenta la característica genética *A*";

$B =$ "el mamífero presenta la característica genética *B*"

Ambos son independientes con $P(A) = 0{,}5$ y $P(B) = 0{,}8$

a) El suceso "el mamífero presenta ambas características" se puede escribir $A \cap B$, y su probabilidad es $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$

b) El suceso "el mamífero no presente ninguna de las dos características" se escribe $\overline{A} \cap \overline{B}$, cuya probabilidad es $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right) = 1 - \left(0{,}5 + 0{,}8 - 0{,}4\right) = 0{,}1$

c) El suceso "el mamífero presente solo una de las dos características" se puede escribir como unión de dos sucesos incompatibles $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$, cuya probabilidad es:

$$P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}4 + 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}5$$

d) En este caso, se pide la probabilidad siguiente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}5$$

Otra forma de verlo es que por ser independientes $P(A \mid B) = P(A) = 0{,}5$

92. Una vacuna se administra en 2 dosis, si el paciente tiene reacción alérgica a la 1ª dosis no se le administra la 2ª. El 30 % de la población presenta reacción a la 1ª dosis y, de los que reciben la 2ª dosis, el 10% presenta reacción alérgica. De la población se elige un individuo al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) No presente reacción alérgica.

b) Presente reacción alérgica a la 2ª dosis.

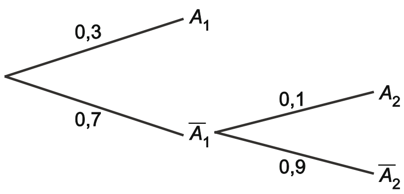
Considera los sucesos:

$A_1 =$ "el paciente presenta reacción alérgica a la 1ª dosis"

$A_2 =$ "el paciente presenta reacción alérgica a la 2ª dosis"

Se sabe que: $P(A_1) = 0{,}3$; $P(A_2 \mid \overline{A}_1) = 0{,}1$ y, a partir de estas, que $P(\overline{A}_1) = 0{,}7$ y $P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) = 0{,}9$.

A la derecha se muestra el diagrama de árbol con los posibles caminos y sus probabilidades



a) El suceso "el paciente no presente reacción alérgica" se puede escribir: $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$, y su probabilidad es:

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$$

b) En este caso, se pide la probabilidad de $P(\overline{A}_1 \cap A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2 \mid \overline{A}_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$.

93. En una atracción de feria, se lanza un dardo a un blanco y si se acierta en uno de dos lanzamientos se consigue premio. En cada lanzamiento la probabilidad de acertar es 0,3. Calcula la probabilidad de:

a) Llevarse el premio.

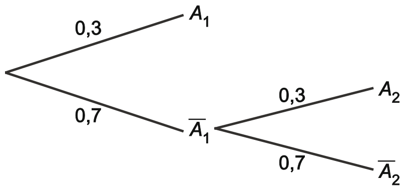
b) Llevarse el premio en el segundo intento.

Se entiende que si se acierta en el primer lanzamiento ya no se realiza el segundo y que los lanzamientos son independientes.

Sean los sucesos:

A_1 = "llevarse el premio en el primer lanzamiento" y A_2 = "llevarse el premio en el segundo lanzamiento"

El diagrama de árbol siguiente muestra las distintas posibilidades del juego y sus probabilidades:



a) El suceso "llevarse el premio" se puede escribir $\overline{A}_1 \cup (\overline{A}_1 \cap A_2)$ es decir "acertar en el primer lanzamiento o no acertar en el primero y sí en el segundo". La probabilidad es, entonces:

$P\left(A_1 \cup \left(\overline{A}_1 \cap A_2\right)\right) = P\left(A_1\right) + P\left(\left(\overline{A}_1 \cap A_2\right)\right) = P\left(A_1\right) + P\left(\overline{A}_1\right) \cdot \left(A_2\right) = 0,3 + (1 - 0,3) \cdot 0,3 = 0,51$

b) El suceso "llevarse el premio en el segundo lanzamiento" es el suceso $(\overline{A}_1 \cap A_2)$.

Entonces: $P\left(\overline{A}_1 \cap A_2\right) = P\left(\overline{A}_1\right) \cdot \left(A_2\right) = (1 - 0,3) \cdot 0,3 = 0,21$

94. Una caja con una docena de huevos tiene 3 rotos. De la caja se extraen 2 huevos uno a uno sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos huevos estén en buen estado.

b) Uno de los dos esté roto.

Sean los sucesos:

$B1$ = "el primer huevo está en buen estado"

$B2$ = "el segundo huevo está en buen estado"

$R1$ = "el primer huevo está roto"

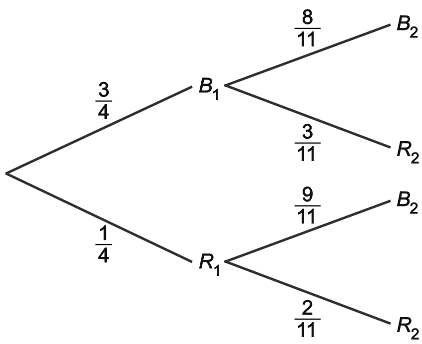
$R2$ = "el segundo huevo está roto"

Las probabilidades de cada suceso en la primera extracción y la de los sucesos de la segunda extracción dependiendo de lo que haya sucedido en la primera son:

$P(B1) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$; $P(R1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$;

$P(B2 \mid B1) = \frac{8}{11}$; $P(R2 \mid B1) = \frac{3}{11}$;

$P(B2 \mid R1) = \frac{9}{11}$; $P(R2 \mid R1) = \frac{2}{11}$



a) Se pide la probabilidad del suceso $B1 \cap B2$

$P\left(B1 \cap B2\right) = P(B1) \cdot P(B2 \mid B1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{11} = \frac{6}{11}$

b) En este caso, se debe calcular la probabilidad del suceso $\left(B1 \cap R2\right) \cup \left(R1 \cap B2\right)$, unión de dos sucesos incompatibles:

$P\left(\left(B1 \cap R2\right) \cup \left(R1 \cap B2\right)\right) = P\left(B1 \cap R2\right) + P\left(R1 \cap B2\right) =$

$= P(B1) \cdot P(R2 \mid B1) + P(R1) \cdot P(B2 \mid R1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{11} = \frac{9}{22}$

95. En un juego en el que se lanzan a la vez 6 monedas equilibradas, en uno de los lanzamientos alguien informa que han aparecido al menos dos caras. Calcula la probabilidad de que el número de caras haya sido exactamente tres.

El número de resultados posibles equiprobables del experimento consistente en lanzar seis monedas equilibradas (C y X equiprobables) es el mismo que el de las variaciones con repetición de orden 6 (los lanzamientos) de dos elementos (C y X); esto es: $VR_{2,6} = 2^6 = 64$.

Sean los sucesos: A = "obtener al menos dos caras y $B3$ = "obtener exactamente tres caras"

Debe calcularse la probabilidad de $B3$, sabiendo que ha ocurrido A, es decir: $P(B3 \mid A) = \dfrac{P(B3 \cap A)}{P(A)}$.

Sea el suceso contrario de A, $\overline{A}$ = "obtener menos de dos caras", es decir una cara o ninguna, que se puede escribir $\overline{A} = B0 \cup B1$ donde $B0$ = "no obtener caras" y $B1$ = "obtener exactamente una cara".

Número de resultados favorables a $B0$ (6 cruces): 1

Número de resultados favorables a $B1$ (1 cara y 5 cruces): $PR_6^{1,5} = \dfrac{6!}{1!\cdot 5!} = 6$

De modo que la probabilidad del suceso $\overline{A}$ es: $P(\overline{A}) = P(B0) + P(B1) = \dfrac{1}{64} + \dfrac{6}{64} = \dfrac{7}{64} = 0{,}1094$.

Con lo que $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{7}{64} = \dfrac{57}{64} = 0{,}8906$

Y, como el número de resultados favorables al suceso $B3$ (3 C y 3 X) es $PR_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$

la probabilidad de $B3$ es: $P(B3) = \dfrac{20}{64} = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125$. Como $B3$ está contenido en A, probabilidad pedida es:

$$P(B3 \mid A) = \frac{P(B3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B3)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{57}{64}} = \frac{20}{57} = 0{,}3509$$

96. Se lanza un dado que está trucado de modo que la probabilidad de obtener una cara es proporcional al número de la misma. Calcula la probabilidad de que:

a) Se obtenga número impar.

b) Se obtenga el 3 si se sabe que salió impar.

c) Salga par si se sabe que salió mayor que 3.

Si la probabilidad de obtener un número es proporcional a dicho número y se supone que la constante de proporcionalidad es k, entonces $P(1) = k$; $P(2) = 2k$; $P(3) = 3k$; $P(4) = 4k$; $P(5) = 5k$; $P(6) = 6k$

Y como $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow k = \dfrac{1}{21}$ por tanto $P(x) = \dfrac{x}{21}$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

a) Sea el suceso A = "obtener número impar", su probabilidad es: $P(1) + P(3) + P(5) = \dfrac{1}{21} + \dfrac{3}{21} + \dfrac{5}{21} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$

b) Sea B = "obtener el número 3". Como $A \cap B = B$, resulta: $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{21}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{1}{3}$

c) Sean C = "obtener número par" y D = "obtener número mayor que 3". En este caso, el suceso $C \cap D = \{2, 6\}$

$P(C) = P(2) + P(4) + P(6) = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$; $P(D) = P(4) + P(5) + P(6) = \dfrac{15}{21} = \dfrac{5}{7}$; $P(C \cap D) = P(4) + P(6) = \dfrac{10}{21}$ D

e manera que $P(C \mid D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{\frac{10}{21}}{\frac{5}{7}} = \dfrac{2}{3}$

97. De una baraja española de 40 cartas se extraen sucesivamente 3 cartas al azar. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Tres reyes.

b) Una figura en la primera carta, un cinco en la segunda y un as en la tercera.

c) Dos ases y un rey.

Sean los sucesos $R1$ = "extraer rey en la 1.ª", $R2$ = "extraer rey en la 2.ª" y $R3$ = "extraer rey en la 3.ª".

a) El suceso " obtener tres reyes" se puede escribir $R1 \cap R2 \cap R3$, y su probabilidad es:

$$P\left(R1 \cap R2 \cap R3\right) = P\left(R1\right) \cdot P\left(R2 \mid R1\right) \cdot P\left(R3 \mid R1 \cap R2\right) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = 0{,}000405$$

b) En este caso, sean $F1$ = "obtener figura en la 1ª", $C2$ = "obtener 5 en la 2ª" y $A3$ = "obtener as en la 3ª"; entonces:

$$P\left(F1 \cap C2 \cap A3\right) = P\left(F1\right) \cdot P\left(C2 \mid F1\right) \cdot P\left(A3 \mid F1 \cap C2\right) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = 0{,}003239$$

c) Dos ases y un rey se pueden extraer de tres formas distintas (as, as, rey), (as, rey, as) y (rey, as, as). En cada caso la probabilidad es la misma, luego:

$$P(\text{dos ases y un rey}) = 3 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{4}{38} = 0{,}002429$$

98. Se lanzan dos dados, uno blanco y otro verde. Considera los sucesos *A* ="obtener 5 en el dado blanco" y *B* ="la suma de los resultados de los dados es 7". Calcula la probabilidad de ambos sucesos y determina si son o no independientes.

El conjunto de resultados posibles al lanzar dos dados, $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ se puede representar mediante la tabla siguiente poniendo en filas los resultados del dado blanco (por ejemplo) y en columnas los del dado verde. Observado la tabla, puede verificarse que:

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \; ; \; P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Además, el suceso $A \cap B = \{5, 2\}$, con lo que: $P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$

Y, por tanto, los sucesos *A* y *B* son independientes.

99. En una ciudad el 46 % de sus habitantes ve televisión más de dos horas diarias, un 33 % visita centros comerciales más de dos veces por semana y un 15% realiza ambas actividades. De la ciudad se elige una persona al azar, Calcula la probabilidad de que:

a) No realice ninguna de las actividades señaladas.

b) Vea televisión más de dos horas pero no visite centros comerciales más de dos veces a la semana.

Considera los sucesos:

A = "ver televisión más de dos horas diarias",

B = "visitar centros comerciales más de dos veces por semana"

Elegida una persona al azar, se tiene que $P(A) = 0,46$; $P(B) = 0,33$ y $P(A \cap B) = 0,15$

a) El suceso "la persona elegida no realice ninguna de las actividades" es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$, cuya probabilidad es

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right) = 1 - \left(0,46 + 0,33 - 0,15\right) = 0,36$$

b) El suceso "la persona elegida ve TV más de dos horas pero no visita centros comerciales más de dos veces a la semana" es el suceso $A \cap \overline{B}$, y su probabilidad es $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,46 - 0,15 = 0,31$

100. En un test con dos problemas, la probabilidad de resolver el primero es 0,55, la de resolver el segundo 0,45 y la de resolver al menos uno de los dos 0,7. Calcula la probabilidad de:

a) Resolver ambos.

b) Resolver el primero si se ha resuelto el segundo.

c) De no resolver ninguno.

Sean los sucesos A_1 = "resolver el primer problema" y A_2 = "resolver el segundo problema".
El suceso "resolver al menos uno de los dos" es el suceso $A_1 \cup A_2$. Se sabe que:

$$P(A_1) = 0,55 \; ; \; P(A_2) = 0,45 \; ; \; P(A_1 \cup A_2) = 0,7$$

a) El suceso "resolver ambos" es el suceso intersección $A_1 \cap A_2$, cuya probabilidad es:

$$P(A_1 \cap B_2) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,55 + 0,45 - 0,7 = 0,3$$

b) En este caso, se trata de calcular la probabilidad del suceso A_1, condicionado a que ha ocurrido el suceso A_2, es decir $P(A_1 \mid A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{0,3}{0,45} = \dfrac{2}{3} = 0,6667$

c) El suceso "no resolver ninguno" es el suceso $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$, cuya probabilidad es:

$$P\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right) = P\left(\overline{A_1 \cup A_2}\right) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0,7 = 0,3$$

101. En un centro educativo en el que el 60% de los alumnos son chicas, participan en actividades deportivas el 30 % de los chicos y el 20 % de las chicas. Si se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea chico y no participe en actividades deportivas.

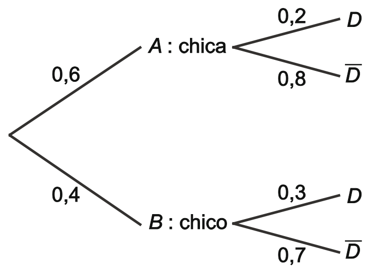
b) Participe en actividades deportivas.

c) Sea chica si se sabe que participa en actividades deportivas.

Sean los sucesos: $A =$ “chica” $B =$ “chico” $D =$ “participa en actividades deportivas”.
Se tiene que

$$P(A) = 0,6 \; ; \; P(B) = 0,4 \; ; \; P(D \mid A) = 0,2 \; ; \; P(D \mid B) = 0,3$$

Las diferentes posibilidades con sus respectivas probabilidades se recogen en el diagrama de árbol siguiente:



a) El suceso “sea chico y no participe en actividades deportivas” se puede escribir $B \cap \overline{D}$, y su probabilidad se puede calcular por dos vías (al menos):

En primer lugar, como $P(\overline{D} \mid B) = 1 - P(D \mid B) = 1 - 0,3 = 0,7$, resulta:
$P(B \cap \overline{D}) = P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

O también, calculando previamente la probabilidad del suceso $B \cap D$,
$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D \mid B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$ y de ahí $P(B \cap \overline{D}) = P(B) - P(B \cap D) = 0,4 - 0,12 = 0,28$

b) Por el teorema de la probabilidad total: $P(D) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) = 0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,24$

c) En este caso, por el teorema de Bayes: $P(A \mid D) = \dfrac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,2}{0,24} = 0,5$

Otra forma de plantearlo podría ser usando la definición de probabilidad condicionada y ver que como:

$$P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D \mid A) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12 \Rightarrow P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,12}{0,24} = 0,5$$

102. Tres máquinas *A*, *B* y *C* fabrican tornillos. En una hora, la máquina *A* produce 600 tornillos de los cuales el 1% es defectuoso; la máquina *B* produce 300 y el 2% es defectuoso; y la máquina *C* produce 100, de ellos el 3% defectuoso. En cada hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea defectuoso.

b) Haya sido fabricado por la máquina *C* sabiendo que es defectuoso.

Sean los sucesos

A = "el tornillo ha sido producido por la máquina *A*",

B = "el tornillo ha sido producido por la máquina *B*",

C = "el tornillo ha sido producido por la máquina *C*", y

D = "el tornillo es defectuoso"

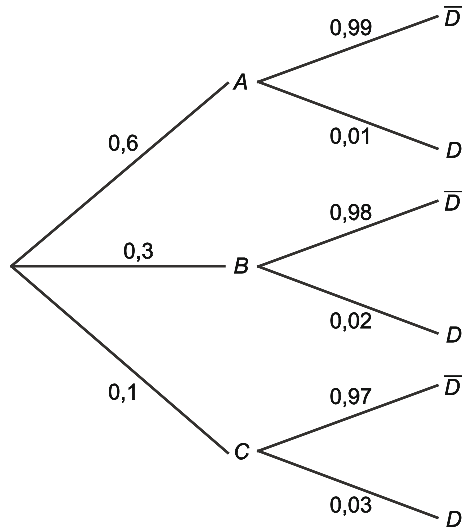
Con los datos proporcionados, si se elige un tornillo al azar, la probabilidad de que haya sido producido por cada una de las máquinas es:

$$P(A) = 0{,}6\ ;\quad P(B) = 0{,}3\ ;\quad P(C) = 0{,}1$$

Y las probabilidades de que sea defectuoso dependiendo de la máquina que lo haya producido son:

$$P(D \mid A) = 0{,}01\ ;\quad P(D \mid B) = 0{,}02\ ;\quad P(D \mid C) = 0{,}03$$

El diagrama de árbol representa gráficamente la situación:



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A)\cdot P(D \mid A) + P(B)\cdot P(D \mid B) + P(C)\cdot P(D \mid C) = 0{,}6\cdot 0{,}01 + 0{,}3\cdot 0{,}02 + 0{,}1\cdot 0{,}03 = 0{,}015$$

b) Mediante el teorema de Bayes:

$$P(C \mid D) = \frac{P(C)\cdot P(D \mid C)}{P(D)} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}03}{0{,}015} = 0{,}2$$

Nótese que una vez que se comprueba que el tornillo seleccionado es defectuoso, la probabilidad final (a posteriori) de que haya sido producido por la máquina *C* es el doble que la probabilidad inicial.

103. Un grupo de amigos acude habitualmente a dos lugares de ocio, *A* y *B*, de su ciudad de forma independiente. Las probabilidades de acudir un día cualquiera al *A* o al *B* son 0,4 y 0,3 respectivamente. Halla la probabilidad de que un día cualquiera dicho grupo

a) Vaya solo a uno de los lugares

b) Vaya al menos a uno de los lugares

Sean los sucesos $A =$ "el grupo acude al lugar *A*" y $B =$ "el grupo acude al lugar *B*".
Elegido un día la azar, $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,3$. Además, como *A* y *B* son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

a) Entonces, el suceso "el grupo vaya solo a uno de los lugares" que se escribe como unión de dos suceso incompatibles $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ tiene probabilidad:

$$P\left((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(A \cap \overline{B}\right) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0,4 \cdot (1 - 0,3) + (1 - 0,4) \cdot 0,3 = 0,46$$

Puesto que si dos sucesos *A* y *B* son independientes, también los son A con $\overline{B}$ y $\overline{A}$ con B

b) El suceso "el grupo vaya al menos a uno de los lugares" es el suceso $A \cup B$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58$

104. En una población que dispone de dos bibliotecas públicas *A* y *B* se sabe que el 15% de la población suele acudir a la biblioteca *A*, el 20 % a la *B* y, además, un 5 % visita las dos bibliotecas. De la población se elige una persona al azar. Calcula la probabilidad de que el ciudadano elegido sea usuario:

a) De al menos una de las dos bibliotecas.

b) De ninguna de ellas.

c) Solo de la biblioteca *B*.

Sean los sucesos $A =$ "el ciudadano es usuario de la biblioteca *A*" y $B =$ "el ciudadano es usuario de la biblioteca *B*"
Si se elige un ciudadano al azar: $P(A) = 0,15$; $P(B) = 0,2$ y $P(A \cap B) = 0,05$

a) El suceso "sea usuario de al menos una de las bibliotecas" es el suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,15 + 0,2 - 0,05 = 0,3$

b) El suceso "no sea usuario de ninguna de ellas", es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$, y su probabilidad es:
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,3 = 0,7$

c) El suceso "sea usuario solo de la biblioteca *B*", es el suceso $\overline{A} \cap B$, cuya probabilidad es:
$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,05 = 0,15$

105. En una población, el 50 % de los hogares tiene contratado el acceso a internet, el 25% tiene contratado el servicio de televisión por cable y el 20 % dispone de ambos servicios. De la población se selecciona un hogar. Calcula la probabilidad de que:

a) Tenga contratado al menos uno de los dos servicios.

b) No tenga contratado ninguno de estos dos servicios.

Sean los sucesos $A =$ "tener contratado el acceso a internet" y $B =$ "tener contratado el servicio de televisión por cable".

Elegido un hogar al azar, se tiene que $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,2$

a) El suceso "tener contratado al menos uno de los dos servicios" es el suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,25 - 0,2 = 0,55$

b) El suceso "no tener contratado ninguno de los dos servicios" es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$, y su probabilidad es:
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,55 = 0,45$

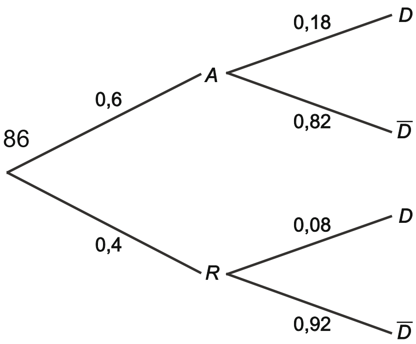
106. Una fábrica produce rotuladores azules y rojos en proporción de 3 a 2. Debido a problemas en el proceso de fabricación de una remesa, algunos rotuladores han salido con la tinta del otro color. En el control de calidad se detecta que el 82 % de rotuladores azules lleva tinta azul, mientras que el 92 % de rotuladores rojos lleva tinta roja. Si se elige un rotulador al azar, calcula la probabilidad de que:

a) No sea defectuoso.

b) Escriba de color rojo si se sabe que es defectuoso.

Considera los sucesos A = "el rotulador sea azul" R = "el rotulador sea rojo" D= "el rotulador sea defectuoso"
Elegido un rotulador al azar, se tiene que

$$P(A) = \frac{3}{5}\ ;\ P(R) = \frac{2}{5}\ ;\ P(D \mid A) = 1 - 0,82 = 0,18 \quad \text{y} \quad P(D \mid R) = 1 - 0,92 = 0,08$$



a) El suceso "el rotulador no sea defectuoso" es el suceso contrario a D, luego, por el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{D}) = P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(R) \cdot P(\overline{D} \mid R) = 0,6 \cdot 0,82 + 0,4 \cdot 0,92 = 0,86$$

b) Si se sabe que defectuoso, para que escriba en rojo ha de ser de los azules. Llamando R' al suceso "el rotulador escribe en rojo", resulta:

$$P(R' \mid D) = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,18}{0,14} = 0,771$$

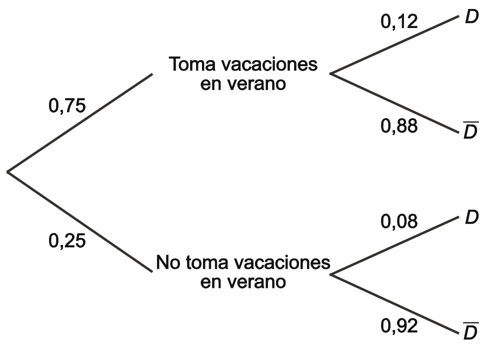
107. En una ciudad el 75 % de sus habitantes toma sus vacaciones en verano, de los cuales el 12 % viaja al extranjero. El 92 % de los que no toman las vacaciones en verano elige un destino nacional. Si se elige un ciudadano al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Viaje al extranjero en verano.

b) Esté de vacaciones en verano, si se sabe que viajó al extranjero.

Supondremos que todos los ciudadanos toman vacaciones, ya sea en verano o en otra época del año.
Sean los sucesos: A = "el ciudadano sale de vacaciones en verano" , D = "el ciudadano sale al extranjero"
y sus contrarios $\overline{A}$ = "el ciudadano no sale de vacaciones en verano", $\overline{D}$ = "el ciudadano no sale al extranjero".

Elegido un ciudadano al azar se tiene que:
$P(A) = 0,75\ ;\ P(D \mid A) = 0,12\ ;\ P(\overline{A}) = 0,25\ ;\ P(\overline{D} \mid \overline{A}) = 0,92$



a) El suceso "salir al extranjero en verano" es el suceso $A \cap D$ cuya probabilidad es:
$P(A \cap D) = P(D \mid A) \cdot P(A) = 0,12 \cdot 0,75 = 0,09$

b) Empecemos calculando la probabilidad de que un ciudadano viaje al extranjero en vacaciones usando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(D \mid \overline{A}) = 0,75 \cdot 0,12 + 0,25 \cdot 0,08 = 0,11$$

Empleando ahora el teorema de Bayes:

$$P(A \mid D) = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} = \frac{0,75 \cdot 0,12}{0,11} = 0,8182$$

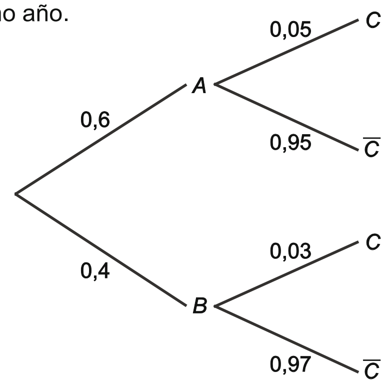
108. La probabilidad de que una persona sobreviva un año tras un trasplante de corazón es 0,8. Y la probabilidad de que sobreviva dos años es 0,75. Calcula la probabilidad de que una persona que ha sobrevivido al primer año de trasplante sobreviva al segundo año

Sean los sucesos A = "el paciente sobrevive al primer año" y B = "el paciente sobrevive dos años". Naturalmente B está contenido en A, ya que si sobrevive 2 años ha tenido necesariamente que sobrevivir el primero, por tanto $A \cap B = B \Rightarrow P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{0,75}{0,8} = 0,9375$.

109. Los trabajadores de una empresa se distribuyen en dos áreas de trabajo *A* y *B*. En el cómputo del último año, el absentismo laboral de los trabajadores del área *A* fue del 5 % y el del área *B* del 3 %. Si en *A* trabaja el 60 % de la plantilla, y de la empresa se elige un trabajador al azar, calcula la probabilidad las siguientes probabilidades:

a) De que el trabajador haya estado de baja en algún momento del último año.

b) Sea del área *B*, si se sabe que estuvo de baja en algún momento del último año.



Sean los sucesos

A = "el trabajador es del área A

B = "el trabajador es del área B"

C = "el trabajador ha estado de baja en algún momento del último año"

Si se elige un trabajador al azar, se tiene que:
$P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$; $P(C \mid A) = 0,05$; $P(C \mid B) = 0,03$

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(A) \cdot P(C \mid A) + P(B) \cdot P(C \mid B) = 0,6 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,03 = 0,042$$

b) Mediante el teorema de Bayes:

$$P(B \mid C) = \frac{P(B) \cdot P(C \mid B)}{P(C)} = \frac{0,4 \cdot 0,03}{0,042} = 0,28571$$

110. Con el fin de estudiar la eficacia de un nuevo test en el diagnóstico de un tipo concreto de cáncer que afecta al 1,5 % de las personas de edad avanzada, se aplica a un grupo de enfermos que padece este tipo de cáncer y a otro grupo de personas sanas. En el primer caso el 88 % dio positivo en el test, mientras que en el segundo caso dio positivo el 3 %. Si se aplica el test a una persona de edad avanzada elegida al azar

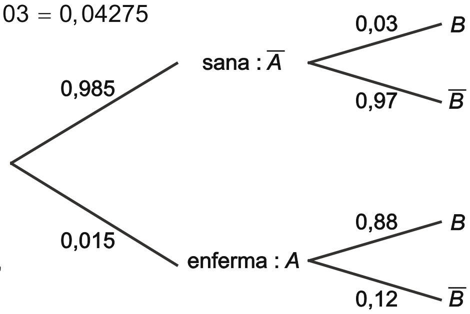
a) calcula la probabilidad de que el test de positivo.

b) si en una persona el test da positivo ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

c) calcula la probabilidad de acertar en el diagnóstico.

Seleccionada al azar una persona de edad avanzada, sean los sucesos
A = "está enferma" y B = "da positivo en el test" y sus contrarios $\overline{A}$ = "está sana" y $\overline{B}$ = "da negativo en el test".
$P(A) = 0,015$; $P(\overline{A}) = 0,985$; $P(B \mid A) = 0,88$; $P(\overline{B} \mid A) = 0,12$; $P(B \mid \overline{A}) = 0,03$; $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0,97$

a) Por el teorema de la probabilidad total:
$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) == 0,015 \cdot 0,88 + 0,985 \cdot 0,03 = 0,04275$



b) Utilizando el teorema de Bayes:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{0,015 \cdot 0,88}{0,04275} = 0,30877$$

c) El suceso C: "acertar en el diagnóstico" se puede escribir como unión de dos sucesos incompatibles:
$A \cap B$ = "la persona seleccionada está enferma y el test da positivo"
$\overline{A} \cap \overline{B}$ = "la persona está sana y el test da negativo"
$P(C) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0,015 \cdot 0,88 + 0,9875 \cdot 0,97 = 0,96875$

111. Un paciente acude a su médico al encontrarse enfermo desde hace varios días y tras haber estado en contacto con una persona a la que le ha sido diagnosticada tuberculosis. Después de un cuidadoso análisis preliminar, el médico duda al 50 % de si el paciente tendrá o no tuberculosis, por lo que le prescribe una prueba específica.

La prueba consiste en un análisis de sangre que da positivo si el paciente tiene la enfermedad en el 99 % de los casos y da negativo si el paciente no tiene la enfermedad en el 98 % de los casos. Si se sabe que la probabilidad de contagio de la tuberculosis es de un 50 % si se ha estado en contacto con una persona que ha desarrollado la enfermedad, calcula la probabilidad de que nuestro paciente:

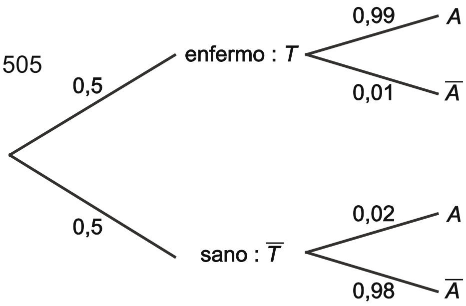
a) Dé positivo en el test.

b) No esté realmente enfermo de tuberculosis, si la el test da resultado positivo.

c) Esté realmente enfermo de tuberculosis, si el test da resultado negativo.

Sean los sucesos T = "el paciente tiene tuberculosis", A = "el test da resultado positivo" y sus respectivos contrarios, $\overline{T}$ = "el paciente no tiene tuberculosis", $\overline{A}$ = "el test da resultado negativo".

$P(T)=0,5$; $P(\overline{T})=0,5$; $P(A\mid T)=0,99$; $P(\overline{A}\mid T)=0,01$; $P(A\mid \overline{T})=0,02$; $P(\overline{A}\mid \overline{T})=0,98$



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(A)=P(T)\cdot P(A\mid T)+P(\overline{T})\cdot P(A\mid \overline{T})=0,5\cdot 0,99+0,5\cdot 0,02=0,505$$

b) La probabilidad de que no esté enfermo si el test da positivo es, por el teorema de Bayes:

$$P(\overline{T}\mid A)=\frac{P(\overline{T})\cdot P(A\mid \overline{T})}{P(A)}=\frac{0,5\cdot 0,02}{0,505}=0,0198$$

c) La probabilidad de que tenga tuberculosis si el test da negativo es, por el teorema de Bayes:

$$P(T\mid \overline{A})=\frac{P(T)\cdot P(\overline{A}\mid T)}{P(\overline{A})}=\frac{0,5\cdot 0,01}{(1-0,505)}=0,0101$$

112. Una empresa tiene actualmente dos negocios en marcha, *A* y *B*. El negocio *A* puede llegar a ser más rentable, pero en la cuarta parte de los balances tiene pérdidas. Por el contrario, el negocio *B* parece ser menos rentable pero sus pérdidas llegan solo al 7 % de los casos. En la actualidad, el conjunto de operaciones del negocio *B* es doble que en el negocio *A*.

De la empresa se elige al azar una operación que tiene pérdidas. Calcula la probabilidad de que sea de una operación del negocio *B*.

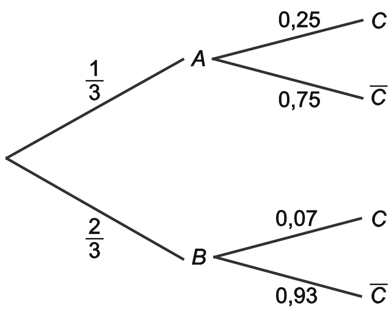
Sean los sucesos:

A = "la operación es del negocio A"

B = "la operación es del negocio B" y

C = "la operación tiene pérdidas"

Como dos de cada tres operaciones son del negocio B se tienen las siguientes probabilidades que se pueden representar en un diagrama de árbol:



$P(A)=\dfrac{1}{3}$; $P(B)=\dfrac{2}{3}$; $P(C\mid A)=0,25$;

$P(\overline{C}\mid A)=0,75$; $P(C\mid B)=0,07$; $P(\overline{C}\mid B)=0,93$

Se calcula la probabilidad de tener pérdidas aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(C)=P(A)\cdot P(C\mid A)+P(B)\cdot P(C\mid B)=\frac{1}{3}\cdot 0,25+\frac{2}{3}\cdot 0,07=0,13$$

Ahora, aplicando el teorema de Bayes, la probabilidad de que una operación con pérdidas sea de B es:

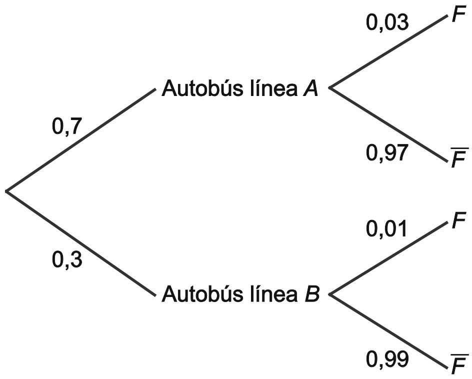
$$P(B\mid C)=\frac{P(B)\cdot P(C\mid B)}{P(C)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0,07}{0,13}=0,35897$$

113. Una empresa de transporte público de una determinada ciudad tiene adjudicado el servicio de dos líneas *A* y *B*. La empresa asigna el 70 % de sus autobuses a la línea *A* y el 30 % a la línea *B*. Por las características de los trayectos, el porcentaje diario de averías es el 3 % en la línea *A* y el 1 % en la *B*. Calcula la probabilidad de que, en un día elegido al azar,

a) Un autobús de esta empresa tenga una avería.

b) Si un autobús se ha averiado, sea de la línea *A*.

c) Si un autobús no se ha averiado, sea de la línea *B*.



Sean los sucesos:

A = "autobús de la línea A" y B = "autobús de la línea B"
F = "el autobús seleccionado tiene una avería";
$\overline{F}$ = "el autobús seleccionado no tiene avería"

Elegida una línea al azar se tiene que:

$P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,3$; $P(F \mid A) = 0,03$;

$P(\overline{F} \mid A) = 0,97$; $P(F \mid B) = 0,01$; $P(\overline{F} \mid B) = 0,99$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, se calcula la probabilidad de que el día elegido, un autobús de esta empresa tenga avería
$P(F) = P(A) \cdot P(F \mid A) + P(B) \cdot P(F \mid B) = 0,7 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,01 = 0,024$

b) Mediante el teorema de Bayes, se calcula la probabilidad de que, sabiendo que se ha producido una avería, el autobús averiado sea de la línea *A*.

$$P(A \mid F) = \frac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{P(F)} = \frac{0,7 \cdot 0,03}{0,024} = 0,875$$

c) Del mismo modo, mediante el teorema de Bayes, se calcula la probabilidad de que, sabiendo que no se ha producido una avería, el autobús sea de la línea *B*.

$$P(B \mid \overline{F}) = \frac{P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B)}{P(\overline{F})} = \frac{0,3 \cdot 0,99}{1 - 0,024} = 0,3043$$

114. El 40 % de la población activa de un cierto país son mujeres. Los datos de la encuesta de población activa señalan que el 30 % de las mujeres y 22 % de los hombres está en paro. Si se elige una persona al azar de la población activa de ese país, calcula la probabilidad de que:

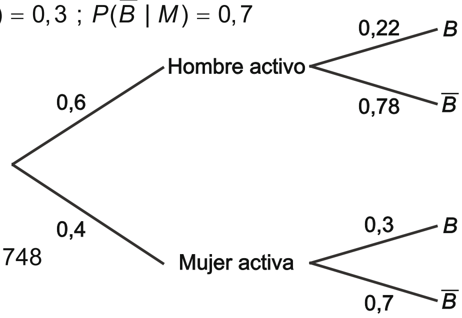
a) No tenga empleo y sea mujer.

b) Tenga empleo.

c) Sea hombre si se sabe que tiene empleo.

Sean los sucesos: H = "Hombre activo", M = "Mujer activa", B = "La persona seleccionada está en paro",
$\overline{B}$ = "La persona seleccionada tiene empleo"

Elegida una persona al azar se tiene que:
$P(H) = 0,6$; $P(M) = 0,4$; $P(B \mid H) = 0,22$; $P(\overline{B} \mid H) = 0,78$; $P(B \mid M) = 0,3$; $P(\overline{B} \mid M) = 0,7$



a) El suceso "que no tenga empleo y sea mujer" es el suceso $M \cap B$ cuya probabilidad es
$P(M \cap B) = P(M) \cdot P(B \mid M) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

b) Utilizando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga empleo es
$P(\overline{B}) = P(H) \cdot P(\overline{B} \mid H) + P(M) \cdot P(\overline{B} \mid M) = 0,6 \cdot 0,78 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,748$

c) Mediante el teorema de Bayes; la probabilidad de que la persona seleccionada sea hombre sabiendo que tiene empleo es:

$$P(H \mid \overline{B}) = \frac{P(H) \cdot P(\overline{B} \mid H)}{P(\overline{B})} = \frac{0,6 \cdot 0,78}{0,748} = 0,6257$$

115. En una determinada granja hay 200 patos de dos tipos: unos tienen el pico rojo y otros el pico amarillo. El 40 % son machos con el pico amarillo, el 20 % de todos los patos tienen el pico rojo, mientras que el 65 % de los patos que tienen el pico rojo son hembras. Elegido un pato al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea macho.

b) Sea macho y tenga el pico rojo.

c) Tenga el pico rojo sabiendo que ha sido hembra.

d) Sea hembra sabiendo que tiene el pico amarillo.

Sean los sucesos:

A = “pato con el pico amarillo”; R = “pato con el pico rojo”; M = “pato macho”; H= “pato hembra”

De los datos del enunciado se desprende que

$P(M \cap A) = 0,4$; $P(R) = 0,2$; $P(H \mid R) = 0,65 \Rightarrow P(M \mid R) = 1 - 0,65 = 0,35$

a) La probabilidad de que un pato sea macho y con el pico rojo es
$P(M \cap R) = P(R) \cdot P(M \mid R) = 0,2 \cdot 0,35 = 0,07$
Entonces, como se puede escribir $M = (M \cap R) \cup (M \cap A)$ como unión de sucesos incompatibles, la probabilidad de que el pato elegido al azar sea macho se obtiene
$P(M) = P(M \cap R) + P(M \cap A) = 0,4 + 0,07 = 0,47$

b) La probabilidad de que sea macho y con el pico rojo se ha calculado como parte del apartado anterior.

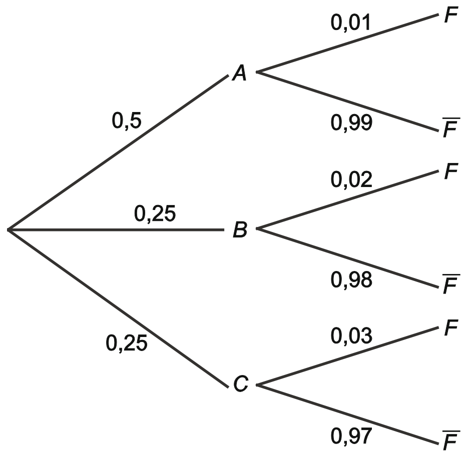
c) Mediante el teorema de Bayes, se obtiene $P(R \mid H) = \dfrac{P(R) \cdot P(H \mid R)}{P(H)} = \dfrac{0,2 \cdot 0,65}{1 - 0,47} = 0,2453$.

d) $P(H \mid A)1 - P(M \mid A) = 1 - \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = 1 - \dfrac{0,4}{0,8} = 0,5.$

116. En la sección de lácteos de un supermercado se venden al público yogures de tres clases *A*, *B* y *C*. La mitad son de la marca *A* y la otra mitad se la reparten por igual las marcas *B* y *C*. En 1 -% de los yogures de la marca *A*, el 2 % de la *B* y el 3 % de la *C* ha caducado. Un cliente elige un yogur al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) El yogur esté caducado.

b) Si se sabe que el yogur está caducado, sea de la marca *A*.



Sean los sucesos:

A =“yogur de la marca A”
B = “yogur de la marca B”
C = “yogur de la marca C”
F = “el yogur está caducado”
$\overline{F}$ = “el yogur no está caducado”

Elegido al azar un yogur, se tiene que:
$P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,25$; $P(C) = 0,25$;

$P(F \mid A) = 0,01$; $P(F \mid B) = 0,02$; $P(F \mid C) = 0,03$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, se calcula la probabilidad de que el yogur esté caducado.
$P(F) = P(A) \cdot P(F \mid A) + P(B) \cdot P(F \mid B) + P(C) \cdot P(F \mid C) = 0,5 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,03 = 0,0175$

b) Mediante el teorema de Bayes, sabiendo que el yogur está caducado, se calcula la probabilidad de que sea de la marca A.

$$P(A \mid F) = \frac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{P(F)} = \frac{0,5 \cdot 0,01}{0,0175} = 0,2857$$

117. La probabilidad de que en una central nuclear se produzca un incidente es 0,01. El 99% de los casos en que se produce un incidente suena la alarma, que con probabilidad 0,001 suena aunque no se haya producido incidente (falsa alarma). Elegido un día al azar, calcula la probabilidad de que:

a) No suene la alarma.

b) Suponiendo que la alarma haya sonado, no se haya producido ningún incidente.

Sean los sucesos:

I = "se ha producido un incidente" ; $\overline{I} = N$ = "no se ha producido un incidente";

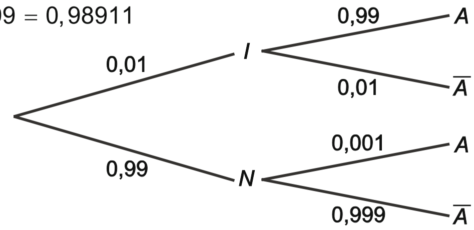
A = "suena la alarma"; $\overline{A}$ = "la alarma no suena".

Elegido un caso al azar, del enunciado se deduce que:

$P(I) = 0,01$; $P(N) = 0,99$; $P(A \mid I) = 0,99$; $P(\overline{A} \mid I) = 0,01$; $P(A \mid N) = 0,001$; $P(\overline{A} \mid N) = 0,999$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que en un día elegido al azar no suene la alarma es:

$P(\overline{A}) = P(I)\cdot P(\overline{A} \mid I) + P(N)\cdot P(\overline{A} \mid N) = 0,01\cdot 0,01 + 0,99\cdot 0,999 = 0,98911$



b) Mediante el teorema de Bayes, se calcula la probabilidad de que no se haya producido ningún incidente cuando haya sonado la alarma.

$$P(N \mid A) = \frac{P(N)\cdot P(A \mid N)}{P(A)} = \frac{0,99\cdot 0,001}{1-0,98911} = 0,09091$$

118. En una población el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. El 80 % de los hombres y el 20% de las mujeres son aficionados al fútbol. Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea aficionada al fútbol.

b) No sea aficionada al fútbol.

c) Sea hombre y no le guste el fútbol.

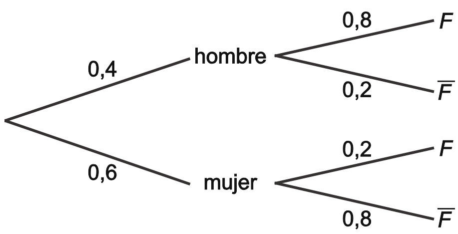
d) Sea mujer si se sabe que es aficionada al fútbol.

Si en la población, se selecciona una persona al azar, sean los sucesos:

H ="la persona seleccionada es hombre"; M = "la persona seleccionada es mujer"
F = "la persona es aficionada al fútbol", $\overline{F}$ = "la persona no es aficionada al fútbol"

De los porcentajes del enunciado, se deducen las probabilidades siguientes:

$P(H) = 0,4$; $P(M) = 0,6$; $P(F \mid H) = 0,8$; $P(\overline{F} \mid H) = 0,2$; $P(F \mid M) = 0,2$; $P(\overline{F} \mid M) = 0,8$



a) La probabilidad del suceso F se calcula utilizando el teorema de la probabilidad total:

$P(F) = P(H)\cdot P(F \mid H) + P(M)\cdot P(F \mid M) = 0,4\cdot 0,8 + 0,6\cdot 0,2 = 0,44$

b) La probabilidad de que no sea aficionada al fútbol es, por tanto, $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0,44 = 0,56$.

c) La probabilidad de que sea hombre y no le guste el fútbol es la probabilidad del suceso $H \cap \overline{F}$.

Es decir: $P(H \cap \overline{F}) = P(H)\cdot P(\overline{F} \mid H) = 0,4\cdot 0,2 = 0,08$

d) Mediante el teorema de Bayes se obtiene: $P(M \mid F) = \dfrac{P(M)\cdot P(F \mid M)}{P(F)} = \dfrac{0,6\cdot 0,2}{0,44} = 0,273$

119. En una localidad funcionan dos agencias de alquiler de coches. La agencia *A* controla el 60% del mercado local y la empresa *B* el resto. El 9 % de los coches de la agencia *A* y el 20 % de la empresa *B* necesitan revisión mecánica. Calcula la probabilidad de que un coche de alquiler elegido al azar

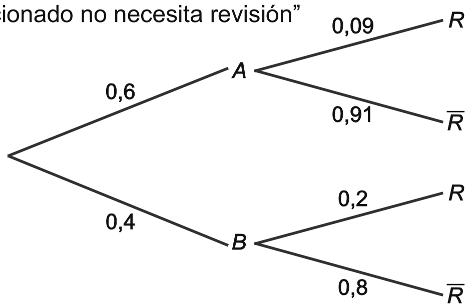
a) Necesite revisión mecánica.

b) Sea de la agencia *B* si se sabe que necesita revisión.

c) Sea de la agencia *A* si se sabe que no necesita revisión.

Sean los sucesos:

$A =$ "el coche seleccionado es de la agencia A"; $B =$ "el coche seleccionado es de la agencia B"
$R =$ "el coche seleccionado necesita revisión" ; $\overline{R}$ = "el coche seleccionado no necesita revisión"



Elegido un coche al azar se tiene que:
$P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$; $P(R \mid A) = 0,09$;

$P(\overline{R} \mid A) = 0,91$; $P(R \mid B) = 0,2$; $P(\overline{R} \mid B) = 0,8$

a) La probabilidad de que le coche seleccionado necesite revisión mecánica se calcula utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(A) \cdot P(R \mid A) + P(B) \cdot P(R \mid B) = 0,6 \cdot 0,09 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,134$$

b) Empleando el teorema de Bayes: $P(B \mid R) = \dfrac{P(B) \cdot P(R \mid B)}{P(R)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,2}{0,134} = 0,597$

c) Por último, A sabiendo que no necesita revisión es: $P(A \mid \overline{R}) = \dfrac{P(A) \cdot P(\overline{R} \mid A)}{P(\overline{R})} = \dfrac{0,6 \cdot 0,91}{1 - 0,134} = 0,63$.

120. Tras atracar un establecimiento, los asaltantes tienen solo dos posibles vías de escape: por la avenida principal o por las calles adyacentes. Con probabilidad 0,3 intentarán escapar por la avenida, en cuyo caso la policía los atrapará con probabilidad 0,9. Mientras que si huyen por las calles adyacentes la probabilidad de que consigan fugarse es de 0,25. Calcula la probabilidad de que:

a) Los ladrones consigan escapar.

b) Los ladrones eligieran la vía principal si es que consiguieron escapar.

c) Los ladrones eligieran las vías adyacentes para escapar, si se sabe que han sido alcanzados por la policía.

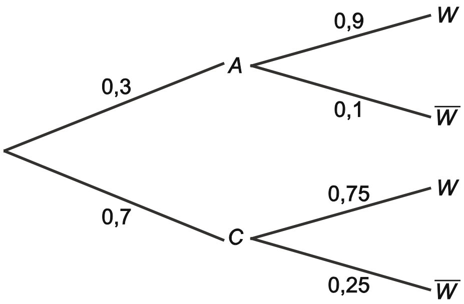
Sean los sucesos:

$A =$ "Los asaltantes huyen por la avenida principal"

$C =$ "Los asaltantes huyen por las calles adyacentes"

$W =$ "La policía atrapa a los asaltantes"

$\overline{W}$ = "la policía no detiene a los asaltantes"



Del enunciado se deduce que:
$P(A) = 0,3$; $P(C) = 0,7$; $P(W \mid A) = 0,9$;

$P(\overline{W} \mid A) = 0,1$; $P(W \mid C) = 0,75$; $P(\overline{W} \mid C) = 0,25$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, se calcula la probabilidad de que los ladrones consigan escapar:
$$P(\overline{W}) = P(A) \cdot P(\overline{W} \mid A) + P(C) \cdot P(\overline{W} \mid C) = 0,3 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,25 = 0,205$$

b) Mediante el teorema de Bayes, se calcula la probabilidad de que los ladrones huyan por la avenida principal, sabiendo que han conseguido escapar:
$$P(A \mid \overline{W}) = \frac{P(A) \cdot P(\overline{W} \mid A)}{P(\overline{W})} = \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,205} = 0,1463$$

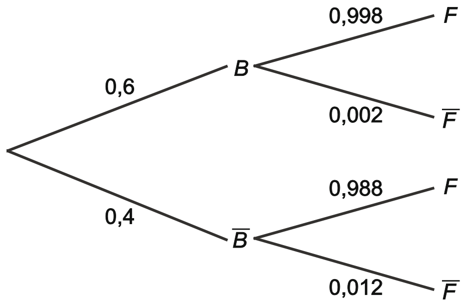
c) Por último: $P(C \mid W) = \dfrac{P(C) \cdot P(W \mid C)}{P(W)} = \dfrac{0,7 \cdot 0,75}{1 - 0,205} = 0,6604$

121. Con buen tiempo un avión tiene un aterrizaje feliz en el 99,8 % de los casos. Si el tiempo es malo, la probabilidad de accidente al aterrizar es 0,012. En una ciudad en la que el 60 % de los días hace buen tiempo, calcula la probabilidad de que en un día y un vuelo elegidos al azar:

a) Se produzca un accidente en el aterrizaje.

b) Que haga buen tiempo ese día si se ha producido un accidente al aterrizar.

Sean los sucesos:
B = "El tiempo es bueno" ; $\overline{B}$ = "el tiempo no es bueno";
F = "aterrizaje feliz" ; $\overline{F}$ = "ha ocurrido un accidente al aterrizar"



De los datos del enunciado se desprende que las probabilidades de los sucesos implicados son:

$P(B) = 0,6$; $P(\overline{B}) = 0,4$; $P(F \mid B) = 0,998$;

$P(\overline{F} \mid B) = 0,002$; $P(F \mid \overline{B}) = 0,988$; $P(\overline{F} \mid \overline{B}) = 0,012$

a) La probabilidad de que se produzca un accidente en el aterrizaje (aterrizaje no feliz), se calcula mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{F}) = P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(\overline{F} \mid \overline{B}) = 0,6 \cdot 0,002 + 0,4 \cdot 0,012 = 0,006$$

b) Por último, utilizando el teorema de Bayes se obtiene: $P(B \mid \overline{F}) = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B)}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,6 \cdot 0,002}{0,006} = 0,2$

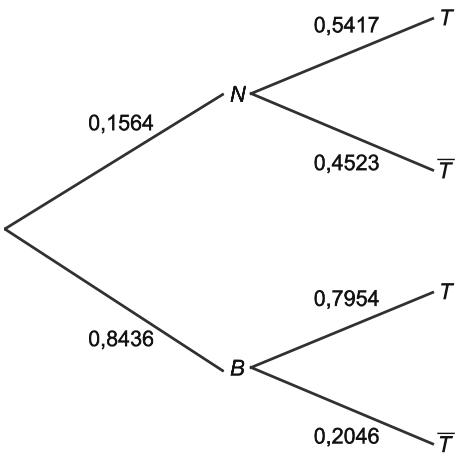
122. En un juicio por discriminación racial en unos exámenes para promoción interna de una institución, de las 307 personas que se presentaron al test 48 eran personas de raza negra (N) y el resto blancos (*B*). De las personas de raza negra, 26 aprobaron el test, mientras que de los de raza blanca aprobaron 206. ¿En qué cálculos debe basarse el jurado para emitir sentencia favorable o desfavorable a la demanda por discriminación racial? ¿Hubo realmente discriminación en este caso?

Sean los sucesos N = "persona de raza negra"; B= "persona de raza blanca"
T = "aprobar el test"; $\overline{T}$ = "no aprobar el test"
Las probabilidades de los diferentes sucesos, estimadas mediante las frecuencias observadas, son:

$P(N) = \dfrac{48}{307} = 0,1564$; $P(B) = \dfrac{259}{307} = 0,8436$;

$P(T \mid N) = \dfrac{26}{48} = 0,5417$; $P(\overline{T} \mid B) = \dfrac{22}{48} = 0,4523$;

$P(T \mid B) = \dfrac{206}{259} = 0,7954$; $P(\overline{T} \mid B) = \dfrac{53}{259} = 0,2046$



Dado que la probabilidad de aprobar el test es mayor para los blancos que para las personas de raza negra:

$$P(T \mid B) = 0,7954 > P(T \mid N) = 0,5417 ,$$

se puede concluir que sí pudo haber discriminación racial.

Otra forma de llegar a la misma conclusión sería comparar la probabilidad de ser de raza negra entre los candidatos presentados a la prueba, con la probabilidad de ser de la misma raza si se ha aprobado el test.

$$P(N \mid T) = \frac{P(N)P(T \mid N)}{P(T)} = \frac{0,1564 \cdot 0,5417}{0,1564 \cdot 0,5417 + 0,8436 \cdot 0,7954} = 0,1121 < P(N) = 0,1564$$

Verificándose también en este caso que la probabilidad de ser de raza negra habiendo aprobado es claramente inferior a la proporción de personas de raza negra entre los aspirantes.

ENTORNO MATEMÁTICO

Un problema de contaminación. Ojo con las probabilidades a priori (iniciales).

Como cada año en verano Andrea pasa unos días en el pequeño pueblo del que son sus padres. Este año, nada más llegar, se entera de que hay problemas con la contaminación del agua por arsénico en toda la zona aunque el alcalde presume de que el agua de su pueblo procede de un magnífico manantial y de que la posibilidad de que esté contaminada es solo 1 entre 100.

Andrea, que ha estudiado probabilidad, pregunta a Ventura, farmacéutico "de toda la vida", que se encarga de realizar el test, cuál es la probabilidad de que este dé positivo (agua contaminada) aún cuando realmente el agua no lo esté. La respuesta es que según las especificaciones de la prueba, el 5 % de las veces el test da un falso positivo, pero que, argumenta el farmacéutico, el 99 % de las veces que el agua está contaminada el test da positivo.

Realizada la prueba del agua, con gran expectación, esta da positivo. En el pueblo cunde el desánimo, hasta que Andrea, con unos cálculos sencillos muestra que la probabilidad de que el agua esté contaminada es apenas un poco más del 15% y, que para asegurarse realmente hay que volverla a repetir.

¿En qué se basa Andrea para realizar esta afirmación? ¿Dónde está realmente el problema?

Si se repite el test ¿Qué probabilidades habría que tomar como iniciales?

Consideremos los siguientes sucesos: $C=$"el agua está contaminada"; $T=$ "el test da positivo"
y sus contrarios, $\overline{C} =$ "el agua no está contaminada" y $\overline{T} =$ "el test da negativo".

Según la información que proporciona el alcalde: $P(C)=0,01$; $P(\overline{C})=0,99$

El 5 % de las veces el test da un falso positivo, es decir, aunque el agua no esté contaminada, el test da positivo, y por tanto el 95 % de las veces el test da negativo cuando el agua no está contaminada. Luego:

$$P(T \mid \overline{C})=0,05 \quad ; \quad P(\overline{T} \mid \overline{C})=0,95$$

Por otro lado, el 99 % de las veces que el agua está contaminada el test da positivo y, por tanto, el 1 % el test da negativo cuando el agua está realmente contaminada. Es decir,

$$P(T \mid C)=0,99 \quad ; \quad P(\overline{T} \mid C)=0,01$$

La probabilidad de que el test dé positivo viene dada por el teorema de la probabilidad total:

$$P(T)=P(C)\cdot P(T \mid C)+P(\overline{C})\cdot P(T \mid \overline{C})=0,01\cdot 0,99+0,99\cdot 0,05=0,0594$$

Si efectuado un test al agua, este da positivo, la probabilidad final de que el agua esté contaminada se calcula utilizando el teorema de Bayes, esto es:

$$P(C \mid T)=\frac{P(C)\cdot P(T \mid C)}{P(T)}=\frac{0,01\cdot 0,99}{0,0594}=0,1667$$

De modo que, la afirmación de Andrea se basa en la probabilidad final calculada por el teorema de Bayes de que el agua esté realmente contaminada, que es $P(C \mid T)=0,1667$ (algo más del 15%).

El problema real se encuentra en las probabilidades iniciales, facilitadas por el alcalde. En efecto, ya que si ahora se repitiese el test, tomando como probabilidades iniciales las probabilidades finales del primer test, resultaría:

$$P(C)=0,1667 \quad ; \quad P(\overline{C})=0,8333$$

En cuyo caso, la probabilidad de que el test de negativo en este segundo intento es:

$$P(\overline{T})=P(C)\cdot P(\overline{T} \mid C)+P(\overline{C})\cdot P(\overline{T} \mid \overline{C})=0,1667\cdot 0,01+0,8333\cdot 0,95=0,7933$$

Y, por tanto, la probabilidad de que el agua esté contaminada si este segundo test ha dado negativo es:

$$P(C \mid \overline{T})=\frac{P(C)\cdot P(\overline{T} \mid C)}{P(\overline{T})}=\frac{0,1667\cdot 0,01}{0,7933}=0,0021$$

Es decir, se puede afirmar que el agua no está contaminada.

En cambio, la probabilidad de que el test de positivo en este segundo intento es:

$$P(T)=P(C)\cdot P(T \mid C)+P(\overline{C})\cdot P(T \mid \overline{C})=0,1667\cdot 0,99+0,8333\cdot 0,05=0,2067$$

Y la probabilidad de que el agua esté contaminada si el segundo test ha dado positivo es:

$$P(C \mid T)=\frac{P(C)\cdot P(T \mid C)}{P(T)}=\frac{0,1667\cdot 0,99}{0,2067}=0,7984$$

Lo que quiere decir que si este segundo test da positivo, la probabilidad de que el agua esté contaminada es alta, casi un 80 %.

¿Tienes coche? Si eres joven y varón pagas más seguro.

Marcos está a punto de cumplir 21 años y sus padres van a regalarle su primer coche, con la condición de que el seguro lo tiene que pagar él cada año. Por eso ha estado investigando en las distintas compañías, y esto es lo que ha descubierto:

- **Además del tipo de póliza y del valor del vehículo, la edad, el sexo, el estado civil del conductor y su historial (si está convicto por accidente de tráfico) son variables que las compañías de seguros utilizan para determinar la prima que una persona debe pagar por el seguro de su vehículo.**
- **A igualdad de las otras condiciones, los jóvenes de 25 o menos años pagan más por las primas de seguros y, entre estos los hombres pagan más que las mujeres.**

Marcos, completamente indignado, quiere indagar la causa de esta aparente "injusticia". Tras varias incursiones por internet averigua que de la población de personas de 25 años o menos con permiso de conducir, el 51 % son hombres y el 49 % mujeres. Y que la tasa de accidentes en este colectivo es 0,006.

Además ha conseguido averiguar que, entre los jóvenes de 25 o menos años, en el 70% de los casos de accidente está involucrado un hombre y en el 30% una mujer.

Los datos se recogen en la tabla, donde:

$$\boldsymbol{P(\text{Accidente} \cap \text{Mujer}) = P(\text{Accidente}) \cdot P(\text{Mujer} \mid \text{Accidente}) = 0,006 \cdot 0,30 = 0,0018}$$

	Accidente	No accidente	
Hombre			0,51
Mujer	0,0018		
	0,006		1

Con estos datos, ¿es posible dar una explicación al hecho de que las compañías de seguros cobren más a los jóvenes varones que a las mujeres? ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un accidente un hombre joven? ¿Y una mujer joven? Compáralos

En primer lugar, una vez calculada la probabilidad del suceso "Tener un accidente y ser mujer" completamos la tabla de contingencia, con las siguientes probabilidades:

	Accidente	No accidente	
Hombre	0,0042	0,5058	0,51
Mujer	0,0018	0,4882	0,49
	0,006	0,994	1

Es decir, como:

$$P(\text{Accidente}) = 0,006 \quad ; \quad P(\text{Hombre|accidente}) = 0,7 \quad ; \quad P(\text{Mujer} \mid \text{Accidente}) = 0,30$$

Se tiene que:

$$P(\text{Accidente} \cap \text{Hombre}) = P(\text{Accidente}) \cdot P(\text{Hombre} \mid \text{Accidente}) = 0,006 \cdot 0,70 = 0,0042$$

Con estas dos probabilidades, ya se observa que es menos probable encontrase una mujer involucrada en un accidente que un hombre. Sin embargo la relación definitiva la proporciona el cociente de probabilidades finales y para ello:

$$P(\text{Accidente} \mid \text{Hombre}) = \frac{P(\text{Accidente} \cap \text{Hombre})}{P(\text{Hombre})} = \frac{0,0042}{0,51} = 0,00824$$

$$P(\text{Accidente} \mid \text{Mujer}) = \frac{P(\text{Accidente} \cap \text{Mujer})}{P(\text{Mujer})} = \frac{0,0018}{0,49} = 0,00367$$

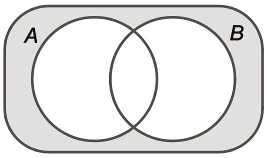
de donde: $\dfrac{P(\text{Accidente} \mid \text{Hombre})}{P(\text{Accidente} \mid \text{Mujer})} = \dfrac{0,00824}{0,00367} = 2,242$

Con lo que es casi dos veces y cuarto más probable que se produzca un accidente cuando el que conduce es un hombre, por lo que las compañías tienden a aplicar primas de seguro más altas a los hombres jóvenes que a las mujeres jóvenes.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Escribe, mediante operaciones con sucesos, la parte coloreada del siguiente diagrama de Venn.



La zona coloreada es el contrario de la unión de los sucesos A y B, esto es $\overline{A \cup B}$

2. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio E tales que:

$$P(A \cup B) = 0,7, P(A - B) = 0,3 \text{ y } P(B - A) = 0,2.$$

a) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos y la de su intersección.

b) Los sucesos A y B ¿son independientes?

a) Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$; $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow 0,7 = P(A) + 0,2 \Rightarrow P(A) = 0,5$,

y de ahí $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,3 = 0,5 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,2$.

Por tanto: $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B) = 0,2 + 0,2 = 0,4$

b) Los sucesos A y B son independientes ya que $P(A \cap B) = 0,2 = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$

3. Una bolsa contiene 5 bolas blancas y 3 verdes. De la bolsa se extraen dos bolas. Calcula la probabilidad de que sean una de cada color si:

a) La extracción es una a una sin reemplazamiento.

b) Las dos bolas se extraen simultáneamente.

a) Sea el suceso A: "obtener una bola de cada color". En ambos casos se considera que los resultados posibles son equiprobables y se utiliza la regla de Laplace.

Si la extracción se realiza una a una sin reemplazamiento, el suceso A se puede poner como unión de dos sucesos incompatibles:

A_{BV} = "la primera es blanca y la segunda verde" ; A_{VB} = "la primera es verde y la segunda blanca"

$$P(A_{BV}) = P(1^{\text{a}} \text{ blanca}) \cdot P(2^{\text{a}} \text{ verde} \mid 1^{\text{a}} \text{ blanca}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

$$P(A_{VB}) = P(1^{\text{a}} \text{ verde}) \cdot P(2^{\text{a}} \text{ blanca} \mid 1^{\text{a}} \text{ verde}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

Por lo que: $P(A) = P(A_{VB}) + P(A_{BV}) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

b) Si la extracción de las dos bolas se realiza simultáneamente tenemos exactamente la misma situación anterior pero lo podemos plantear de otro modo, el número de resultados posibles equiprobables al extraer dos bolas de una bolsa que contiene 8 bolas es: $C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$.

El número de resultados favorables al suceso A, es: $C_{5,1} \cdot C_{3,1} = \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} = 5 \cdot 3 = 15$. $P(A) = \frac{15}{28}$

4. Una entidad bancaria dispone de dos sistemas de alarma independientes. El sistema *A* se dispara en el 90% de las veces de intento de atraco; mientras que el sistema *B* lo hace en el 85%. Si se produce un atraco calcula la probabilidad de que:

a) Funcionen los dos sistemas.

b) Funcione solo el sistema *A*.

c) Funcione al menos uno de los dos sistemas.

Sean los sucesos: *A*: “funcione el sistema *A*”; *B*: “funcione el sistema *B*”

a) El suceso “que funcionen los dos sistemas” es la intersección de ambos y como se tiene que :

$P(A) = 0,9$; $P(B) = 0,85$ podemos deducir que $P(A \cap B) = 0,9 \cdot 0,85 = 0,765$ por ser independientes.

b) El suceso “funcione solo el sistema *A*”, es el suceso $A \cap \overline{B} = A - B$ cuya probabilidad se puede calcular de dos formas (al menos):

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,9 - 0,765 = 0,135$$

o bien, puesto que los sucesos A y $\overline{B}$ también son independientes.

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0,9 \cdot 0,15 = 0,135$$

c) El suceso “funcione al menos uno de los dos sistemas” es el suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9 + 0,85 - 0,765 = 0,985$$

5. De un grupo de 100 estudiantes, 80 estudian inglés, 30 francés y 15 ambos idiomas. Del grupo se selecciona un estudiante al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que no estudie ninguno de los dos idiomas?

Considera los sucesos: I = “estudia inglés”, F= “estudia francés”

De las frecuencias observadas, se puede inferir que las probabilidades de los sucesos son:

$$P(I) = 0,8 \quad ; \quad P(F) = 0,3 \quad ; \quad P(I \cap F) = 0,15$$

El suceso “no estudie ninguno de los dos idiomas” se puede escribir $\overline{I} \cap \overline{F} = \overline{I \cup F}$, luego:

$$P\left(\overline{I} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{I \cup F}\right) = 1 - P(I \cup F) = 1- = 1 - (0,8 + 0,3 - 0,15) = 1 - 0,95 = 0,05$$

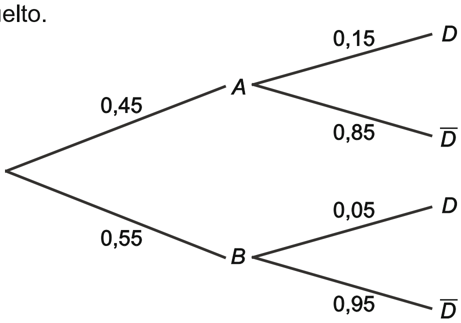
6. Una empresa comercializa dos productos *A* y *B*. El 45 % de sus ventas corresponde al producto *A* y el resto al *B*. El 15 % de las ventas correspondientes al producto *A* es objeto de devolución; mientras que ese porcentaje es solo el 5 % de las ventas de *B*. Un cliente compra un artículo de esta empresa. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea devuelto.

b) Sea de la clase *B* si se sabe que el artículo comprado ha sido devuelto.

Una vez comprado un artículo, sean los sucesos:
A = “el artículo es del tipo *A*”, B = “el artículo es del tipo *B*”
D = “el artículos se devuelve”, $\overline{D}$ = “el artículo no es devuelto”

Del enunciado, se tienen las siguientes probabilidades:



$P(A) = 0,45$; $P(B) = 0,55$; $P(D \mid A) = 0,15$;

$P(\overline{D} \mid A) = 0,85$; $P(D \mid B) = 0,05$; $P(\overline{D} \mid B) = 0,95$

a) La probabilidad de que el artículo sea devuelto se calcula utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) = 0,45 \cdot 0,15 + 0,55 \cdot 0,05 = 0,095$$

b) Si se sabe que el artículo ha sido devuelto, la probabilidad de que sea de la clase *B* se calcula mediante el teorema de Bayes:

$$P(B \mid D) = \frac{P(B) \cdot P(D \mid B)}{P(D)} = \frac{0,55 \cdot 0,05}{0,095} = 0,2895$$

7. Una ferretería tiene en su almacén bombillas de bajo consumo: 500 bombillas de 20 W, 300 de 15 W y 200 de 12 W. Los controles de calidad realizados por la empresa que fabrica las bombillas han permitido determinar las probabilidades de fallo de cada tipo de producto durante la primera hora de encendido, siendo 0,03 para las bombillas de 20 W, de 0,02, para las de 15 W y de 0,01 para las bombillas de 12 W.

c) Si se elige al azar una bombilla del almacén, ¿cuál es la probabilidad de que se produzca un fallo durante la primera hora de encendido?

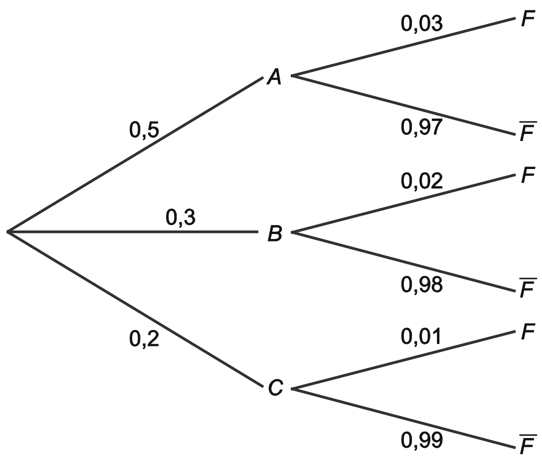
d) Se somete al control de calidad una bombilla del almacén elegida al azar y falla en su primera hora de encendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bombilla de 20 W?

Elegida una bombilla, sean los sucesos:
A = "Es de 20 W", B = "es de 15 W", C= "es de 12 W"
F= "la bombilla falla en la primera hora de encendido", $\overline{F}$ = "la bombilla no falla en la primera hora de encendido"

Del enunciado, se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = \frac{500}{1000} = 0,5 \quad ; \quad P(B) = \frac{300}{1000} = 0,3 \quad ; \quad P(C) = \frac{200}{1000} = 0,2 \quad ;$$

$$P(F \mid A) = 0,03 \quad ; \quad P(F \mid B) = 0,02 \quad ; \quad P(F \mid C) = 0,01$$



a) La probabilidad de que la bombilla falle se calcula utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(F) = P(A) \cdot P(F \mid A) + P(B) \cdot P(F \mid B) + P(C) \cdot P(F \mid C) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,01 = 0,023$$

b) Si se sabe que la bombilla ha fallado, la probabilidad de que sea de 20 W se calcula mediante el teorema de Bayes:

$$P(A \mid D) = \frac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{P(F)} = \frac{0,5 \cdot 0,03}{0,023} = 0,6522$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Sean *A* y *B* sucesos incompatibles asociados a un espacio muestral *E*. Entonces, $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son incompatibles:**

   A. En cualquier caso.

   B. Nunca.

   C. Solo si *A* y *B* son independientes.

   D. Si *A* es el contrario de *B*.

   Solución: D

2. **Dos sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio son independientes si:**

   A. Cuando ocurre, por ejemplo, *A* entonces *B* no ocurre.

   B. Cuando uno de ellos ocurre, el otro ya no puede ocurrir.

   C. *A* y *B* tienen la misma probabilidad.

   D. La probabilidad de *A*, por ejemplo, no se ve modificada por el hecho de que *B* ocurra.

   Solución: D.

3. **Si *A* y *B* son dos sucesos asociados a un espacio muestral *E*, con $P(A \cup \overline{B}) = P(A)$ y $P(B) > 0$, entonces:**

   A. Siempre que ocurre *A*, ocurre *B*.

   B. Los sucesos son incompatibles.

   C. Los sucesos *A* y *B* son independientes.

   D. Ninguna de las anteriores es cierta.

   Solución: D.

Señala en cada caso las respuestas correctas

4. **Sean *A* y *B* sucesos asociados a un experimento, con $P(A) = 0$ entonces:**

   A. $P(A \cup B) = P(B)$

   B. $P(A \cap B) = 0$

   C. El suceso *B* contiene al *A*.

   D. *A* y *B* son independientes.

   Soluciones: Todas son correctas.

5. **Si *A* y *B* son dos sucesos asociados a un espacio muestral *E*, y $P(A \mid B) = 0$ entonces:**

   A. $P(A - B) = P(B)$

   B. $P(\overline{A} \mid B) = 1$

   C. *A* y *B* son independientes.

   D. *A* y *B* son incompatibles.

   Soluciones: B y D.

Señala el dato innecesario para contestar

6. **De los sucesos *A, B* y *C* se sabe que *A* y *B* son independientes. Para calcular la probabilidad de la unión de los tres se necesita:**

   A. $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$

   B. $P(C \mid A \cap B)$

   C. $P(A \mid B)$, $P(B \mid C)$

   D. $P(A \cap C)$ y $P(B \cap C)$

   Solución: D, que se obtiene de A y D.

7. **Si *A*, *B* y *C* forman una partición del espacio muestral *E*, y *H* es un suceso cualquiera, para calcular $P(B \mid H)$ se precisa:**

   A. $P(H \mid A)$ y $P(H \mid C)$

   B. $P(A \cup B)$ y $P(B \cup C)$

   C. $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$

   D. $P(H \mid B)$

   Solución: B y C se deducen una de la otra.