13 Probabilidad

ANALIZA Y CALCULA

¿Crees que merece la pena aplicar razonamientos matemáticos en los juegos de azar o piensas que al final el azar decide por su cuenta?

Respuesta libre.

En la cita Jakob Bernoulli vincula la probabilidad a la toma de decisiones, ¿por qué?

Jakob Bernoulli dice que se deben medir las probabilidades de las cosas, para que en nuestras acciones podamos elegir lo más satisfactorio y razonable.

¿A qué se refiere cuando habla de la sabiduría del filósofo y la prudencia del político?

Jakob Bernoulli, en su obra, pretende desarrollar una teoría estudiada por los filósofos para la toma de decisiones prudentes y razonables en temas políticos.

¿Piensas que el conocimiento de las leyes del azar nos ayuda en nuestra vida cotidiana? Pon algún ejemplo.

Respuesta libre.

REFLEXIONA Y SACA CONCLUSIONES

En la pregunta del texto, ¿qué opción elegirías? ¿Por qué?

Es más ventajoso apostar por sacar un seis en cuatro tiradas de un dado.

¿Por qué crees que matemáticos tan notables dedicaban su tiempo y sus esfuerzos en resolver problemas relacionados con juegos de azar?

Respuesta libre.

Actividades propuestas

1. Se lanza una moneda tres veces.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Describe dos sucesos elementales y uno compuesto.

c) Escribe el suceso S = "salir una cara" y el suceso contrario $\overline{S}$.

a) $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX\}$

b) Sucesos elementales, por ejemplo, A = "sacar tres caras" = $\{CCC\}$ y B = "sacar tres cruces" = $\{XXX\}$.

Suceso compuesto, por ejemplo, C = "sacar una cara" = $\{XXC, XCX, CXX\}$

c) $S = \{XXC, XCX, CXX\}$ y $\overline{S} = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXX\}$

2. Se extraen tres bolas de una urna con 5 bolas rojas y 5 bolas blancas.

a) Describe dos sucesos elementales y uno compuesto.

b) Escribe el suceso contrario de S = "sacar dos bolas blancas y una roja".

a) Sucesos elementales, por ejemplo, A = "sacar tres bolas blancas" = $\{BBB\}$ y B = "sacar tres rojas" = $\{RRR\}$

Suceso compuesto, por ejemplo, C = "sacar dos bolas rojas y una blanca" = $\{RRB, RBR, BRR\}$.

b) $\overline{S} = \{RRR, RRB, RBR, BRR, BBB\}$

3. **En el experimento consistente en extraer una carta de una baraja española de 40 naipes, describe los elementos de los sucesos:**

a) ***A* = "sacar un oro"** **c)** ***C* ="sacar una figura"**

b) ***B* = "sacar un rey"** **d)** $A \cup B$ **y** $B \cup C$

a) A = {as de oros, dos de oros, tres de oros, cuatro de oros, cinco de oros, seis de oros, siete de oros, sota de oros, caballo de oros, rey de oros}.

b) B = {rey de oros, rey de copas, rey de espadas, rey de bastos}.

c) C = {sota de oros, caballo de oros, rey de oros, sota de copas, caballo de copas, rey de copas, sota de espadas, caballo de espadas, rey de espadas, sota de bastos, caballo de bastos, rey de bastos}.

d) $A \cup B$ = "sacar oro o rey" = {as de oros, dos de oros, tres de oros, cuatro de oros, cinco de oros, seis de oros, siete de oros, sota de oros, caballo de oros, rey de oros, rey de copas, rey de espadas, rey de bastos}.

$B \cup C$ = "sacar rey o figura" = C = {sota de oros, caballo de oros, rey de oros, sota de copas, caballo de copas, rey de copas, sota de espadas, caballo de espadas, rey de espadas, sota de bastos, caballo de bastos, rey de bastos}.

4. **Se extrae una bola de un bombo que contiene 10 bolas numeradas de 0 a 9. Se consideran los sucesos *A* = "sacar un número par", *B*= "sacar un múltiplo de tres". Calcula:**

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$

a) $A \cup B$ = "sacar un número par o múltiplo de tres" = {0, 2, 3, 4, 6, 8, 9}.

b) $A \cap B$ = "sacar un número par y múltiplo de tres" = {0, 6}.

c) $A - B = A \cap \overline{B}$ = "sacar un número par no múltiplo de tres" = {2, 4, 8}.

5. **En una bolsa hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules. Si se saca al azar una bola de la bolsa, halla las siguientes probabilidades.**

a) **Que la bola sea verde.**

b) **Que la bola no sea roja.**

c) **Que la bola sea verde o azul.**

d) **Que la bola no sea roja ni azul.**

a) $P(\text{bola verde}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{bola no roja}) = \frac{5}{9}$

c) $P(\text{bola verde o azul}) = \frac{5}{9}$

d) $P(\text{bola no roja ni azul}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

6. **Se elige un número al azar entre 1 y 50. Calcular la probabilidad de que:**

a) **Sea un múltiplo de 4.**

b) **Sea múltiplo de 6.**

c) **Sea múltiplo de 6 y de 4.**

d) **Sea múltiplo de 6 o de 4.**

a) $P(\text{múltiplo de 4}) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$

b) $P(\text{múltiplo de 6}) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$

c) $P(\text{múltiplo de 6 y 4}) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

d) $P(\text{múltiplo de 6 o de 4}) = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$

7. **Se lanzan un dado blanco y otro rojo y se consideran los sucesos *A* = "la suma de los puntos es 6", *B* = "sacar los mismos puntos en los dos dados" y *C* = "sacar más de 3 en el dado rojo". Calcula las probabilidades de los sucesos:**

a) ***A*, *B* y *C*** **b)** $\overline{B}$ **c)** $A \cap C$ **y** $A \cup C$ **d)** $\overline{A \cap B}$

a) $P(A) = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ y $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

b) $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

c) $P(A \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ y $P(A \cup C) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

d) $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

8. Si *A* y *B* son dos sucesos de un mismo experimento y sabemos que *P*(*A*) = 0,6, *P*(*B*) = 0,3 y *P*(*A* ∪ *B*) = 0,7. ¿Son *A* y *B* sucesos incompatibles? Calcula la probabilidad de *A* ∩ *B*.

Los sucesos *A* y *B* no son incompatibles porque $P(A \cup B) = 0{,}7 \neq P(A) + P(B) = 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9$.

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}7 = 0{,}2$.

9. De una baraja de 40 cartas se extraen simultáneamente dos cartas (equivale a no reponer la primera). Halla las probabilidades de que:

a) Las dos sean copas.

b) Al menos una sea copas.

Consideramos los sucesos *A* = “sacar copa en la primera extracción” y *B* = “sacar copas en la segunda extracción”:

a) $P(A \cap B) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{90}{1560} = \frac{3}{52}$

b) $P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = 1 - \frac{870}{1560} = 1 - \frac{29}{52} = \frac{23}{52}$

10. Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 azules. Se extraen dos bolas sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color si devolvemos la primera bola a la bolsa? ¿Y si no lo hacemos?

Consideramos los sucesos *B* = “sacar bola blanca”, *R* = “sacar bola roja” y *A* = “sacar bola azul”.

Con devolución: $P(\text{igual color}) = P(1^{a}B\ 2^{a}B) + P(1^{a}R\ 2^{a}R) + P(1^{a}A\ 2^{a}A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$

Sin devolución: $P(\text{igual color}) = P(1^{a}B\ 2^{a}B) + P(1^{a}R\ 2^{a}R) + P(1^{a}A\ 2^{a}A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$

11. En una clase hay 12 chicas y 16 chicos. Si se eligen 2 alumnos al azar, calcula la probabilidad en cada caso.

a) Que sean los dos chicos.

b) Que sean exactamente un chico y una chica.

c) Que haya al menos una chica.

d) Que no haya ningún chico.

Consideramos los sucesos *O* = “sea chico” y *A* = “sea chica”.

a) $P(OO) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} = \frac{240}{756} = \frac{20}{63}$

b) $P(OA) = \frac{16}{28} \cdot \frac{12}{27} + \frac{12}{28} \cdot \frac{16}{27} = \frac{384}{756} = \frac{32}{63}$

c) $P(\text{al menos una chica}) = 1 - P(\text{ninguna chica}) = 1 - P(OO) = 1 - \frac{20}{63} = \frac{43}{63}$

d) $P(\text{ningún chico}) = P(AA) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} = \frac{132}{756} = \frac{11}{63}$

12. Un alumno ha estudiado 10 de los 15 temas de un examen. El profesor preselecciona dos temas y deja que el alumno escoja uno de los dos. Halla la probabilidad de que el alumno pueda elegir uno de los temas estudiados.

Casos posibles.

El profesor puede preseleccionar dos temas cualesquiera de los 15. Por tanto, puede escoger los temas de $C_{15,2} = 105$ formas distintas.

Casos favorables.

El alumno se ha estudiado uno de los dos temas preseleccionados

Para que el alumno pueda escoger uno de los dos temas propuestos, de los 10 que se ha estudiado, el profesor habrá preseleccionado uno y, de los 5 temas que no se ha estudiado, el profesor habrá preseleccionado otro. Entonces, existen $C_{10,1} \cdot C_{5,1} = 10 \cdot 5 = 50$ casos en los que el alumno se sabe uno de los dos temas preseleccionados.

El alumno se ha estudiado los dos temas preseleccionados

Para que el alumno pueda escoger cualquiera de los dos temas propuestos, el profesor habrá preseleccionado dos de los 10 que se ha estudiado. Entonces, existen $C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ casos en los que el alumno se sabe los dos temas preseleccionados.

Por tanto, P("el alumno puede elegir uno de los temas preseleccionados") = P("el alumno puede elegir uno de los dos temas preseleccionados") + P("el alumno puede elegir cualquiera de los dos temas preseleccionados") =

$$= \frac{50}{105} + \frac{45}{105} = \frac{10}{21} + \frac{9}{21} = \frac{19}{21}.$$

13. En una ciudad el 25 % de las mujeres y el 40 % de los hombres usan gafas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, sea mujer y use gafas.

	Gafas	No gafas	Total
Mujer	25	75	100
Hombre	40	60	100
Total	65	135	200

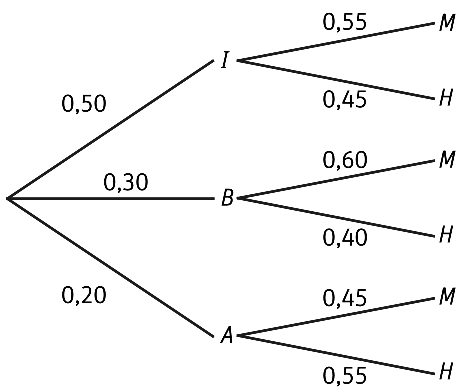
$P(\text{mujer con gafas}) = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$

14. En una academia de inglés se imparten clases de tres niveles: inicial, básico y avanzado.

- **En el nivel inicial están el 50 % de los inscritos, en el básico, el 30 %, y en el avanzado, el 20 %.**
- **En el nivel inicial hay un 55 % de mujeres, en el nivel básico, un 60 %, y en el avanzado, un 45 %.**

a) Se elige al azar una persona inscrita. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre y esté en el nivel básico?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer?



Definimos los sucesos:

I = "estar inscrito en el nivel inicial"

B = "estar inscrito en el nivel básico"

A = "estar inscrito en el nivel avanzado"

H = "ser hombre"

M = "ser mujer".

a) $P(B \cap H) = P(B) \cdot P(H / B) = 0{,}30 \cdot 0{,}40 = 0{,}12$

b) $P(M) = P(I) \cdot P(M / I) + P(B) \cdot P(M / B) + P(A) \cdot P(M / A) =$

$= 0{,}50 \cdot 0{,}55 + 0{,}30 \cdot 0{,}60 + 0{,}20 \cdot 0{,}45 = 0{,}545$

15. Una industria fabrica dos tipos de tornillos *A* y *B*.

- **Produce al día 600 del tipo *A* y 800 del tipo *B*.**
- **El 4 % de los del tipo *A* y el 5 % de los del *B* salen defectuosos.**

Si se selecciona un tornillo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

Hay 4 % de 600 = 24 tornillos defectuosos del tipo *A* y 5 % de 800 = 40 tornillos defectuosos del tipo *B*.

En total se producen 600 + 800 = 1400 tornillos, de los cuales 24 + 40 = 64 son defectuosos. Por tanto, de 1400 tornillos, 1400 – 64 = 1336 no son defectuosos. Entonces, $P(\text{no defectuoso}) = \frac{1336}{1400} = \frac{167}{175}$

16. Una urna contiene 4 bolas blancas y negras del mismo tamaño. Se sabe que al menos hay una de cada color. Se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Como la urna debe tener, al menos, una bola de cada color entonces puede tener 1 blanca y 3 negras, 2 blancas y 2 negras o 3 blancas y 1 negra.

Sean los sucesos:

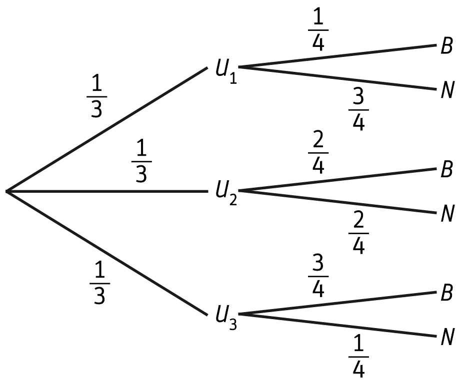
U_1 = “elegir la urna con 1 bola blanca y 3 negras”

U_2 = “elegir la urna 2 bolas blancas y 2 negras”

U_3 = “elegir la urna con 3 bolas blancas y 1 negra”

B = “extraer bola blanca”

N = “extraer bola negra”.



$$P(B) = P(U_1)\cdot P(B/U_1) + P(U_2)\cdot P(B/U_2) + P(U_3)\cdot P(B/U_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

17. En una ferretería hay tres cajas de bombillas. La primera contiene 20 bombillas, de las cuales 3 están fundidas, en la segunda hay 16 bombillas, con 2 fundidas, y en la tercera caja hay 10 bombillas, ninguna de ellas fundida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bombilla al azar esté fundida?

b) Se saca una bombilla y está fundida. ¿Qué probabilidad hay de que sea de la tercera caja?

Sean los sucesos:

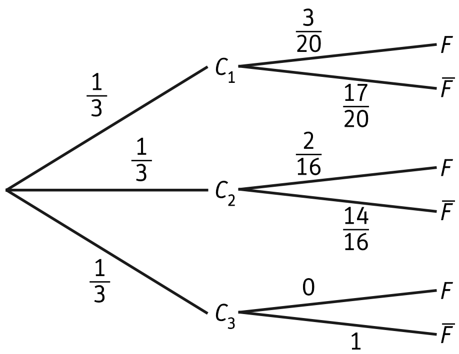
C_1 = “elegir la caja 1”

C_2 = “elegir la caja 2”

C_3 = “elegir la caja 3”

F = “la bombilla está fundida”

$\overline{F}$ = “la bombilla no está fundida”



a) $P(F) = P(C_1)\cdot P(F/C_1) + P(C_2)\cdot P(F/C_2) + P(C_3)\cdot P(F/C_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{16}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{22}{240}=\frac{11}{120}$

b) $P\left(C_3/\overline{F}\right)=\dfrac{P(C_3)\cdot P\left(\overline{F}/C_3\right)}{P\left(\overline{F}\right)}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 1}{1-\frac{11}{120}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{109}{120}}=\dfrac{40}{109}$

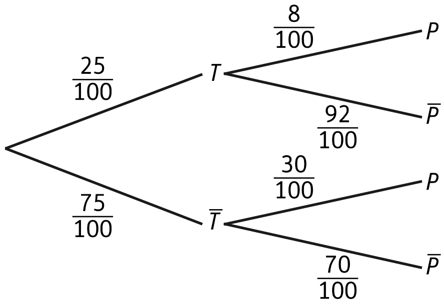
18. En una ciudad el 25 % de la población activa tiene estudios superiores. La tasa de paro entre los titulados superiores es del 8 %, mientras que en el resto de la población activa es del 30 %. Se elige una persona al azar que tiene empleo, ¿qué probabilidad tiene de ser titulado superior?

Sean los sucesos:

T = "ser titulado superior" $\qquad \overline{T}$ = "no ser titulado superior"

P = "estar en el paro" $\qquad \overline{P}$ = "no estar en el paro"

$$P\left(T/\overline{P}\right)=\frac{P(T)\cdot P\left(\overline{P}/T\right)}{P\left(\overline{P}\right)}=\frac{\frac{25}{100}\cdot\frac{92}{100}}{\frac{25}{100}\cdot\frac{92}{100}+\frac{75}{100}\cdot\frac{70}{100}}=\frac{\frac{23}{100}}{\frac{151}{200}}=\frac{46}{151}$$



19. Actividad interactiva.

20. En un concurso hay dos bolsas. En la bolsa *A* hay 3 bolas verdes y 2 rojas y en la bolsa *B* hay 7 bolas verdes, una blanca y 5 bolas rojas. Tienes que elegir una bolsa y sacar una bola roja para ganar un premio.

a) ¿Qué bolsa elegirías?

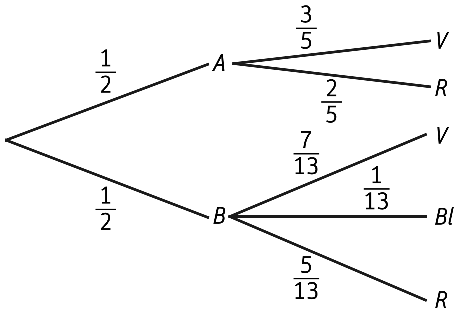
b) ¿Qué probabilidad tienes de ganar?

c) Si ha salido bola roja, ¿qué probabilidad hay de que el concursante haya elegido la bolsa *A*?

a) Elegiría la 1ª bolsa porque la proporción de bolas rojas es mayor.

b) $P(R) = P(A)\cdot P(R/A) + P(B)\cdot P(R/B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13}=\frac{51}{130}$

c) $P(A/R)=\dfrac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(R)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{51}{130}}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{51}{130}}=\dfrac{26}{51}$



21. Mi abuelo ha marcado las 6 caras de un dado con cuatro Δ y dos O y dos urnas, una con un Δ y otra con una O.

Me pide tirar el dado y sacar una bola de la urna marcada con esa letra y dice que me dará el equivalente en euros al número de la bola.

a) Calcula la probabilidad de que me dé 45 €.

b) Calcula la probabilidad de que me dé solo 3 €.

Sean los sucesos

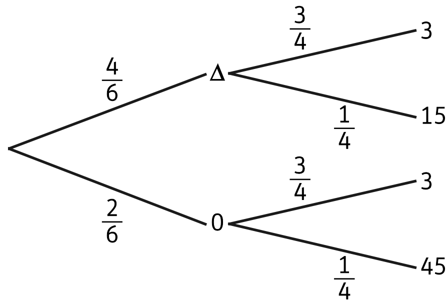
Δ = "obtener Δ al lanzar el dado" $\qquad$ O = "obtener O al lanzar el dado"

3 = "extraer una bola con un 3" $\qquad$ 15 = "extraer una bola con un 15"

45 = "extraer una bola con un 45"

a) $P(45) = P(\Delta)\cdot P(45/\Delta) + P(O)\cdot P(45/O) = \frac{4}{6}\cdot 0+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

b) $P(3) = P(\Delta)\cdot P(3/\Delta) + P(O)\cdot P(3/O) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$



22. En un juego se utilizan dos monedas iguales pero una de ellas está trucada y sale cara un 75 % de las veces. Se escoge una moneda al azar y se lanza.

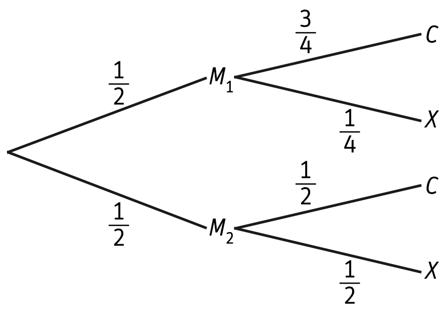
a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara?

b) En el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la moneda trucada?

Sean los sucesos:

M_1 = "elegir la moneda trucada" M_2 = "elegir la moneda no trucada"

C = "sacar cara" X = "sacar cruz"



a) $P(C) = P(M_1) \cdot P(C / M_1) + P(M_2) \cdot P(C / M_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

b) $P(M_1 / C) = \dfrac{P(M_1) \cdot P(C / M_1)}{P(C)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{3}{5}$

23. Calcula la probabilidad de ganar en este juego de cartas.

- **Se ponen en un montón las cartas as, 2, 3, 4 y 5 de oros de una baraja española.**
- **Se barajan las cinco cartas y se sacan una tras otra tres de ellas sin reemplazamiento.**
- **Se gana si las tres cartas son consecutivas.**

Casos posibles.

Hay que seleccionar 3 cartas de 5, el orden influye y las cartas no se pueden repetir. Se trata de calcular variaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas diferentes.

Casos favorables.

Para ganar existen tres únicas formas. Extraer 1 – 2 – 3, 2 – 3 – 4 o 3 – 4 – 5.

Por tanto, $P(\text{"ganar el juego"}) = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$.

24. Se ha realizado un test sobre una nueva vacuna a 12 000 personas. En 75 de ellas, entre las que había 30 mujeres embarazadas, se ha producido una reacción secundaria adversa.

a) Si la vacuna se ha administrado a 700 mujeres embarazadas, ¿cuál es la probabilidad de que una mujer embarazada sufra la reacción?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no embarazada tenga una reacción adversa?

a) Se organizan los datos en una tabla de contingencia, completando los que faltan.

	Embarazada	No embarazada	Total
Reacción	30	45	75
No reacción	670	11 255	11 925
Total	700	11 300	12 000

$P(\text{reacción / embarazada}) = \frac{30}{700} = \frac{3}{70}$

b) $P(\text{reacción / no embarazada}) = \frac{45}{11\,300} = \frac{9}{2260}$

25. Indica cuáles de los experimentos siguientes son aleatorios. Cuando lo sean escribe su espacio muestral.

a) Medir el volumen de una botella de agua.

b) Encestar al lanzar un triple de espaldas a la canasta.

c) Extraer una carta de una baraja y mirar su palo.

d) Acertar el segundo premio del sorteo de la lotería de Navidad.

a) Suceso determinista.

b) Suceso aleatorio.

c) Suceso aleatorio. E = {oros, copas, espadas, bastos}.

d) Suceso aleatorio. E = {00 000, 00 001, 00 002, ..., 99 999}.

26. En una urna hay nueve bolas numeradas del 1 al 9.

a) Escribe los sucesos elementales.

b) Describe dos sucesos compuestos.

c) Describe dos sucesos incompatibles.

a) Cada uno de los resultados posibles del espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) A = "sacar bola par" = $\{2, 4, 6, 8, 9\}$ y B = "sacar bola impar" = $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

c) Los sucesos A = "sacar bola par" y B = "sacar bola impar" son incompatibles porque $A \cap B = \varnothing$.

27. Se pueden construir dados equiprobables con los cinco poliedros regulares. ¿Cuántos sucesos elementales hay en los siguientes experimentos?

a) Lanzar un dado dodecaédrico y uno cúbico.

b) Lanzar un dado octaédrico y un tetraédrico.

c) Lanzar tres dados icosáedricos.

a) $12 \cdot 6 = 72$ sucesos elementales. **b)** $8 \cdot 4 = 32$ sucesos elementales. **c)** $20^3 = 8000$ sucesos elementales

28. Se lanza un dado de ocho caras y se consideran los sucesos:

***A* = "sacar más de 5"** ***B* = "sacar un número par"** ***C* = "sacar un múltiplo de 3"**

a) Escribe los elementos de los sucesos *A*, *B* y *C*.

b) Di si son compatibles: *A* y *B*, *A* y *C*, *B* y *C*.

c) Escribe los sucesos: $\overline{C}$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B - C$

d) Describe: $\overline{A} \cup B$, $\overline{B} \cap C$, $\overline{A \cup C}$, $\overline{B \cap C}$.

a) $A = \{6, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 6\}$.

b) A y B son compatibles porque $A \cap B = \{6, 8\} \neq \varnothing$, A y C son compatibles porque $A \cap C = \{6\} \neq \varnothing$ y B y C son compatibles porque $B \cap C = \{6\} \neq \varnothing$.

c) $\overline{C}$ = "no sacar un múltiplo de 3" = $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

$A \cap B$ = "sacar par mayor de 5" = $\{6, 8\}$

$B \cup C$ = "sacar par o múltiplo de 3" = $\{2, 3, 4, 6, 8\}$

$B - C = B \cap \overline{C}$ = "sacar un número par no múltiplo de 3" = $\{2, 4, 8\}$

d) $\overline{A} \cup B$ = "sacar menor o igual que 5 o par" = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

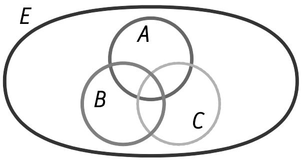
$\overline{B} \cap C$ = "sacar impar múltiplo de 3" = $\{3, 9\}$

$\overline{A \cup C}$ = "sacar menor o igual que 5 y no múltiplo de 3" = $\{1, 2, 4, 5\}$

$\overline{B \cap C}$ = "sacar impar o no múltiplo de 3" = $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$.

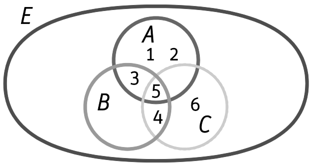
29. **Lanzamos un dado cúbico y consideramos los sucesos: $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{4, 5, 6\}$.**

a) Copia en tu cuaderno el diagrama de Venn y coloca los números en las regiones correspondientes.



b) Calcula los sucesos: $A \cup B \cup C$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cup B$; $\overline{A} \cap \overline{C}$

a)



b) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$ $\quad$ $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad$ $\overline{A} \cap \overline{C} = \varnothing$

$(A \cup B) \cap C = \{4, 5\}$ $\quad$ $\overline{A} \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$

30. **Se escoge al azar una carta de una baraja de 40 cartas. Consideramos los sucesos A = "sacar un basto", B = "sacar un rey", C = "sacar una carta más baja que 3". Describe los sucesos:**

a) $A \cap C$ $\quad$ **b)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ $\quad$ **c)** $A \cap \overline{B}$ $\quad$ **d)** $\overline{A - C}$

a) $A \cap C$ = "sacar un basto menor que 3".

b) $\overline{A} \cap \overline{B}$ = "sacar una carta que no sea un rey ni bastos"

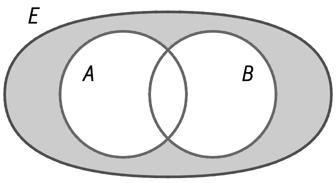
c) $A \cap \overline{B}$ = "sacar cualquier carta de bastos que no sea el rey"

d) $\overline{A - C}$ = "sacar una carta que no sea bastos o que sea bastos menor que 3"

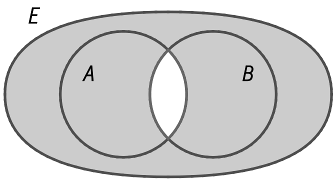
31. **Utiliza diagramas de Venn para comprobar si son ciertas las igualdades siguientes:**

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\quad$ **b)** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

a) Cierta. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



b) Cierta. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



32. Se lanzan dos dados y se mira la diferencia de puntos entre uno y otro.

a) Escribe el espacio muestral del experimento.

b) ¿Son sucesos equiprobables? En caso negativo, escribe las probabilidades de cada suceso elemental.

c) Halla la probabilidad del suceso A = "la diferencia es menor que 4".

a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

b) No son sucesos equiprobables.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos al hallar la diferencia entre puntos obtenidos al lanzar dos dados.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$P(0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $P(1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ $P(2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P(3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $P(4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ $P(5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c) $P(A) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

33. Se elige un número de tres cifras. ¿Qué probabilidad hay de que tenga alguna cifra repetida?

Llamamos al suceso A = "el número tiene alguna cifra repetida". Por tanto, $\overline{A}$ = "el número tiene todas sus cifras distintas". Calculamos $P\left(\overline{A}\right)$.

Casos posibles: todos los números de tres cifras. Es decir, hay $9 \cdot 10^2 = 900$ números.

Casos favorables: todos los números de tres cifras con todas sus cifras distintas. Es decir, hay $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números.

Por tanto, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{648}{900} = \frac{7}{25}$

34. Actividad resuelta.

35. Se lanzan dos dados y consideramos los sucesos:

A = "sacar al menos un 6"

B = "la diferencia de puntos es 2"

Calcula las probabilidades de:

a) $A \cap B$ **b) $A \cup B$** **c) $A - B$**

$A = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{11}{36}$

$B = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\} \Rightarrow P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

a) $A \cap B = \{(4, 6), (6, 4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{36} + \frac{2}{9} - \frac{1}{18} = \frac{17}{36}$

c) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{11}{36} - \frac{1}{18} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

36. Se elige al azar un número de 6 cifras (no puede empezar por 0). ¿Cuál es la probabilidad de que tenga al menos una cifra impar?

Llamamos al suceso A = "el número tiene alguna cifra impar". Por tanto, $\overline{A}$ = "el número tiene todas sus cifras pares". Calculamos $P\left(\overline{A}\right)$.

Casos posibles: todos los números de seis cifras. Es decir, hay $9 \cdot 10^5 = 900\,000$ números.

Casos favorables: todos los números de seis cifras con todas sus cifras pares. Es decir, hay $4 \cdot 5^5 = 12\,500$ números.

Por tanto, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{12\,500}{900\,000} = \frac{71}{72}$

37. En una empresa hay 20 trabajadores: 12 hombres y 8 mujeres. Se eligen tres de ellos al azar para formar una comisión. Halla la probabilidad de que:

a) Entre los elegidos haya solo una mujer.

b) Haya al menos una mujer.

c) La comisión no sea mixta, es decir, haya sólo hombres o sólo mujeres.

En todos los apartados los casos posibles son las comisiones formadas por tres personas elegidas al azar de entre 20. Es decir, hay $C_{20,3} = 1140$ comisiones posibles.

a) Casos favorables: comisiones formadas por dos hombres elegidos de entre 12 y una mujer elegida de entre 8. Es decir, hay $C_{12,2} \cdot C_{8,1} = 528$ comisiones.

Por tanto, P("en la comisión hay una sola mujer") = $\frac{528}{1140} = \frac{44}{95}$

b) Llamamos al suceso A = "la comisión tiene al menos una mujer". Por tanto, $\overline{A}$ = "la comisión no tiene ninguna mujer". Calculamos $P\left(\overline{A}\right)$. Casos favorables: comisiones formadas por tres hombres elegidos al azar de entre 12. Es decir, hay $C_{12,3} = 220$ comisiones.

Por tanto, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{220}{1140} = \frac{46}{57}$

c) Llamamos al suceso A = "la comisión está formada solo por mujeres".

Casos favorables: comisiones formadas por tres mujeres elegidas al azar de entre 8. Es decir, hay $C_{8,3} = 56$ comisiones. Por tanto, $P(A) = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$

P("la comisión está formada sólo por hombres") = P("la comisión no tiene ninguna mujer") = $\frac{220}{1140} = \frac{11}{57}$

Por tanto, P("la comisión no es mixta) = $\frac{14}{285} + \frac{11}{57} = \frac{23}{95}$

38. Colocamos 3 bolas rojas, 3 verdes y 3 azules en fila sin mirar su color. ¿Cuál es la probabilidad de que no hay dos bolas azules juntas?

Casos posibles: todas las filas distintas que se pueden hacer con 3 bolas rojas, 3 verdes y 3 azules. Es decir, hay $P_9^{3,3,3} = 1680$ filas distintas.

Casos favorables. Para colocar en fila 3 bolas rojas, 3 verdes y 3 azules, sin que haya dos azules juntas, se debe dar la situación *AOAOAOAOAOAOA*, donde *O* representa el lugar donde se coloca una bola roja o verde y *A* las posiciones donde podrían situarse las azules. En total hay 7 posiciones en las que las 3 bolas azules se podrían situar para que no hubiera dos de ellas juntas. De estas 7 posiciones disponibles hay que elegir 3 donde se vayan a colocar las bolas azules. Por tanto, hay $C_{7,3}$ formas de seleccionar las posiciones. Como las bolas rojas y verdes se pueden colocar de $P_6^{3,3}$ formas diferentes, entonces hay $P_6^{3,3} \cdot C_{7,3} = 700$ formas de colocar las bolas, de forma que no haya dos azules juntas.

Por tanto, P("no hay dos bolas azules juntas") = $\frac{700}{1680} = \frac{5}{12}$

39. ¿Cuál es la probabilidad de tener 4 ases al sacar 5 cartas de una baraja de 52 cartas?

Casos posibles: formas diferentes de extraer 5 cartas de 52. Es decir, hay $C_{52,\,5}$ = 2 598 960 formas distintas.

Casos favorables: formas diferentes de extraer los 4 ases de la baraja y otra carta cualquiera de las 48 restantes. Es decir, hay $C_{4,4} \cdot C_{48,1}$ = 48 formas distintas.

Por tanto, $P(\text{“extraer 4 ases”}) = \dfrac{48}{2\,598\,960} = \dfrac{1}{54\,145}$

40. Se lanza una moneda 4 veces. Calcula las probabilidades de:

a) Sacar 4 cruces.

b) Sacar exactamente 3 cruces.

c) Sacar al menos 3 cruces.

d) Sacar al menos una cruz.

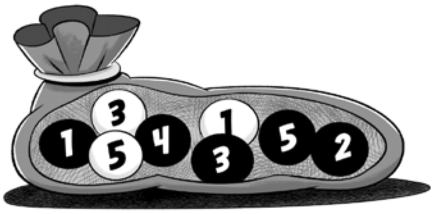
a) $P(\text{4 cruces}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$

b) $P(\text{3 cruces}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 4 = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

c) $P(\text{al menos 3 cruces}) = P(\text{3 cruces}) + P(\text{4 cruces}) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{16}$

d) $P(\text{al menos 1 cruz}) = 1 - P(\text{4 caras}) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

41. Observa la bolsa que contiene bolas del mismo tamaño.



Se sacan al azar dos bolas al mismo tiempo. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean del mismo color.

b) Las dos tengan el mismo número.

a) $P(\text{“las dos sean del mismo color”}) = P(\text{“sacar 2 blancas”}) + P(\text{“sacar dos negras”}) = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{4}{7} = \dfrac{13}{28}$

b) $P(\text{“las dos tengan el mismo número”}) = P(\text{“sacar dos bolas con un 1”}) + P(\text{“sacar dos bolas con un 3”}) + P(\text{“sacar dos bolas con un 5”}) = \dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{28}$

42. Con la misma bolsa del ejercicio anterior se consideran los sucesos *A* =”sacar bola negra”, *B* = “sacar un número impar”. ¿Son sucesos dependientes? Justifica la respuesta.

Como $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{6}{8} = \dfrac{30}{64} \neq P(A \cap B) = \dfrac{3}{8}$, entonces los sucesos son dependientes.

43. Una paloma mensajera llamada Pronta llega a su destino con el mensaje el 90 % de las veces. Otra paloma menos experta, llamada Tarda, entrega el mensaje el 80 % de las veces. Se envía a las dos palomas a un mismo destino. Calcula las posibilidades siguientes.

a) Que al menos una de las palomas entregue el mensaje.

b) Que no llegue ninguna de las dos.

Llamamos a los sucesos P = “la paloma Pronta llega a su destino” y T = “la paloma Tarda llega a su destino”.

a) Como los sucesos P y T son independientes, entonces $P(P \cap T) = P(P) \cdot P(T) = \dfrac{90}{100} \cdot \dfrac{80}{100} = \dfrac{72}{100}$.

Entonces, $P(P \cup T) = P(P) + P(T) - P(P \cap T) = \dfrac{90}{100} + \dfrac{80}{100} - \dfrac{72}{100} = \dfrac{98}{100}$.

b) $P\left(\overline{P} \cap \overline{T}\right) = P\left(\overline{P}\right) \cdot P\left(\overline{T}\right) = (1 - P(P))(1 - P(T)) = \left(1 - \dfrac{90}{100}\right)\left(1 - \dfrac{80}{100}\right) = \dfrac{10}{100} \cdot \dfrac{20}{100} = \dfrac{2}{100}$

44. Se extraen sucesivamente tres cartas de una baraja de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las tres cartas sean reyes si:

a) Se vuelven a meter al mazo las cartas extraídas.

b) No se devuelven al mazo las cartas.

a) $P(\text{“tres reyes”}) = \frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40} = \frac{64}{64\,000} = \frac{1}{1000}$ **b)** $P(\text{“tres reyes”}) = \frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\cdot\frac{2}{38} = \frac{24}{59\,280} = \frac{1}{2470}$

45. Las habitaciones de un hotel están numeradas de tal forma que la primera cifra indica la planta y las otras dos el número de la habitación en esa planta. El hotel tiene 3 plantas y en cada planta hay 40 habitaciones. Si se eligen dos habitaciones al azar, calcula la probabilidad de que las habitaciones sean contiguas.

Supongamos que las plantas del hotel están numeradas con los números 1, 2 y 3 y, en cada planta, las habitaciones están numeradas del 1 al 40.

Entonces las habitaciones del hotel serán 101, 102, …, 139, 140, 201, 202, …, 239, 240, 301, 302, …, 339, 340.

Si las habitaciones del hotel estuvieran, en cada planta, en un lado del pasillo, entonces las habitaciones 101, 140, 201, 240, 301 y 340 únicamente tendrían una habitación contigua. El resto de habitaciones tendrían 2 habitaciones contiguas. Es decir, habría 6 habitaciones con una única habitación contigua y, 114 habitaciones, con 2 habitaciones contiguas.

Por tanto, $P(\text{“sean contiguas”}) = \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{119}\cdot 6 + \frac{1}{120}\cdot\frac{2}{119}\cdot 114 = \frac{39}{2380}$

Si las habitaciones del hotel estuvieran, en cada planta, en forma circular, entonces todas las habitaciones tendrían 2 habitaciones contiguas.

Por tanto, $P(\text{“sean contiguas”}) = \frac{1}{120}\cdot\frac{2}{119}\cdot 120 = \frac{2}{119}$

46. Actividad resuelta.

47. En un congreso de médicos hay 200 congresistas. De ellos 130 son morenos, 80 tienen los ojos castaños, de los cuales 50 son morenos. Se selecciona al azar a un asistente. Haz una tabla de contingencia y calcula la probabilidad de que:

a) Sea moreno y con los ojos castaños.

b) No tenga los ojos castaños y no sea moreno.

Se organizan los datos en una tabla de contingencia, completando los que faltan.

	Ojos castaños	No ojos castaños	Total
Moreno	50	80	130
No moreno	30	40	70
Total	80	120	200

a) $P(\text{moreno y ojos castaños}) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$ **b)** $P(\text{ojos no castaños y no moreno}) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$

48. En una rifa con números del 001 al 500 se sortean tres premios distintos. Luisa ha comprado 10 boletos. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Al menos un boleto tenga premio.

b) Tengan premio a lo sumo dos boletos.

a) $P(\text{“al menos un boleto tiene premio”}) = 1 - P(\text{“ningún boleto tiene premio”}) = 1 - \frac{490\cdot 489\cdot 488}{500\cdot 499\cdot 498} = 0{,}058\,923$

b) $P(\text{“tengan premio a lo sumo dos boletos”}) = P(\text{“ningún boleto tiene premio”}) + P(\text{“tenga premio 1 boleto”}) + P(\text{“tengan premio 2 boletos”}) = 1 - P(\text{“tengan premio 3 boletos”}) - P(\text{“tengan premio los 3 boletos”}) = 1 - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{500\cdot 499\cdot 498} = 0{,}999\,994$

49. Un estudio de una tienda de electrodomésticos dice que 6 de cada 10 clientes compra un televisor. La probabilidad de que un cliente compre un lector de DVD si ha comprado un televisor es 0,4, mientras que si no ha comprado el televisor la probabilidad es 0,2. Calcular la probabilidad de que:

a) Compre un televisor y un lector de DVD.

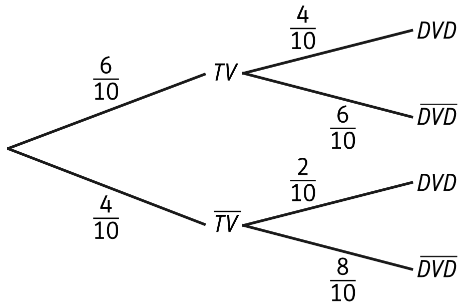
b) Compre lector de DVD.

c) Compre un televisor si ha comprado un lector de DVD.

Sean los sucesos:

T = "comprar un televisor" $\quad \overline{T}$ = "no comprar un televisor"

D = "comprar un DVD" $\quad \overline{D}$ = "no comprar un DVD"



a) $P(T \cap D) = P(T) \cdot P(D / T) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{25}$

b) $P(D) = P(T) \cdot P(D / T) + P\left(\overline{T}\right) \cdot P\left(D / \overline{T}\right) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{8}{25}$

c) $P(T / D) = \frac{P(T) \cdot P(D / T)}{P(D)} = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{8}{25}} = \frac{3}{4}$

50. Actividad resuelta.

51. Se dispone de dos urnas *A* y *B*. La urna *A* contiene 3 bolas blancas y una negra y la urna *B* una blanca y 2 negras. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna *A* y si no es así se saca de la urna *B*.

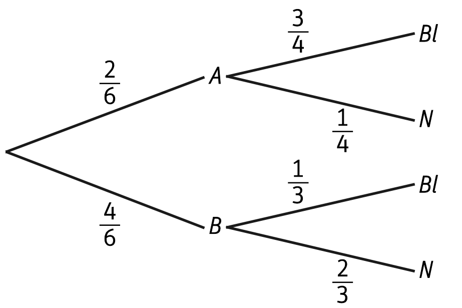
a) Calcula la probabilidad de sacar una bola negra.

b) Se saca una bola de una de las urnas y es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido más de 2 en el dado?

Sean los sucesos:

A = "extraer bola de la urna A" $\quad B$ = "extraer bola de la urna B"

Bl = "extraer bola blanca" $\quad N$ = "extraer bola negra"



a) $P(N) = P(A) \cdot P(N / A) + P(B) \cdot P(N / B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{36}$

b) $P(B / Bl) = \frac{P(B) \cdot P(Bl / B)}{P(Bl)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{19}{36}} = \frac{8}{17}$

52. **Existen tres medicamentos genéricos para combatir una enfermedad, excluyentes entre sí.**

- **El *A* lo toman el 60 % de los enfermos y su índice de curación es del 85 %.**
- **El *B* lo toman el 25 % de los enfermos y es eficaz en 9 de cada 10 pacientes.**
- **El *C* lo toman el resto y su nivel de eficacia es del 80 %.**

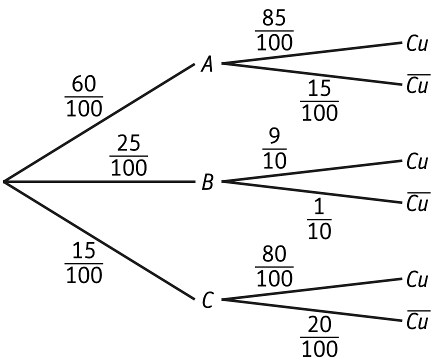
a) **Calcula la probabilidad global de curación de un paciente.**

b) **Se ha seleccionado al azar a un paciente que no ha respondido positivamente al tratamiento. Calcula la probabilidad de que haya tomado el medicamento *B*.**

Sean los sucesos:

A = "tomar el medicamento A" B = "tomar el medicamento B" C = "tomar el medicamento C"

C_u = "el paciente se cura" $\overline{C_u}$ = "el paciente no se cura"



a) $P(C_u) = P(A) \cdot P(C_u / A) + P(B) \cdot P(C_u / B) + P(B) \cdot P(C_u / B) = \frac{60}{100} \cdot \frac{85}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{9}{10} + \frac{15}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{171}{200}$

b) Aplicamos el teorema de Bayes: $P\left(B / \overline{C_u}\right) = \dfrac{P(B) \cdot P\left(\overline{C_u} / B\right)}{P\left(\overline{C_u}\right)} = \dfrac{\frac{25}{100} \cdot \frac{1}{10}}{1 - \frac{171}{200}} = \dfrac{5}{29}$

53. **Indica el suceso contrario en los siguientes casos.**

a) **En una clase se eligen al azar dos estudiantes. *A* = "los dos son chicos"**

b) **En un restaurante Luis pide dos platos: *B* = "sopa y pescado"**

c) **En una rifa Juan lleva tres números distintos: *C* = "al menos uno está premiado"**

a) $\overline{A}$ = "al menos un estudiante es chica".

b) $\overline{B}$ = "no sopa y pescado simultáneamente"

c) $\overline{C}$ = "ninguno está premiado".

54. **Se lanza una moneda tres veces. Consideramos los sucesos, *A* = "solo han salido caras" y *B* = "ha salido al menos una cara". Calcula las probabilidades de los sucesos:**

a) $\overline{A}$ **b)** $A \cup B$ **c)** $\overline{A} \cap B$ **d)** $A \cup \overline{B}$

$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX\} \Rightarrow A = \{CCC\}$ y $B = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX\}$

a) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

b) $A \cap B = \{CCC\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

c) $\overline{A} \cap B = \{CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX\} \Rightarrow P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

d) $A \cup \overline{B} = \{CCC, XXX\} \Rightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

55. Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 negras y 2 blancas. Se sacan 3 bolas sin remplazarlas. Calcula las probabilidades de los sucesos siguientes:

a) Que las tres sean del mismo color.

b) Que sean de tres colores distintos.

a) P("igual color") = P("tres rojas") + P("tres negras") = $\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{11}{120}$

b) P("distinto color") = 3! · P("bola roja, bola negra, bola blanca") = $6\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

56. Se tienen 4 cajas numeradas del 1 al 4 y repartimos al azar 10 bolas idénticas entre las 4 cajas. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna esté vacía?

Casos posibles.

Formas distintas de repartir 10 bolas idénticas en 4 cajas.

El problema es equivalente a contar de cuántas formas diferentes se pueden distribuir 10 bolas y 3 barras. Por ejemplo, la distribución ••|•••|•|••••, significa que en la primera caja hay 2 bolas, en la segunda 3, en la tercera 1 y en la cuarta 4.

Por tanto, hay $C_{13,3}$ = 286 formas diferentes de distribuir 10 bolas idénticas en 4 cajas.

Casos favorables.

Formas distintas de repartir 10 bolas idénticas en 4 cajas, de forma que ninguna caja esté vacía.

Repartimos una bola en cada caja. De esta forma ninguna caja está vacía. Ahora falta repartir 6 bolas idénticas en 4 cajas. El problema es equivalente a contar de cuántas formas diferentes se pueden distribuir 6 bolas y 3 barras.

Es decir, hay $C_{9,3}$ = 84 formas diferentes de distribuir 10 bolas idénticas en 4 cajas, de forma que ninguna caja esté vacía.

Por tanto, P("ninguna caja vacía") = $\frac{84}{286}=\frac{42}{143}$

57. En un experimento la probabilidad de un suceso A es $P(A)$ = 0,50 y la de otro suceso B es $P(B)$ = 0,45. La probabilidad de la unión es $P(A \cup B)$ = 0,90.

a) ¿Son incompatibles A y B?

b) ¿Son independientes?

c) Calcula las probabilidades de $A \cap B$, A / B, B / A y $\overline{A} \cap B$.

a) $P(A \cup B) = 0{,}90 \neq P(A) + P(B) = 0{,}50 + 0{,}45 = 0{,}95 \Rightarrow A$ y B no son incompatibles.

b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}50 + 0{,}45 - 0{,}90 = 0{,}05$

$P(A \cap B) = 0{,}05 \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}50 \cdot 0{,}45 = 0{,}225 \Rightarrow A$ y B no son independientes.

c) $P(A \cap B) = 0{,}05$

$P(B / A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}05}{0{,}50}=\frac{1}{10}$

$P(A / B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}05}{0{,}45}=\frac{1}{9}$

$P\left(\overline{A}\cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45 - 0{,}05 = 0{,}40$

58. **En un concurso de redacción el ganador elige un libro al azar entre 5 novelas y 3 libros de poesía y tras él, el segundo clasificado elige otro libro. Calcular la probabilidad de que:**

a) **Al segundo le toque un libro de poesía.**

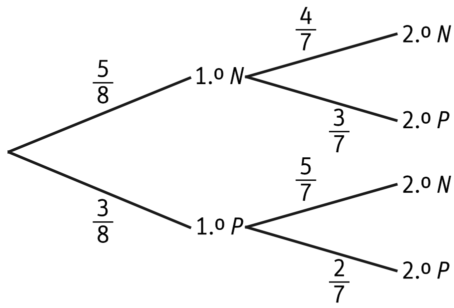
b) **Al ganador le haya tocado una novela si sabemos que al segundo le tocó un libro de poesía.**

c) **Que a los dos les toque un libro del mismo género.**

Sean los sucesos:

1ºN = "el ganador elige novela" 1ºP = "el ganador elige poesía"

2ºN = "el segundo elige novela" 2ºP = "el segundo elige poesía"



a) $P(2^{\text{º}}P) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{8}$

b) $P(1^{\text{º}}N/2^{\text{º}}P)=\frac{P(1^{\text{º}}N)\cdot P(2^{\text{º}}P/1^{\text{º}}N)}{P(2^{\text{º}}P)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{3}{8}}=\frac{5}{7}$

c) $P(\text{"mismo género"}) = P(1^{\text{º}}N\cap 2^{\text{º}}N) + P(1^{\text{º}}P\cap 2^{\text{º}}P) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{13}{28}$

59. **Un pastillero A1 contiene 4 pastillas blancas y 3 azules, otro A2 tiene 5 blancas y ninguna azul y un tercero A3 tiene 2 blancas y 4 azules.**

a) **Se escoge un pastillero al azar y de él se extrae una pastilla. Calcula la probabilidad de que sea blanca.**

b) **Si ha salido una pastilla blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la pastilla estuviera en el primer pastillero?**

c) **Se han juntado todas las pastillas y se extrae una al azar. Calcula la probabilidad de que sea del primer pastillero.**

Sean los sucesos:

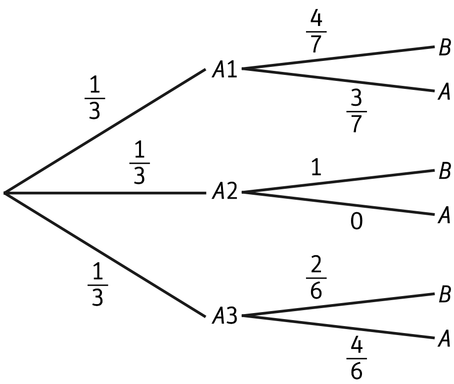
A_1 = "elegir el pastillero $A1$"

A_2 = "elegir el pastillero $A2$"

A_3 = "elegir el pastillero $A3$"

B = "extraer pastilla blanca"

A = "extraer pastilla azul".



a) $P(B) = P(A1)\cdot P(B/A1) + P(A2)\cdot P(B/A2) + P(A3)\cdot P(B/A3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}=\frac{40}{63}$

b) $P(A1/B)=\frac{P(A1)\cdot P(B/A1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{40}{63}}=\frac{3}{10}$

c) En total hay 18 pastillas, de las cuales 7 pertenecen al primer pastillero $\Rightarrow P(A1) = \frac{7}{18}$.

60. **Tres bolsas contienen bolas de colores, la *A* tiene 5 bolas negras y 2 blancas, la *B*, 4 negras y 3 blancas, y la *C*, 4 negras y 4 blancas. Se elige una bolsa al azar y se extraen dos bolas de la misma. Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.**

$P(\text{"igual color"}) = P(BB) + P(NN) = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\right)=\frac{29}{63}$

61. En un campamento hispano-francés los participantes se han apuntado a un único deporte según la siguiente tabla:

	Tenis	Natación	Vela
Español	40	24	16
Francés	14	21	35

Indica si los siguientes pares de sucesos son independientes.

a) A = "ser español" y T = "practicar tenis".

b) B = "ser francés" y V = "practicar vela".

Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

	Tenis	Natación	Vela	Total
Español	40	24	16	80
Francés	14	21	35	70
Total	54	45	51	150

a) $P(A \cap T) = \frac{40}{150} = \frac{4}{15} \neq P(A) \cdot P(T) = \frac{80}{150} \cdot \frac{54}{150} = \frac{24}{125} \Rightarrow$ A y T no son independientes.

b) $P(B \cap V) = \frac{35}{150} = \frac{7}{30} \neq P(B) \cdot P(V) = \frac{70}{150} \cdot \frac{51}{150} = \frac{119}{750} \Rightarrow$ B y V no son independientes.

62. En un comercio hay instaladas dos alarmas A y B contra incendios en zonas distintas. La probabilidad de que se active la alarma A es $P(A) = 0{,}90$, la probabilidad de que se active B es $P(B) = 0{,}75$ y la probabilidad de que se activen ambas simultáneamente es $P(A \cap B) = 0{,}70$. Si hay un incendio, calcula las siguientes probabilidades:

a) Que se active alguna alarma.

b) Que no se active ninguna de las dos alarmas.

c) Que se active solo una alarma.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}90 + 0{,}75 - 0{,}70 = 0{,}95$

b) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

c) $P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}90 - 0{,}70 + 0{,}75 - 0{,}70 = 0{,}25$

63. Una bolsa contiene 5 bolas rojas numeradas del 1 al 5 y 3 bolas azules numeradas del 1 al 3. Se extraen, sin reponerlas, tres bolas al azar. Calcula las probabilidades siguientes:

a) No sacar 3 bolas rojas.

b) No sacar ninguna bola roja.

c) Sacar al menos una bola roja.

a) P("no sacar tres bolas rojas") = 1 − P("sacar tres bolas rojas") = $1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{23}{28}$

b) P("no sacar ninguna bola roja") = P("sacar tres bolas azules") = $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$

c) P("sacar al menos una bola roja") = 1 − P("no sacar ninguna bola roja") = $1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56}$

64. En un plató de televisión hay dos cámaras que enfocan al presentador en todo momento. La cámara *A* falla en un 8 % de los casos, y la *B*, en un 5 %. En un 2 % fallan los dos simultáneamente. Calcula la probabilidad de que:

a) Fallen las dos cámaras.

b) Falle *B* sabiendo que ha fallado *A*.

c) No falle ninguna cámara.

Llamamos a los sucesos *FA* ="falla la cámara *A*" y *FB* = "falla la cámara *B*".

a) $P(FA \cap FB) = 0{,}02$

b) $P(FB / FA) = \dfrac{P(FA \cap FB)}{P(FA)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}08} = 0{,}25$

c) $P\left(\overline{FA} \cap \overline{FB}\right) = 1 - P\left(\overline{\overline{FA} \cap \overline{FB}}\right) = 1 - P(FA \cup FB) = 1 - \left(P(FA) + P(FB) - P(FA \cap FB)\right) = 1 - (0{,}08 + 0{,}05 - 0{,}02) =$

$= 1 - 0{,}11 = 0{,}89$

65. En una fábrica de envases se ha realizado un test de calidad resultando que el 3 % salen defectuosos. Se han seleccionado 10 piezas al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Ningún envase sea defectuoso.

b) El primer envase defectuoso salga en la tercera extracción.

c) Que haya exactamente un envase defectuoso.

a) P("ningún envase defectuoso") = $0{,}97^{10} = 0{,}74$

b) P("el primer envase defectuoso salga en la tercera extracción") = $\dfrac{97}{100} \cdot \dfrac{96}{99} \cdot \dfrac{3}{98} = \dfrac{388}{13\,475}$

c) P("un envase defectuoso") = $10 \cdot 0{,}97^9 \cdot 0{,}03 = 0{,}23$

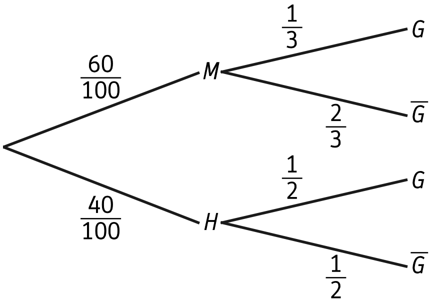
66. Un estudiante hace un test de 8 preguntas. En cada una de ellas debe elegir la respuesta correcta entre tres posibles. Para pasar el test hay que acertar al menos 6 respuestas. Decide rellenar todas las respuestas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que pase el test?

Para superar el test, el alumno debe acertar al menos 6 respuestas. La probabilidad de acertar cada respuesta es $\dfrac{1}{3}$ y, de fallarla, $\dfrac{2}{3}$.

P("acertar al menos 6 preguntas") = P("acertar 6 preguntas") + P("acertar 7 preguntas") + P("acertar 8 preguntas")=

$= \binom{8}{6} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \binom{8}{7} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3}\right)^8 = 0{,}0197$

67. En el claustro de profesores de un centro el 60 % de los miembros son mujeres. Entre las profesoras una de cada 3 lleva gafas, mientras que entre los profesores las llevan uno de cada 2. Se elige al azar a un miembro del claustro, ¿cuál es la probabilidad de que sea una profesora si sabemos que llevaba gafas?



Sean los sucesos:

M = "es mujer" H = "es hombre"

G = "lleva gafas" $\overline{G}$ = "no lleva gafas"

$$P(M/G) = \frac{P(M) \cdot P(G/M)}{P(G)} = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{60}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

68. La probabilidad de que al seleccionar un número capicúa entre 1000 y 10 000 sea múltiplo de 7 es:

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{7}$

Casos posibles. Todos los números capicúas de 4 cifras. Es decir, hay $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$ números capicúas de 4 cifras.

Casos favorables. Todos los números capicúas de 4 cifras múltiplos de 7.

$1000a + 100b + 10b + a$, con $a = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $b = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, es un número capicúa de 4 cifras. Como el número tiene que ser múltiplo de 7, entonces es de la forma $7k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, $1000a + 100b + 10b + a = 7k \Rightarrow 1001a + 110b = 7k \Rightarrow 11(91a + 10b) = 7k$.

Como 11 no es divisible entre 7, entonces $91a + 10b$ debe ser múltiplo de 7.

Como $91a = 13 \cdot 7a$ es divisible entre 7, entonces $10b$ debe ser también divisible entre 7.

Es decir, $10b = 7k$. Pero $b = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, por tanto $b = 0$ o $b = 7$.

Si $b = 0$, el número capicúa es de la forma $a00a \Rightarrow$ existen 9 números de la forma $a00a$ múltiplos de 7.

Si $b = 7$, el número capicúa es de la forma $a77a \Rightarrow$ existen 9 números de la forma $a77a$ múltiplos de 7.

Existen 18 números capicúas de 4 cifras múltiplos de 7.

Por tanto, P(“el número capicúa de 4 cifras sea múltiplo de 7”) = $\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$

La respuesta correcta es la B.

69. *A* y *B* son dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}40$, $P(B / A) = 0{,}25$ y $P(B) = b$. ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tomar *b*?

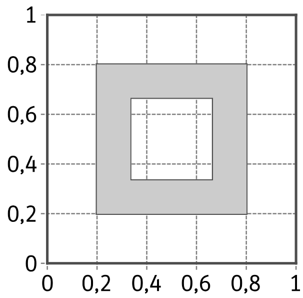
A. 0,40 **B.** 0,36 **C.** 0,70 **D.** 1

$P(A \cap B) = P(B / A) \cdot P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}40 = 0{,}1 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}40 + b - 0{,}1 = 0{,}3 + b$

Como $P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow 0{,}3 + b \leq 1 \Rightarrow b \leq 0{,}7$.

La respuesta correcta es la C.

70. Se escoge un punto al azar en el interior de un cuadrado de lado 1 y se mide la distancia del punto al lado más próximo. ¿Cuál es la probabilidad de que esa distancia esté comprendida entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$?



A. $\frac{45}{225}$ **C.** $\frac{56}{225}$

B. $\frac{55}{225}$ **D.** $\frac{60}{225}$

Casos posibles

Área del cuadrado de lado 1: $A_{cuadrado} = 1^2 = 1$.

Casos favorables

Área de la zona coloreada de la figura. Es un marco cuyo borde exterior está a $\frac{1}{5}$ de distancia del lado del cuadrado y, cuyo borde interior, está a $\frac{1}{3}$ de distancia del lado del cuadrado.

$$A_{zona\ sombreada} = \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{56}{225}$$

Por tanto, $P\left(\text{distancia comprendida entre} \frac{1}{5} \text{y} \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{56}{225}}{1} = \frac{56}{225}$

La respuesta correcta es la C.

Encuentra el error

71. Un fallo con historia. Si se lanzan al aire dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que salga alguna cara? El matemático francés Jean Le Rond d´Alembert (1717 - 1783) dijo que la probabilidad era $\frac{2}{3}$. Razonó así:

- **Si la primera moneda sale cara ya se cumple nuestro suceso.**
- **Si no es así los resultados pueden ser (*X*, *C*) o (*X*, *X*). En dos de los casos sale alguna cara y en el tercero no sale ninguna. Luego la probabilidad de salir alguna cara es $\frac{2}{3}$.**

¿Estás de acuerdo con d´Alembert? Calcula la probabilidad de obtener "al menos una cara" al lanzar dos monedas. Encuentra el fallo, si lo hay, en el razonamiento de d´Alembert.

Jean Le Rond d´Alembert cometió un error al contabilizar el número de casos posibles.

Si se lanzan dos monedas, el espacio muestral es $E = \{CC, CX, XC, XX\}$. Por tanto, hay 4 posibles resultados. De esos 4 posibles resultados, al menos se obtiene una cara en tres de ellos.

Por tanto, P("obtener al menos una cara") = $\frac{3}{4}$.

PONTE A PRUEBA

La importancia de los análisis médicos y de las leyes del azar

Actividad resuelta.

Un juego con trampa

Belén y Carlos han descubierto un nuevo juego:

- **Se introducen tres fichas en un sombrero.**
- **Una de ellas tiene las dos caras blancas, otra las dos caras rojas y la tercera una blanca y otra roja.**
- **Uno de los ellos extrae una ficha, mira sólo una de sus caras y le muestra el color al otro jugador.**

Carlos apuesta a que la ficha es la que tiene las dos caras iguales, y Belén a que es la que tiene las caras diferentes.

Parece que los dos jugadores tienen las mismas posibilidades de acertar, ya que si la cara que se ha visto es roja la cara oculta o es roja también, en cuyo caso sería la ficha de dos caras rojas, o por el contrario, es blanca, y entonces la ficha extraída sería la blanca-roja.

1. ¿Tienen los dos jugadores las mismas probabilidades de ganar?

Los jugadores no tienen las mismas probabilidades de ganar.

Tendría más posibilidades de ganar el jugador que apueste por la ficha de doble color; es decir, si la cara que han visto es roja tendría más posibilidades el jugador que apueste por la ficha rojo – rojo y, si la cara que han visto es blanca, tendría más posibilidades de ganar el jugador que apueste por la ficha blanca – blanca.

Por tanto, tendría más posibilidades de ganar Carlos.

2. En caso contrario, ¿por cuál de las dos opciones apostarías? Calcula la probabilidad de ganar de cada jugador.

Llamamos a los sucesos:

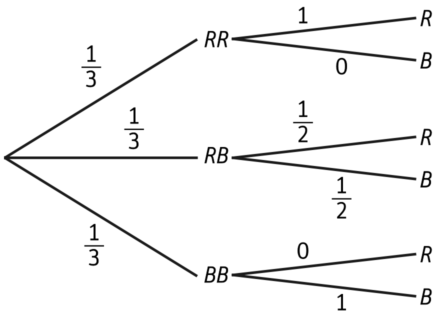
RR = "la ficha elegida es la que tiene las dos caras rojas"

BB = "la ficha elegida es la que tiene las dos caras blancas"

RB = "la ficha elegida es la que tiene una cara roja y otra blanca"

R = "la cara de la ficha que se enseña sea roja"

B = "la cara de la ficha que se enseña sea azul"



Supongamos que se ha sacado una ficha y la cara que se ve es roja. Belén apostaría por la ficha *RB* y, Carlos, por la ficha *RR*.

$$P(RR/R) = \frac{P(RR)\cdot P(R/RR)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \text{ y } P(RB/R) = \frac{P(RB)\cdot P(R/RB)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, Carlos tendría más probabilidades de ganar.

Si la cara que se viera fuera blanca, Belén apostaría por la ficha *RB* y, Carlos, por la ficha *BB*.

$$P(BB/B) = \frac{P(BB)\cdot P(B/BB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{2}{3} \text{ y } P(RB/B) = \frac{P(RB)\cdot P(B/RB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{1}{3}$$

De nuevo, Carlos tendría más probabilidades de ganar.

Una partida sin terminar. Reparto justo.

Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) son dos de los fundadores de la teoría de la probabilidad. Se intercambiaron numerosas cartas planteándose problemas relacionados con el azar. Uno de ellos fue cómo habría que repartir las cantidades apostadas por dos jugadores si hubieran de interrumpir el juego antes del final y uno fuera ganando al otro.

En una carta escrita el 29 de julio de 1654 Pascal le remite a Fermat su solución:

"He aquí como lo hago para saber el valor de cada una de las partidas cuando dos jugadores juegan al mejor de tres partidas, y cada uno ha apostado 32 monedas. Supongamos que el primero ha ganado dos y el otro una. Ahora están jugando una partida cuya suerte es que, si gana el primero, gana la apuesta, las 64 monedas. Si gana el otro empatan a dos partidas, y por tanto, si suspenden el juego cada uno retiraría su apuesta. Considerad, señor, que si gana el primero le pertenecen 64 monedas y 32 si pierde. Ahora bien, si no quieren arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: "estoy seguro de ganar 32 monedas, porque aunque pierda las tengo; pero las otras 32 quizás las tendré yo o quizás las tendréis vos; el azar es igual, repartamos pues estas monedas mitad por mitad, y me dais, además de estas 16 las 32 monedas que me corresponden con seguridad". Tendrá, pues, 48 monedas el primero y el otro 16"

1. ¿Estás de acuerdo con la solución de Pascal?

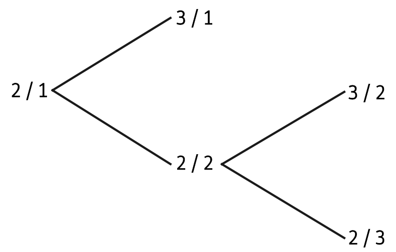
Sí, porque Pascal plantea que hay que tener en cuenta lo que podría ocurrir si siguieran jugando, y repartir el dinero en base a ello.

2. ¿No sería más justo este razonamiento: "si han jugado tres partidas y uno ha ganado dos y el otro una, lo lógico es dividir las 64 monedas en tres partes y que el primero se lleve dos partes y el otro una. Es decir, al primero le corresponden $\frac{2}{3}\cdot 64 = 42,66$ y al otro $\frac{1}{3}\cdot 64 = 21,33$?

No sería más justo porque no se tendrían en cuenta las probabilidades de ganar cada uno, en función de su trayectoria.

3. Haz un diagrama de árbol, suponiendo que los dos tiene la misma probabilidad de ganar una partida y saca tus propias conclusiones.

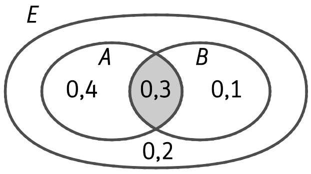
Denotamos por *X* / *Y* al número de partidas ganadas por cada jugador, donde *X* representa el número de partidas por el primer jugador e *Y* el número de partidas ganadas por el segundo. Por ejemplo, 2 / 1 significa que el primer jugador ha ganado dos partidas y, el segundo, una.



El jugador que lleva ventaja en el momento de plantearse parar el juego gana 2 de cada 3 partidas.

AUTOEVALUACIÓN

1. **Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio y se sabe que $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \cap B) = 0{,}3$. Representa los sucesos A y B mediante un diagrama de Venn y calcula:**



a) $P(A \cup B)$

b) $P(\overline{B})$

c) $P(A \cup \overline{B})$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}8$

b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

c) $P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}9$

2. **Los dados para rellenar quinielas son dados cúbicos con estas características: tres caras están marcadas con un 1 que representa la victoria local, dos caras con una *X* que representa el empate y una cara con un 2, que representa la victoria visitante.**

Calcula las probabilidades de que al lanzar el dado tres veces:

a) **Salgan 3*X*.** **b)** **No salga ninguna *X*.** **c)Salga al menos una *X*.**

a) $P(3X) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$

b) $P(\text{“ninguna } X\text{”}) = \left(\dfrac{4}{6}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

c) $P(\text{“al menos una } X) = 1 - P(\text{“ninguna } X\text{”}) = \dfrac{19}{27}$

3. **Se elige un número al azar entre 1000 y 9999. Calcula la probabilidad de que:**

a) **Tenga alguna cifra repetida.**

b) **Tenga solo una cifra repetida dos veces.**

a) $P(\text{“alguna cifra repetida”}) = 1 - P(\text{“ninguna cifra repetida”}) = 1 - \dfrac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{9000} = 1 - \dfrac{4536}{9000} = \dfrac{62}{125}$

b) $P(\text{“una cifra repetida dos veces”}) = \dfrac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 6}{9000} = \dfrac{3888}{9000} = \dfrac{54}{125}$

4. **Se extraen 4 cartas de una baraja de 40 naipes. Calcula la probabilidad de que:**

a) **Tres de las cuatro cartas tengan el mismo valor: tres cuatros, tres reyes…**

b) **Las cuatro tengan distinto valor.**

a) $P(\text{“tres de las cuatro cartas tienen igual valor”}) = 4 \cdot \dfrac{40}{40} \cdot \dfrac{3}{39} \cdot \dfrac{2}{38} \cdot \dfrac{36}{37} = \dfrac{144}{9139}$

b) $P(\text{“las cuatro cartas tengan distinto valor”}) = \dfrac{40}{40} \cdot \dfrac{36}{39} \cdot \dfrac{32}{38} \cdot \dfrac{28}{37} = \dfrac{5376}{9139}$

5. **En un concurso de televisión, un concursante domina 5 de los 8 temas sobre los que le pueden preguntar. En la primera ronda, el presentador elige dos sobres al azar y le muestra los temas que contienen al concursante, para que elija uno de ellos.**

a) **Halla la probabilidad de que el concursante pueda elegir uno de los temas que domina.**

b) **Halla la probabilidad de que el presentador le muestre al concursante dos temas que conoce.**

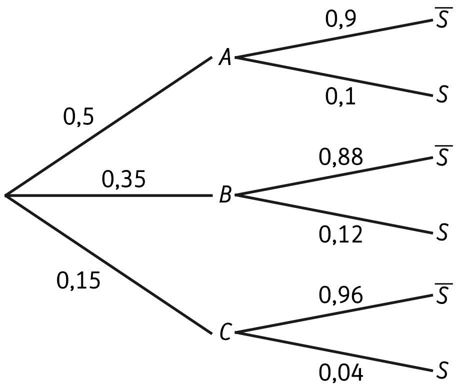
a) $P(\text{“el concursante se sabe al menos un tema”}) = \dfrac{C_{5,1} \cdot C_{3,1}}{C_{8,2}} + \dfrac{C_{5,2}}{C_{8,2}} = \dfrac{15}{28} + \dfrac{10}{28} = \dfrac{25}{28}$

b) $P(\text{“el concursante se sabe los dos temas”}) = \dfrac{C_{5,2}}{C_{8,2}} = \dfrac{5}{14}$

6. En una ciudad hay tres centros educativos *A*, *B* y *C* que presentan alumnos al examen de acceso a la Universidad. El 50 % de los alumnos presentados son del centro *A*, el 35 % del *B* y el 15 % del *C*. El centro *A* tiene un porcentaje de aprobados del 90 %, el *B* del 88 % y el *C* del 96 %.

a) ¿Cuál es el índice global de aprobados en la ciudad?

b) Se ha elegido un estudiante al azar y ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea alumno del centro *A*?



Sean los sucesos:

A = "asistir al centro A"

B = "asistir al centro B"

C = "asistir al centro C"

S = "el alumno suspende"

$\overline{S}$ = "el alumno no suspende"

a) $P\left(\overline{S}\right) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,35 \cdot 0,88 + 0,15 \cdot 0,96 = 0,902$

b) $P(A/S) = \dfrac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(S)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,1}{1 - 0,902} = 0,51$