15 ESTUDIO COMPLETO DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

En la presente obra se ha optado por unificar en una sola unidad diversos contenidos que en Real Decreto aparecen en apartados distintos, como es el estudio cinemático del movimiento armónico simple (MAS), que aparece en el bloque de cinemática, el estudio dinámico del MAS, contemplado en el bloque de dinámica o el estudio energético del MAS, correspondiente al bloque de energía..

Hemos preferido hacerlo de esa manera por dos razones fundamentalmente; la primera es porque se unifica todo el estudio completo de un tipo de movimiento fundamental en una única unidad. La segunda, porque al hacerlo de esta manera permite al estudiante hacer una retroalimentación de conceptos, refrescando de nuevo los procedimientos cinemáticos y dinámicos empleados en unidades anteriores. Haciéndolo de esta manera pensamos que facilitamos también la tarea del profesorado, ofreciéndole una visión de conjunto de un tipo de movimiento esencial para la comprensión, por ejemplo, de fenómenos físicos como la corriente alterna o la propagación de ondas.

Existen diversas maneras de llegar a establecer la ecuación de un oscilador armónico. Si revisamos distintos libros, veremos que cada uno opta por un camino distinto. En este nivel suele ser habitual tratar el movimiento armónico simple como la proyección de un movimiento circular uniforme, dado el carácter periódico de ambos. Sin embargo, en nuestro caso se ha optado por otro punto de partida, entre otras cosas porque el movimiento oscilatorio es un movimiento con entidad propia y las condiciones en que se produce no guardan relación física con las que corresponden a un movimiento circular uniforme (en el epígrafe 5, sin embargo, se expone dicha relación). Aquí se ha preferido empezar analizando cómo es el movimiento armónico y su representación gráfica, para, a partir de ella, comprender fácilmente la expresión sinusoidal que lo representa.

En el estudio dinámico del movimiento armónico simple se ha simplificado al máximo el tratamiento matemático, teniendo presente que el alumnado no está bien familiarizado con el cálculo diferencial. Para ello se ha optado por una vía intermedia consistente en relacionar la aceleración correspondiente a la actuación de una fuerza restauradora tipo Hooke con la aceleración obtenida del análisis cinemático del MAS.

En el epígrafe 4 se analizan las transformaciones energéticas que tienen lugar en este movimiento, a la luz de los estudiado en la unidad precedente.

Por último, se introduce un apartado especial dedicado al movimiento del péndulo cuyo comportamiento armónico se restringe a ángulos de separación con la vertical muy pequeños. Finalmente, se dedica un apartado al estudio de los fenómenos de resonancia, fundamentales para entender, por ejemplo, el funcionamiento de los instrumentos musicales.

Objetivos

1. Conocer y manejar las ecuaciones que describen el movimiento de un oscilador armónico.
2. Deducir la ecuación de posición de un oscilador a partir de sus gráficas, y viceversa, representar las gráficas del movimiento a partir de las ecuaciones.
3. Entender los aspectos dinámicos que intervienen en el MAS y deducir de ellos sus características periódicas.
4. Entender el movimiento de un oscilador desde el punto de vista de la conservación de la energía.
5. Describir el movimiento de un péndulo en aproximación armónica.

Relación de la unidad con las competencias clave

La competencia lingüística está presente en la correcta interpretación del texto. La competencia matemática está presente en todo el desarrollo, así como en el uso de las herramientas matemáticas. La competencia digital se relaciona fundamentalmente con las propuestas de *Investiga* y *Física, Tecnología y Sociedad*. La competencia de aprender a aprender es inherente al propio desarrollo autosuficiente de la unidad, basado en la idea primordial de toda la obra de que ésta pudiera servir para el aprendizaje autodidacta del alumnado.

Temporalización

Recomendable en seis sesiones lectivas.

PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje	Relación de actividades del LA	Competencias clave
Oscilaciones o vibraciones armónicas ■ ¿Por qué se producen los movimientos oscilatorios? ■ ¿Cuándo decimos que un movimiento oscilatorio es armónico?	1. Reconocer el carácter periódico del MAS y relacionarlo con la fuerza restauradora de Hooke.	1.1 Diseña y describe experiencias que pongan de manifiesto el MAS y determina las magnitudes involucradas.	A: 2,5,9 ER: 1,3 AT: 1,2,5,6,8,9	CCL CD
Trabajo mecánico **El movimiento armónico simple** ■ Formas de escribir la ecuación de un MAS ■ Velocidad y aceleración en el MAS ■ Gráficas de posición, velocidad y aceleración en el MAS	2. Conocer el significado físico de los parámetros que describen el movimiento armónico simple (M.A.S) y asociarlo con el movimiento de un cuerpo que oscile.	2.1 Escribe la posición de un oscilador armónico conociendo la amplitud, la frecuencia, el período y la fase inicial. 2.2 Obtiene y relaciona las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración y representarlas gráficamente en función del tiempo.	A: 1-10 ER: 1,2,3 AT: 3,4,6,7,9	CMCCT
Estudio dinámico del MAS ■ Período y frecuencia del oscilador armónico	3. Reconocer las características dinámicas del oscilador armónico.	3.1 Demuestra que la aceleración de un MAS es proporcional al desplazamiento utilizando la ecuación fundamental de la Dinámica. 3.2 Deduce el período y la frecuencia del MAS.	A: 11-13 AT: 10-14	CMCCT
Estudio energético del MAS ■ Conservación de la energía mecánica del oscilador armónico	4. Conocer las transformaciones energéticas que tienen lugar en un oscilador armónico.	4.1 Calcula las energías cinética, potencial y mecánica de un oscilador armónico aplicando el principio de conservación de la energía y realizar la representación gráfica correspondiente.	A: 14-16 AT: 15-20	CMCCT CD
Relación entre el MAS y el MCU	5. Interpretar el MAS como una proyección unidimensional del MCU.	5.1 Resuelve la posición, velocidad y aceleración de un MAS a partir de la proyección de las magnitudes del MCU.	A: 17-21 ER: 4, 5, 6 AT: 20-32	CMCCT CD CAA
Un ejemplo de oscilador: el péndulo simple	6. Reconocer el rango de validez del péndulo como oscilador armónico. 7. Interpretar correctamente las fuerzas que actúan en un péndulo simple.	6.1 Obtiene los valores de período y frecuencia de un péndulo simple relacionándolos con las variables correspondientes.	A: 17-19 AT: 21-23	CMCCT CD
Oscilaciones forzadas y fenómenos de resonancia ■ Fenómeno de resonancia	8. Entender cómo se producen los fenómenos de resonancia.	8.1 Pone ejemplos que pongan de manifiesto los fenómenos de resonancia.	* Ver recursos digitales de este epígrafe	CAA

LA: libro del alumno; A: actividades; ER: estrategias de resolución; AT: actividades y tareas;
CCL: comunicación lingüística; CMCCT: competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología; CD: competencia digital; CAA: Aprender a aprender; CSC: Competencias sociales y cívicas; CSIEE: Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor; CCEC: Conciencia y expresiones culturales

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL ALUMNO

Vídeo: Entender el movimiento armónico simple

Simulador: Oscilaciones amortiguadas
Vídeo: El movimiento armónico simple en 5 minutos
Animación: Movimiento armónico simple

Simulador: Gráficas del MAS (I y II)
Vídeo: Descripción y ecuaciones del MAS
Enlace web: Movimiento armónico simple
Animación: Cinemática del MAS con ejercicios resueltos

Vídeo: Muelles y péndulos (W. Lewin)
Animación: Dinámica del MAS con ejercicios resueltos

Simulador: Gráficas de energía en el MAS
Animación: Energía en el MAS con ejercicios resueltos

Simulador: 1. Proyección del movimiento circular uniforme; 2. MAS y movimiento circular uniforme

Unidad 15: Estudio completo del movimiento armónico simple

1. Oscilaciones o vibraciones armónicas
- 1.1. ¿Por qué se producen los movimientos oscilatorios?
- 1.2. ¿Cuándo decimos que un movimiento oscilatorio es armónico?

2. El movimiento armónico simple
- 2.1. Formas de escribir la ecuación de un movimiento armónico simple
- 2.2. Velocidad y aceleración en el movimiento armónico simple
- 2.3. Gráficas de posición, velocidad y aceleración en el movimiento armónico simple

3. Estudio dinámico del movimiento armónico simple
- 3.1. Periodo y frecuencia del oscilador armónico

4. Estudio energético del movimiento armónico simple
- 4.1. Conservación de la energía mecánica del oscilador armónico

5. Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme

PARA EL PROFESOR

Presentación

Documento: Biografía: Robert Hooke.

Documento: Movimiento vibratorio armónico simple.

Actividades de ampliación: Investiga: Período de un oscilador constituido por un muelle y una masa.

Actividades de ampliación: Investiga: Período de oscilación en péndulos simples.

BIBLIOGRAFÍA

ALONSO, M. y FINN, E.J.
Física. Addison-Wesley Longman. México 2000. Clásico de referencia en cualquier tema de Física. Tratamientos buenos y rigurosos.

FRENCH, A. P.
Vibraciones y ondas (curso de Física del MIT). Editorial Reverté. 1988. Excelente libro sobre la materia que atañe a esta unidad.

HECHT, E.
Física en perspectiva. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington (E.U.A.) 1987. Uno de los libros de Física más amenos que se han escrito. Aborda la comprensión de la Física desde un punto de vista conceptual. Se trata de un libro «casi de lectura» con muy pocas fórmulas.

HEWITT, P. G.
Física conceptual. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington (E.U.A) 1995. Se trata de un libro muy recomendable para la comprensión conceptual de la Física. Su lectura amena y la escasez de fórmulas hacen de este libro un material a recomendar a aquellos alumnos y alumnas que sientan interés por la Física.

TIPLER, P. A.
Física. Editorial Reverté (3ª edición). Barcelona 1995. Clásico de referencia obligada.

Simulador: 1. Ley del péndulo; 2. Influencia de *g* en el movimiento del péndulo

Práctica de laboratorio: Período de oscilación en péndulos simples.

Vídeo: 1. Resonancia (P. Hewitt); 2. Colapso del puente de Tacoma

Vídeo: Relojes atómicos

Simulador: Laboratorio virtual de masas y muelles

Práctica de laboratorio: Energía mecánica en el movimiento del péndulo simple

Tests de autoevalución interactivos

6. Un ejemplo de oscilador: el péndulo simple

7. Oscilaciones forzadas y fenómenos de resonancia

7.1. Fenómeno de resonancia

Física, tecnología y sociedad

Las oscilaciones que marcan nuestro ritmo

Técnicas de trabajo y experimentación

Período de un oscilador constituido por un muelle y una masa

Estrategias de resolución y Actividades y tareas

Síntesis de la unidad y Evaluación

Actividades de ampliación: Investiga: Energía mecánica en el movimiento del péndulo simple.

Documento: Consecuencias de la resonancia.

Pruebas de evaluación

WEBGRAFÍA

Educaplus
http://www.educaplus.org/
Excelente web con buenos simuladores.

Paul G. Hewitt
https://goo.gl/C6cKsb
Canal de Youtube con los interesantes vídeos del profesor Paul G. Hewitt. En inglés.
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ (Curso interactivo de Física con ejercicios y simulaciones java)

Físicalab
https://www.fisicalab.com
Página web con propuestas de ejercicios.

Walter Lewin
http://videolectures.net/walter_h_g_lewin/
Canal con las interesantes lecciones del profesor Walter H.G. Lewin del MIT (en inglés).

https://phet.colorado.edu/es
Colección de simuladores.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

TRABAJO Y ENERGÍA MECÁNICA

Se sugiere la lectura del texto introductorio acompañado del video propuesto que ilustra el texto. Posteriormente deben plantearse las cuestiones previas que nos permitirán desvelar algunos equívocos frecuentes.

Vídeo:
ENTENDER EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

1. Oscilaciones o vibraciones armónicas

Las conclusiones que deben extraer los alumnos de este apartado son básicamente dos:

- Un movimiento oscilatorio tiene lugar cuando un cuerpo es apartado de su posición de equilibrio estable.

  En estas circunstancias, aparecen fuerzas restauradoras sobre el sistema que tienden a devolverlo a su posición original. La acción de estas fuerzas y la inercia del cuerpo explican el movimiento oscilatorio.
- El movimiento oscilatorio es de tipo armónico si las fuerzas restauradoras que operan sobre el sistema son de tipo Hooke (dependientes linealmente con la distancia y opuestas a la separación).

Vídeo:
EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE EN 5 MINUTOS

Enlace web con simulador:
OSCILACIONES AMORTIGUADAS

2. El movimiento armónico simple

En este apartado es fundamental que se llegue a una comprensión total acerca de las distintas maneras de escribir la ecuación de un oscilador armónico expuestas en el texto. Sin embargo, los alumnos deben ser capaces de escribir la ecuación en función de las condiciones que se especifiquen en un problema, como el sentido en el que comienza a oscilar el cuerpo, por ejemplo. Para ello, podrá introducirse la constante de fase pertinente, según se emplee la función seno o coseno. Es muy importante trabajar las distintas formas que se abordan en la página 358. Para ello es necesario un buen grado de conocimientos de trigonometría y las relaciones esenciales que pueden establecerse a partir de la circunferencia goniométrica.

Para los apartados de velocidad y aceleración del MAS, es absolutamente necesario haber trabajado bien el apartado 7.3. de las Herramientas matemáticas, particularmente en lo que se refiere al uso de la regla de la cadena y las estrategias de resolución 4 y 5 que se exponen en la unidad. Sólo de esa manera podrán entender y resolver correctamente velocidades y aceleraciones a partir de la ecuación de posición.

A su vez, como ya se ha mencionado, uno de los objetivos fundamentales que debe trabajarse en este apartado es el de las representaciones gráficas de las magnitudes cinemáticas del movimiento, así como la obtención de sus ecuaciones a partir de dichas representaciones.

Enlace web con simulador:
GRÁFICAS DEL MAS (I YII)

Animación:
CINEMÁTICA DEL MAS CON EJERCICIOS RESUELTOS

Enlace web:
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Vídeos:
DESCRIPCIÓN Y ECUACIONES DEL MAS

3. Estudio dinámico del MAS

Como se ha comentado ya, esta sería la forma adecuada de comenzar para obtener la ecuación de posición del oscilador armónico. Dado que en este nivel los alumnos no han resuelto ecuaciones diferenciales, basta con utilizar la demostración que se hace en el libro de que una ecuación como la que hemos elegido es una solución de la ecuación siempre y cuando se considere la relación entre la frecuencia angular del oscilador y las características físicas del oscilador (m y k). De ese modo, a su vez, podemos obtener las características periódicas del movimiento.

Animación:
DINÁMICA DEL MAS CON EJERCICIOS RESUELTOS

Vídeo (en inglés):
MUELLES Y PÉNDULOS (W. LEWIN)

4. Estudio energético del MAS

Debe trabajarse el estudio de las variaciones de la energía mecánica (cinética y potencial) en sus dos variantes:

- variación temporal (en función de t).
- variación espacial (en función de la posición).

Enlace web con simulador:
GRÁFICAS DE ENERGÍA EN EL MAS

Animación:
ENERGÍA EN EL MAS CON EJERCICIOS RESUELTOS

5. Relación entre el MAS y el MCU

En este apartado se expone un procedimiento alternativo para obtener, a partir de las proyecciones de un movimiento circular uniforme, las ecuaciones del movimiento armónico simple, ya deducidas en epígrafes anteriores. Para ello se comienza planteando una pregunta referente a las informaciones habituales publicadas en revistas de astronomía sobre las posiciones de los satélites de Júpiter.

Enlace web con simulador:
PROYECCIÓN DEL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME
MAS Y MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

6. Un ejemplo de oscilador: el péndulo simple

Al empezar a abordar el movimiento del péndulo simple, debemos hacer una llamada de atención muy importante sobre un error habitual: la componente radial del peso cuando el péndulo se halla en movimiento no es igual a la tensión de la cuerda, sino ligeramente menor. Hay que recalcar este hecho, pues es un error bastante extendido considerar que son iguales. Esa consideración no serviría para explicar la descripción de arcos de circunferencia por la masa del péndulo, lo que exige una fuerza centrípeta neta que es la resultante de la tensión y la componente radial del peso. La igualdad entre ambas fuerzas solo existiría en situación de reposo en la posición de equilibrio, pero nunca en movimiento. No obstante, para los cometidos de este punto fijaremos nuestra atención en la componente tangencial del peso como fuerza restauradora.

También es importante insistir en la validez de la aproximación armónica en el caso del péndulo, planteada en el texto.

Enlace web con simulador:
LEY DEL PÉNDULO
INFLUENCIA DE *g* EN EL MOVIMIENTO DEL PÉNDULO

7. Oscilaciones forzadas y fenómenos de resonancia

El fenómeno de la resonancia es de suma importancia en el mundo de la física. Así, por ejemplo, los instrumentos constan de cavidades resonantes cuyo cometido es amplificar determinadas frecuencias.

La resonancia es un fenómeno que hay que tener muy en cuenta por los riesgos que puede entrañar. Nuestro cuerpo presenta determinados modos normales de vibración, de modo que ciertas vibraciones externas, como pueden ser las de algunas máquinas, pueden llegar a producir efectos peligrosos.

Un interesante caso de resonancia natural es el de las impresionantes mareas en la bahía de Fundy, en Canadá. El período entre las sucesivas olas de marea alta coincide con el período natural debido a las dimensiones de la bahía (tiempo que tarda el agua que penetra en ella en ir y volver rebotado). De ese modo se produce el fenómeno de resonancia que da lugar a esas espectaculares mareas. Puede pedirse a los alumnos un trabajo de investigación sobre ese hecho.

Vídeo:
RESONANCIA (PAUL G. HEWITT)

Vídeo:
COLAPSO DEL PUENTE DE TACOMA

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES (páginas 354/371)

Comprueba lo que sabes

1. ¿Cómo definirías un movimiento oscilatorio? ¿Se trata de un movimiento periódico?

La pregunta tiene por objetivo verificar si los alumnos tienen una idea previa acerca de lo que es un movimiento oscilatorio.

2. ¿Qué fuerza hace que oscile un cuerpo unido a un muelle horizontal? ¿Qué fuerza hace que oscile un péndulo simple?

Dado que se han estudiado las fuerzas restauradoras, en el caso del muelle no debería haber dudas en la contestación. Más interesante es el análisis de cuál es la fuerza restauradora en el caso el péndulo (la componente tangencial del peso).

3. La distancia entre los extremos de la oscilación de un péndulo va disminuyendo con el tiempo debido a la fricción con el aire. ¿Cómo crees que afecta ese hecho a cada una de las siguientes magnitudes: energía mecánica, periodo y frecuencia?

Se pide que aventuren una respuesta que será analizada en la unidad. La amplitud solo afecta a la energía mecánica del oscilador.

Actividades

1 Se hace oscilar desde la posición de equilibrio un cuerpo unido a un muelle horizontal, de modo que la separación máxima de dicha posición es de 3 cm. Si se han contado 20 oscilaciones en 5 s, ¿cuál es la ecuación representativa de dicho movimiento?

La amplitud o máxima elongación es $A = 3$, mientras que el periodo vale:

$$T = \frac{5}{20} = 0{,}25 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 8\pi \text{ rad/s}$$

Si deseamos representar la ecuación en función del seno, será:

$$x = 3 \text{ sen } 8\pi t \text{ cm}$$

Si lo hacemos en función del coseno, puede escribirse del siguiente modo:

$$x = 3 \cos (8\pi t \pm \pi/2) \text{ cm}$$

2 Indica cómo convendría escribir la ecuación del movimiento anterior si el cuerpo comienza a oscilar hacia la izquierda. ¿Y si lo hace hacia la derecha?

Si queremos dar la información completa, incluyendo el sentido inicial del movimiento, es conveniente usar la ecuación en forma de coseno. Si el cuerpo comienza a moverse hacia la izquierda (x negativas), la ecuación es:

$$x = 3 \cos \cos (8\pi t - \pi/2) \text{ cm}$$

3 ¿Qué ecuaciones representan los movimientos 1 y 2 de la figura 15.16?

¿Cuál es el desfase, o diferencia de fase, entre ambos?

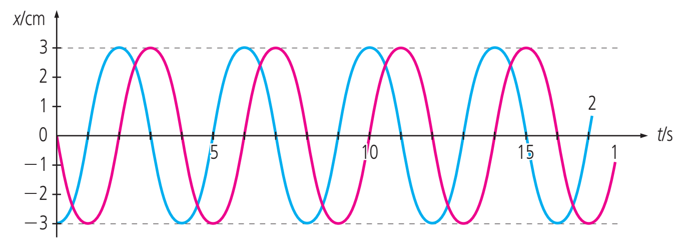


Figura 15.16.

En ambos movimientos, $A = 3$ cm y $T = 4$ s, por lo que:

$$\omega = \pi/2 \text{ rad/s}$$

en consecuencia, la ecuación que representa el movimiento 1 es:

$$x_1 = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

mientras que el movimiento 2 se representa por:

$$x_2 = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2}t - \pi\right) \text{ cm}$$

El desfase entre ambos es, por tanto, de $\pi/2$ rad.

4 ¿Cuál es la ecuación del MAS representado en la siguiente gráfica?

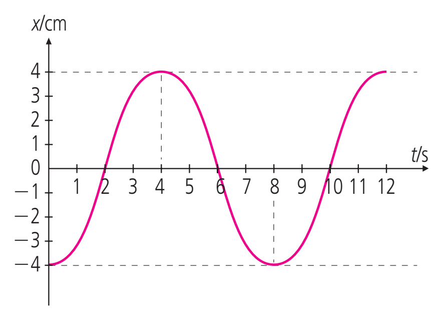


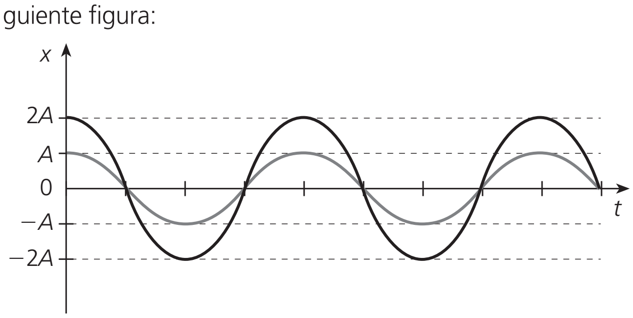
Figura 15.15.

Puesto que $A = 4$ cm, $T = 8$ s y $\omega = \pi/4$ rad/s, la ecuación puede escribirse como:

$$x = 4 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

5 Representa en una misma gráfica los movimientos de dos osciladores del mismo periodo, uno con doble amplitud que otro, que comienzan a oscilar desde el extremo positivo.

La representación gráfica pedida se puede observar en la siguiente figura:



6 **Comprueba la validez de las ecuaciones de posición de los cuatro casos expuestos en la página anterior, teniendo en cuenta los tiempos que se indican y sustituyendo por 2 π/T en cada una de las expresiones dadas.**

Si partimos de la posición de equilibrio hacia la derecha, la oscilación viene dada por la siguiente expresión:

$$x = A\ \text{sen}\frac{2\pi}{T}t$$

Sustituimos los distintos valores de t:

- Cuando $t = 0$, $x = 0$.
- Cuando $t = T/4$, $x = A\ \text{sen}\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = A$.
- Cuando $t = T/2$, $x = A\ \text{sen}\ \pi = 0$.
- Cuando $t = 3T/4$, $x = A\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{T}\frac{3T}{4} = -A$.

7 **Un cuerpo unido a un muelle comienza a oscilar horizontalmente desde su posición extrema, a 4 cm de la posición de equilibrio, con un periodo de 0,3 s. Calcula:**

a) Su velocidad al pasar por la posición de equilibrio.

b) Su velocidad cuando $x = 2$ cm.

Con los datos ofrecidos, podemos deducir que $A = 4$ cm y $\omega = \frac{2\pi}{T} = 20{,}9$ rad/s.

a) La velocidad del cuerpo al pasar por la posición de equilibrio es máxima y vale:

$$v = \omega A = 83{,}6 \text{ cm/s}$$

b) Cuando pasa por $x = 2$ cm, la velocidad será:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 72{,}4 \text{ cm/s}$$

8 **Determina la aceleración en los extremos, y en las posiciones $x = 2$ cm, y $x = 1$ cm, de un oscilador armónico que tenga las características expuestas en la actividad anterior.**

En los extremos, la aceleración es máxima y vale:

$$a = -\omega^2 A = \pm 17{,}48 \text{ m/s}^2$$

En $x = 2$ cm $= 0{,}02$ m valdrá:

$$a = -\omega^2 x = -8{,}74 \text{ m/s}^2$$

Mientras que en $x = 1$ cm $= 0{,}01$ m será:

$$a = -\omega^2 x = -4{,}37 \text{ m/s}^2$$

9 **Explica como varían la velocidad y la aceleración máximas de un oscilador:**

a) Si se duplica la amplitud sin modificar el periodo.

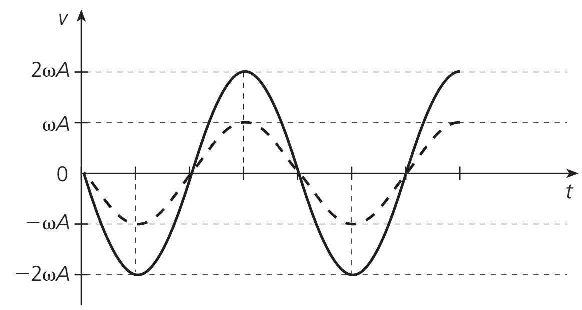
b) Si se duplica la frecuencia sin modificar la amplitud.

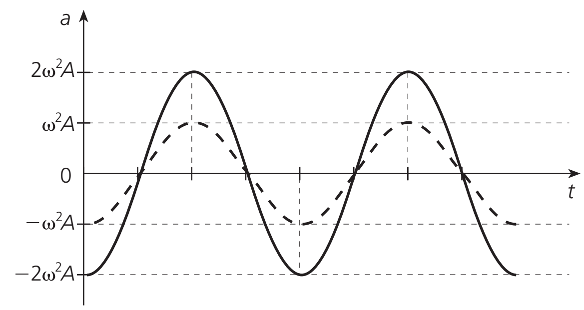
c) Haz las gráficas comparativas con la oscilación normal.

Las expresiones de la velocidad y de la aceleración máximas son, respectivamente:

$$v_{\text{máx}} = \pm\omega A$$
$$a_{\text{máx}} = -\omega^2 A$$

a) Al ser $\omega = 2\pi/T$, este factor se mantendrá constante si T no cambia. Teniendo esto en cuenta, al duplicar A, se duplicarán $v_{\text{máx}}$ y $a_{\text{máx}}$; las nuevas gráficas quedan representadas por las líneas contínuas (las líneas de trazos representan las originales).





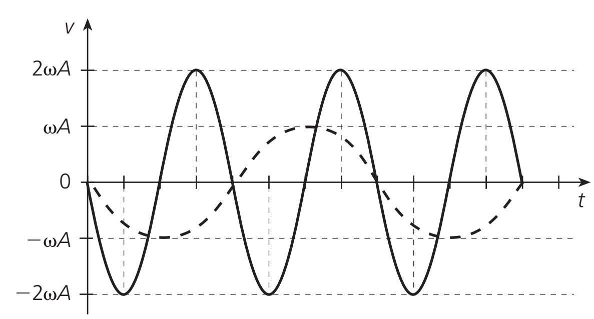
b) Escribiendo las expresiones en función de la frecuencia, tenemos:

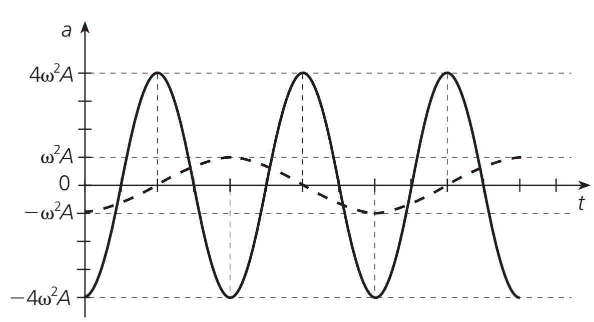
$$v_{\text{máx}} = 2\pi f A \qquad a_{\text{máx}} = -4\pi^2 f^2 A$$

Por tanto, al duplicar f sin variar A, $v_{\text{máx}}$ se duplica y $a_{\text{máx}}$ se cuadruplica.

Por otro lado, al duplicar f, T se reduce a la mitad; las nuevas gráficas son las que aparecen representadas por las líneas continuas (las líneas de trazos representan las originales).

La gráficas correspondientes a la velocidad y a la aceleración serán:





10 **Representa las gráficas de posición, velocidad y aceleración frente al tiempo de un cuerpo unido a un muelle que comienza a oscilar horizontalmente desde un extremo situado a 5 cm de la posición de equilibrio, con una frecuencia de 5 Hz.**

La ecuación de posición para $\omega = 2\pi f = 10\pi$ rad/s y $A = 5$ cm, será:

$$x = 5 \cos 10\pi t \text{ cm}$$

Por tanto:

$$v = \frac{dx}{dt} = -50\pi \text{ sen } 10\,\pi t \text{ cm/s}$$

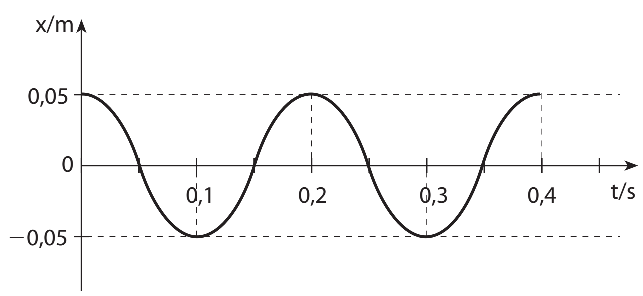
mientras que:

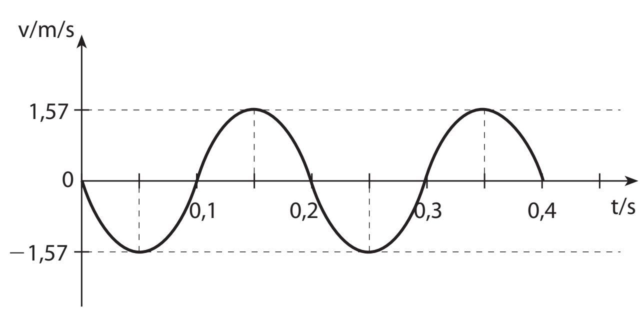
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -500\pi^2 \cos 10\pi t \text{ cm/s}^2$$

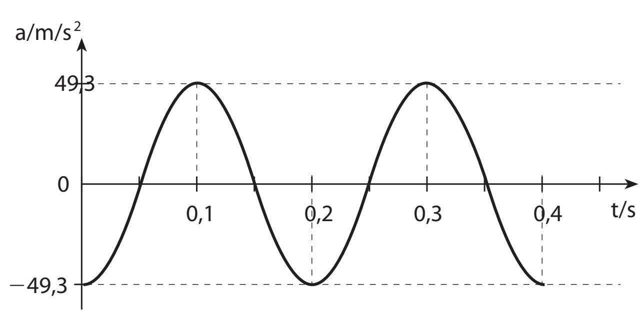
donde:

$$v_{\text{máx}} = \pm\omega A = \pm 50\,\pi \text{ cm/s} = \pm 1{,}57 \text{ m/s}$$

$$a_{\text{máx}} = \pm\omega^2 A = \pm 500\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = \pm 49{,}3 \text{ m/s}^2$$







11 **Razona cómo podríamos comparar masas midiendo sus frecuencias de oscilación al colgarlas de un mismo resorte.**

Si colgamos las masas de un mismo resorte (misma k), se cumplirá en ambos osciladores que: $\omega^2 = k/m$ y $\omega'^2 = k/m'$

Por tanto, $m\omega^2 = m'\omega'^2$, y como, además, $\omega = 2\pi f$, se concluye:

$$\frac{m}{m'} = \frac{f'^2}{f^2}$$

Así, la relación entre las masas es igual a la relación inversa entre los cuadrados de las frecuencias de oscilación.

12 **La frecuencia de oscilación de cierta masa *m* en un resorte es el triple que la de otra masa *m'*. ¿Qué relación guardan ambas entre sí?**

Según se desprende de la expresión anterior, m será la novena parte de m', es decir:

$$m = \frac{1}{9} \cdot m'$$

13 **Un oscilador consistente en una masa unida a un resorte horizontal de constante restauradora $k = 100$ N/m se mueve según la ecuación:**

$$x = 6{,}5 \cos 5\,\pi t \text{ cm}$$

a) **¿Cuál es la masa del oscilador?**

b) **¿Cuál es la frecuencia de oscilación?**

c) **¿Cuál es la velocidad máxima de su movimiento?**

d) **¿Cuál es la velocidad cuando la elongación es igual a la mitad de la amplitud?**

e) **¿Cuál es su aceleración máxima?**

a) De la ecuación $x = 6{,}5 \cos 5\pi t$ se deduce que: $A = 6{,}5$ cm y $\omega = 5\pi$ rad/s.

Dado que $\omega^2 = k/m$, podemos determinar m:

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{100}{25\pi^2} = 0{,}40 \text{ kg}$$

b) La frecuencia de oscilación es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2{,}5 \text{ Hz}$$

c) La velocidad máxima de su movimiento es:

$$|v_{\text{máx}}| = \omega A = 102{,}1 \text{ cm/s} = 1{,}02 \text{ m/s}$$

d) Cuando la elongación es la mitad de la amplitud, la velocidad es:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\, v_{\text{máx}} = 88{,}4 \text{ cm/s} = 0{,}884 \text{ m/s}$$

e) La aceleración máxima es:

$$|a| = \omega^2 A = 16 \text{ m/s}^2$$

14 **Si la amplitud de un cuerpo que oscila con MAS es *A*, determina en qué punto sus energías cinética y potencial son iguales.**

Su energía total es $\frac{1}{2}kA^2$. El punto en el que la energía potencial se iguala con la cinética será aquel en el que ambas expresiones valgan la mitad de la energía total. Por tanto: $E_p = E_{total}/2$.

Es decir:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

Resolviendo, obtenemos:

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0{,}71 \cdot A$$

15 **Un cuerpo de 5 kg choca a 10 m/s contra un muelle de constante elástica *k* = 25 N/m. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0,2. Calcula la longitud que se comprime el muelle si consideramos su masa despreciable.**

Al chocar el cuerpo contra el muelle y comprimirlo, parte de la energía mecánica se disipa en forma de trabajo de rozamiento (no conservativo). Dicho trabajo es igual a la variación de energía mecánica del sistema:

$$W_{roz} = \Delta E$$

por tanto:

$$-F_r x = E_f - E_0$$

El punto final es el de máxima compresión del muelle, arrastrado por la masa de 5 kg. En ese punto, la energía mecánica del sistema es la energía potencial elástica del muelle comprimido, mientras que la energía mecánica inicial era la cinética del cuerpo. Así pues:

$$-F_r x = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow -\mu mgx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

de donde:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \mu mgx - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

Sustituyendo los datos, llegamos a:

$$12{,}5x^2 + 9{,}8x - 250 = 0$$

Resolviendo, obtenemos:

$$x = 4{,}097 \text{ m}$$

16 **Un cuerpo de 1,4 kg de masa se conecta a un muelle de constante elástica 15 N/m, y el sistema oscila tal como indica la figura 15.23, con amplitud de 2,0 cm. Calcula:**

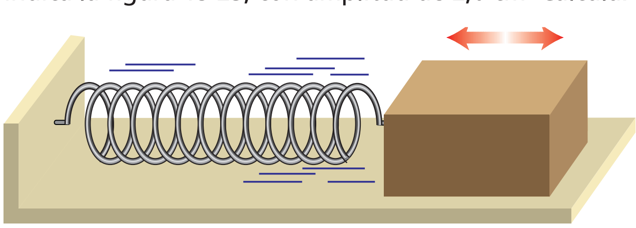


Figura 15.23.

a) **La energía total del sistema.**

b) **La energía cinética y la potencial cuando el desplazamiento del cuerpo es de 1,3 cm.**

c) **La velocidad máxima del cuerpo..**

a) La energía total del sistema viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

b) Cuando $x = 13$, la velocidad del cuerpo es:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3{,}27 \text{ rad/s}$$

Por tanto:

$$v = \pm 4{,}97 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

En consecuencia, la energía cinética en ese punto es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 1{,}73 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

y la energía potencial es:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 1{,}27 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Puede observarse que la suma de ambos términos da como resultado el valor calculado en el apartado **a)**.

c) La velocidad máxima del cuerpo es:

$$v = \omega A = 6{,}54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

17 **¿Cómo varía el periodo de un péndulo al duplicar la longitud? ¿Y al disminuirla a una tercera parte de su longitud original?**

Puesto que el periodo de un péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

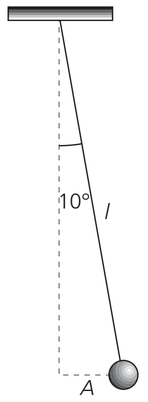
al duplicar la longitud, *l*, el período aumenta en un factor $\sqrt{2}$. Al reducir la longitud inicial hasta 1/3, el período disminuye en un factor $1/\sqrt{3}$.

18 **¿Bajo qué condiciones podemos decir que un péndulo simple oscila de forma armónica? ¿Cuál es la fuerza restauradora en el caso del péndulo simple?**

Un péndulo simple puede considerarse como un oscilador armónico solo si oscila con amplitudes pequeñas. La fuerza restauradora es la componente tangencial del peso, que actúa en la dirección del movimiento.

19 **Se deja oscilar libremente un péndulo de 2 m de longitud después de haberlo desplazado 10° hacia la derecha de la vertical. ¿Cuál es la ecuación que nos da la elongación en función del tiempo? ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia de oscilación de dicho péndulo?**

La siguiente figura ilustra el enunciado del problema:



Como se observa en ella:

$$A = l \text{ sen } 10° = 0{,}35 \text{ m}$$

A su vez, dado que $\omega = \sqrt{g/l}$, su valor es:

$$\omega = 2{,}2 \text{ rad/s}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento del péndulo es:

$$x = A \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}35 \text{ sen } \left(2{,}2\ t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

El período de dicho movimiento vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}84 \text{ s}$$

De este modo, la frecuencia será:

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}35 \text{ Hz}$$

SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES FÍSICA, TECNOLOGÍA Y SOCIEDAD (página 372)

Análisis

1 **¿En qué propiedad del cuarzo se basan los relojes de cuarzo? Descríbela.**

En las propiedades piezoeléctricas del cuarzo. Se describe en el tercer párrafo del texto.

2 **¿Cómo aparece la estructura hiperfina del nivel 6s del átomo de cesio 133?**

Como se describe en el último párrafo del texto, la estructura hiperfina se debe a la interacción del espín electrónico y el nuclear.

Propuesta de investigación

3 **Busca información e imágenes en Internet y elabora una presentación acerca de alguno de los siguientes temas:**

a) **Efecto piezoléctrico del cuarzo y su aplicación.**

b) **Funcionamiento de un reloj atómico de cesio 133.**

Los alumnos deben realizar este trabajo a partir de la documentación que encuentren en internet sobre los mencionados proyectos que deben elegir.

SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES TÉCNICAS DE TRABAJO Y EXPERIMENTACIÓN (página 373)

1 **¿Depende el período de la amplitud de la oscilación?**

No debe encontrarse dependencia entre el período y la amplitud de oscilación.

2 **Representa gráficamente, para la primera parte, la masa frente al período y, para la segunda, la constante elástica frente al período. ¿Qué conclusiones obtienes?**

Obviamente, con dos puntos no puede extraerse conclusión válida alguna sobre la forma de la dependencia de las magnitudes solicitadas. Se sugiere usar más masas y muelles de distintas constantes elásticas y solicitar que representen también el período frente a la raíz cuadrada de la masa y la constante elástica.

3 **¿Cambia el valor de la constante del muelle si se corta este por la mitad? En caso afirmativo, ¿de qué manera se modifica el período?**

Como se vio ya en la actividad 5 de la unidad 13, la constante se duplica.

SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES Y TAREAS FINALES (páginas 376/377)

El movimiento armónico simple

1 **Razona cómo son los movimientos de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de π radianes. ¿En qué punto de la trayectoria se cruzan?**

Un ejemplo de movimiento de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de π radianes sería el caso de dos osciladores que parten de extremos opuestos o que, partiendo de la posición de equilibrio, comienzan a oscilar en sentidos opuestos. Los dos osciladores se cruzarán en la posición de equilibrio.

2 **Dos partículas efectúan movimientos armónicos simples de la misma amplitud y periodo a lo largo de la misma recta. ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas si se cruzan cuando su elongación es la mitad de la amplitud?**

Si $x = A\cos\omega t$ es la ecuación de uno de los osciladores, la correspondiente al otro será $x = A\cos(\omega t + \delta)$. Cuando $x = A/2$, se cumple que:

$$A/2 = A\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t = 1/2$$

Es decir:

$$\omega t = \pi/3 \text{ rad}$$

El otro oscilador se encuentra en ese mismo instante en la misma posición, si bien su sentido de movimiento opuesto. Por tanto, debe cumplirse que:

$$\omega t + \delta = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3 \Rightarrow \delta = 4\pi/3 \text{ rad}$$

o bien:

$$\delta = -2\pi/3 \text{ rad}$$

3 **Una partícula que oscila armónicamente con una amplitud de 15 cm tarda 1,5 s en realizar una oscilación completa. Sabiendo que en $t = 0$ su velocidad es nula y su elongación es positiva, determina:**

a) **La ecuación de su movimiento $x(t)$.**

b) **La velocidad y la aceleración de la oscilación en $t = 0{,}5$ s.**

c) **Los valores absolutos de velocidad y aceleración máximas.**

a) Dadas las condiciones iniciales del problema, la ecuación es de la forma $x = A\cos\omega t$, siendo $A = 15$ cm y $\omega = 2\pi/T = 4\pi/3$, pues $T = 3/2$ s. Por tanto:

$$x = 15\cos\frac{4\pi}{3}t \text{ cm}$$

b) Derivando una y dos veces respecto al tiempo, obtenemos:

$$v = -15\frac{4\pi}{3}\ \text{sen}\ \frac{4\pi}{3}\ t = -20\pi\ \text{sen}\frac{4\pi}{3}t$$

$$v\ (t = 0{,}5\ \text{s}) = -54{,}4\ \text{cm/s}$$

$$a = -15\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \cos\frac{4\pi}{3}t = -\frac{80\pi^2}{3}\cos\frac{4\pi}{3}t$$

$$a(t = 0{,}5\ \text{s}) = 131{,}59\ \text{cm/s}^2$$

c) Los valores absolutos de $v_{\text{máx}}$ y $a_{\text{máx}}$ son, respectivamente:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 62{,}8\ \text{cm/s}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = 263{,}2\ \text{cm/s}^2$$

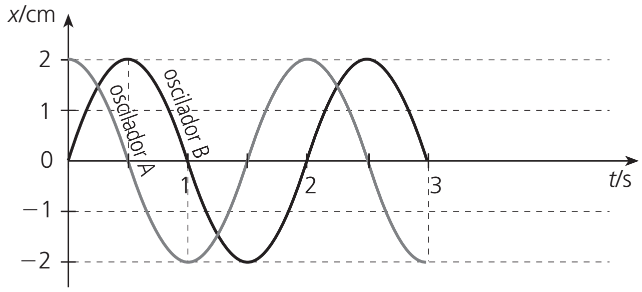
4 **Representa en una misma gráfica los movimientos de los siguientes osciladores:**

a) Oscilador A: se suelta desde el extremo $x = +2$ cm de la posición de equilibrio y su periodo es de 2 s.

b) Oscilador B: es idéntico al anterior, pero la oscilación parte de la posición de equilibrio hacia amplitudes positivas.

c) ¿Qué ecuaciones representan a ambos osciladores? ¿En qué puntos se cruzan estos?

La gráfica correspondiente es la siguiente:



Y las ecuaciones son:

- Para el oscilador A:

$$x_A = 0{,}02\cos\pi t = 0{,}02\ \text{sen}\ (\pi t + \pi/2)\ \text{m}$$

- Para el oscilador B:

$$x_B = 0{,}02\ \text{sen}\ \pi t\ \text{m}$$

En ambos casos, $T = 2$ s y $\omega = 2\pi/T = \pi$ rad.

Los puntos donde se cruzan ambos osciladores se calculan haciendo $x_A = x_B$; por lo que:

$$\cos\pi t = \text{sen}\ \pi t \Rightarrow \text{tg}\ \pi t = 1$$

valor que corresponde a un ángulo de $\pi/4$ rad.

Así:

$$\pi t = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t = 1{,}25\ \text{s}$$

valores de tiempo que corresponden a las dos primeras veces que se cruzan, cosa que ocurre en los puntos:

$$x = 0{,}02\ \text{sen}\ (\pi\cdot 0{,}25) = 0{,}0141\ \text{m} = 1{,}41\ \text{cm}$$

$$x' = 0{,}02\ \text{sen}\ (\pi\cdot 1{,}25) = -0{,}0141\ \text{m} = -1{,}41\ \text{cm}$$

5 **Dos osciladores armónicos cuyas ecuaciones de posición son $x_1 = A\cos(\omega t + \pi/2)$ y $x_2 = A\cos(\omega t - \pi/2)$. Determina:**

a) La posición inicial.

b) El sentido en que comienzan a moverse.

c) El punto en que se cruzan.

d) La diferencia de fase entre los dos.

a) La posición inicial, para $t = 0$, resulta ser cero en ambos casos.

b) La ecuación del primer oscilador corresponde a un oscilador que comienza a oscilar hacia valores negativos de x desde la posición de equilibrio.

Esto puede comprobarse haciendo $t = T/4$. Dado que $T = 2\pi/\omega$, entonces:

$$t = 2\pi/4\omega$$

Por lo que:

$$x = A\cos\ (\omega t + \pi/2) = A\cos\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{4\omega} + \frac{\pi}{2}\right)$$

es decir:

$$x = A\cos\pi = -A$$

Como puede observarse, al cabo de $T/4$ s, el oscilador se encuentra en la posición $x = -A$.

Por el contrario, la segunda corresponde a un oscilador que se mueve hacia valores positivos de x (hacia la derecha) desde la posición de equilibrio. Si se repite el proceso para $t = T/4$, se encontrará que $x = A$.

c) Cuando se cruzan, las posiciones de ambos coincide, por lo que:

$$A\cos\ (\omega t + \pi/2) = A\cos\ (\omega t - \pi/2)$$

Desarrollando la expresión, tenemos:

$$\cos\omega t\cdot\cos\pi/2 - \text{sen}\ \omega t\cdot\text{sen}\ \pi/2 =$$
$$= \cos\omega t\cdot\cos\pi/2 + \text{sen}\ \omega t\cdot\text{sen}\ \pi/2$$

De donde:

$$2\ \text{sen}\ \omega t = 0$$

o bien, dado que $\omega = 2\pi/T$:

$$2\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{T}t = 0$$

igualdad que se cumple siempre que:

$$\frac{2\pi}{T}t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi\ldots$$

Por tanto, se cumple cuando:

$$t = 0, \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}\ldots$$

valores de tiempo que corresponden a $x = 0$. Es decir, como era de prever, se cruzarán siempre en la posición de equilibrio.

d) Como se desprende de las ecuaciones, la diferencia de fase es de π rad.

6 **La ecuación de posición de un oscilador es:**

$$x = 5\cos\ (\pi t + \pi)\ \text{cm}$$

Determina:

a) La amplitud, la frecuencia y el periodo de oscilación.

b) La posición inicial de la partícula.

c) **La gráfica en los cuatro primeros segundos.**

d) **La velocidad y la aceleración del oscilador en $t = 5$ s.**

e) **La velocidad y la aceleración máximas.**

a) Dado que $\omega = 2\pi f$, entonces:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

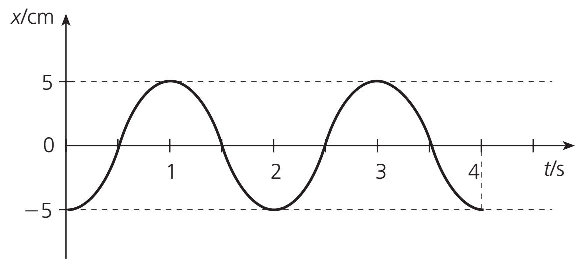
y, por tanto, $T = 2$ s.

b) Como se desprende de la ecuación, $A = 5$ cm.

La posición inicial, es decir, para $t = 0$, es:

$$x_0 = 5 \cos \pi = -5 \text{ cm}$$

c) La gráfica en los cuatro primeros segundos es:



d) La velocidad y la aceleración vienen dadas, respectivamente, por:

$$v = \frac{dx}{dt} = -5\pi \text{ sen } (\pi t + \pi) \text{ cm/s}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -5\pi^2 \cos (\pi t + \pi) \text{ cm/s}^2$$

cuyos valores en $T = 5$ s son:

$$v\ (5) = 0$$

$$a\ (5) = -5\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

e) La velocidad máxima es:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 5\pi \text{ cm/s}$$

y aceleración:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = 5\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

7 **Una partícula oscila en el eje X con movimiento armónico simple. Si parte de la posición de equilibrio y comienza a oscilar hacia la derecha con una amplitud de 4 cm y una frecuencia de 1/3 Hz, determina:**

a) **La ecuación de posición.**

b) **La velocidad y la aceleración cuando $t = 5$ s.**

c) **La velocidad cuando pasa por la posición $x = -1$ cm.**

d) **El desplazamiento neto y el espacio recorrido en 1 s.**

a) Con los datos ofrecidos, deducimos que:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi/3 \text{ rad}}{\text{s}}$$

Si la particular comienza a oscilar hacia la derecha, su ecuación puede escribirse de estas dos maneras:

$$x = 4 \text{ sen} \frac{2\pi}{3} t \text{ cm} \qquad x = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

b) Eligiendo la primera expresión, la velocidad y la aceleración de la partícula vienen dadas por:

$$v = \frac{8\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} t \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

$$a = -\frac{16\pi^2}{9} \text{sen} \frac{2\pi}{3} t \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

Sustituyendo para $t = 5$ s, obtenemos:

$$v\ (5) = -4{,}19 \text{ cm/s};\ a\ (5) = 15{,}2 \text{ cm/s}^2$$

c) La velocidad en función de la posición es:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

para $x = -1$ cm, la velocidad será:

$$v = -8{,}11 \text{ cm/s}$$

d) El desplazamiento neto será:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 3{,}46 - 0 = 3{,}46 \text{ cm}$$

Puesto que $t = 1$ s es un tiempo superior a $T/4$ (0,75 s), la partícula se encuentra a 3,46 cm de la posición de equilibrio, pero encaminándose hacia ella después de pasar por el punto de máxima elongación.

En consecuencia, el espacio recorrido es:

$$s = A + (4 - 3{,}46) = 4{,}54 \text{ cm}$$

8 **Un oscilador armónico tiene una aceleración de 12 cm/s² cuando su elongación es de 3 cm. Si el valor absoluto de su aceleración máxima es de 16 cm/s², determina:**

a) **La amplitud, el periodo y la frecuencia.**

b) **La ecuación de su movimiento si comienza a oscilar desde su máxima amplitud positiva.**

c) **La ecuación de su movimiento si en $t = 0$ la posición es $x = 2$ cm y se mueve hacia la posición de equilibrio.**

Teniendo en cuenta que el valor absoluto de la aceleración viene dado por:

$$|a| = \omega^2 x$$

a) Entonces, de los datos del problema se obtiene que $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$. Como $|a_{máx}| = \omega^2 A$, entonces $A = 4$ cm. A su vez:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}14 \text{ s} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = 0{,}32 \text{ s}^{-1}$$

b) La ecuación correspondiente en esas condiciones es:

$$x = A \cos \omega t = 4 \cos 2t \text{ cm}$$

c) En $t = 0$ se cumple que:

$$2 = 4 \cos \delta \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{3} \text{rad}$$

Así pues, la ecuación es:

$$x = 4 \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \text{cm}$$

9 **Un oscilador armónico tiene una velocidad de 6 cm/s cuando pasa por la posición $x = 1$ cm y de 2 cm/s cuando lo hace por la posición $x = 4$ cm. Determina:**

a) **La amplitud de su movimiento y su periodo de oscilación.**

b) **Los valores absolutos de su velocidad y aceleración máximas.**

c) **La ecuación del movimiento si comienza a oscilar desde la posición de equilibrio hacia elongaciones positivas.**

a) Expresando las condiciones expuestas en el enunciado, considerando que $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$, tenemos que:

$$2 = \omega\sqrt{A^2 - 4^2}$$
$$6 = \omega\sqrt{A^2 - 1^2}$$

Dividiendo entre sí ambas expresiones, elevando al cuadrado y despejando A, se obtiene A = 4,23 cm. Sustituyendo posteriormente el valor de la amplitud en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores, se obtiene que ω = 1,46 rad/s, por lo que $T = 2\pi/\omega$ = 4,3 s.

b) Los valores absolutos de la velocidad y aceleración máxima responden a las expresiones:

$$|v| = \omega A$$
$$|a| = \omega^2 A$$

Que, con los datos obtenidos, resultan ser de 6,17 cm/s para la velocidad y 9 cm/s² para la aceleración.

c) La ecuación correspondiente será:

$$x = 4{,}23 \text{ sen } 1{,}46\, t \text{ cm}$$

Consideraciones dinámicas del MAS

10 **Si tenemos un cuerpo de masa desconocida y un resorte de constante *k* también desconocida, ¿cómo podremos averiguar el periodo de oscilación del sistema sin hacerlo oscilar?**

Bastaría con colgar la masa desconocida del muelle y medir el alargamiento producido. Cuando se consigue el equilibrio, se cumple que:

$$mg = kx \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{x}{g}$$

Así pues, el período de oscilación de dicho sistema sería:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$$

Que, como es fácil ver, puede obtenerse sin más que medir el alargamiento del muelle.

11 **Un resorte del que pende una masa *m* tiene una constante de fuerza *k*. El resorte se corta por la mitad, y la masa se cuelga de una de las mitades. ¿Oscilará ahora con el mismo periodo que antes? Razona y demuestra tu afirmación.**

No oscilará con el mismo período, pues el valor de k varía al cortar el muelle por la mitad. Podemos expresar k como $k = F/l$, por lo que, si $l' = l/2$, entonces $k' = 2 \cdot k$. Es decir, al cortar el muelle por la mitad, la constante k se duplica, por lo que el período disminuye en un factor:

$$T' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot T$$

12 **Al colgar una masa del extremo de un muelle vertical, este sufre un alargamiento de 7 cm.**

a) **¿De qué magnitudes del sistema depende la relación entre el alargamiento *x* y la aceleración de la gravedad?**

b) **¿Cuál es el periodo de oscilación del sistema si comienza a oscilar en posición horizontal sin rozamiento?**

a) Cuando el sistema alcanza el equilibrio, el valor del peso y la fuerza restauradora se igualan, es decir:

$$mg = kx \Rightarrow \frac{x}{g} = \frac{m}{k}$$

Es decir, la relación entre el alargamiento y la aceleración de la gravedad es equivalente a la relación entre la masa y la constante elástica. Por tanto, dicha relación depende de las características dinámicas del sistema.

b) El periodo viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Dada la identidad anterior, podemos determinar el periodo conociendo el alargamiento del muelle:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = 0{,}53 \text{ s}$$

13 **Una masa de 50 g unida a un resorte horizontal de *k* = 200 N/m se suelta después de haber sido desplazada 2 cm con respecto a su posición de equilibrio.**

a) **Determina su periodo y su frecuencia de oscilación.**

b) **Escribe su ecuación de movimiento.**

c) **Calcula la velocidad y aceleración máximas.**

d) **Establece la velocidad y la aceleración en *x* = 1 cm.**

e) **Representa con los valores correspondientes las gráficas *x, v* y *a* frente al tiempo.**

a) El período del objeto viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}1 \text{ s}$$

Y, por tanto:

$$f = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz}$$

b) Su ecuación se escribirá de la siguiente forma:

$$x = A \cos \omega t = 0{,}02 \cos \frac{2\pi}{T} t$$
$$x = 0{,}02 \cos 20\,\pi t \text{ m}$$

c) Su velocidad máxima es:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 1{,}26 \text{ m/s}$$

Su aceleración máxima es:

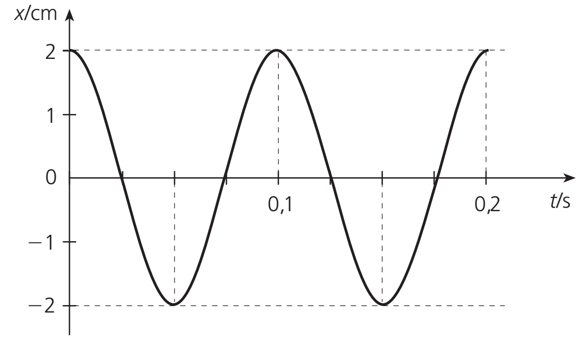
$$a_{\text{máx}} = -\omega^2 A = -79 \text{ m/s}^2$$

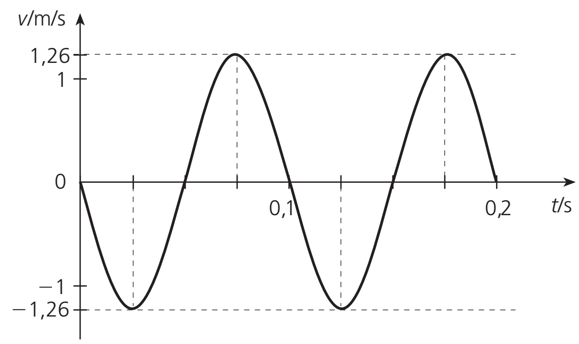
d) La velocidad y la aceleración serán, respectivamente:

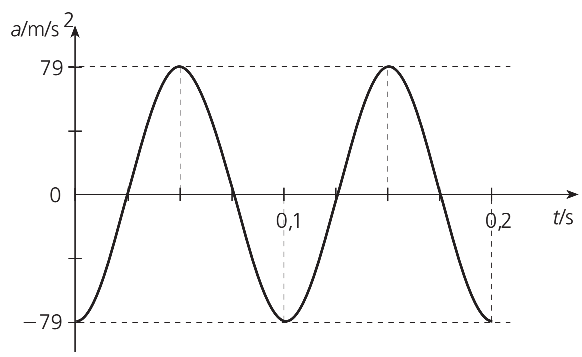
$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 + x^2} = \pm 1{,}09 \text{ m/s}$$
$$a = -\omega^2 x = -39{,}44 \text{ m/s}^2$$

Según el sentido del movimiento, la velocidad será positiva o negativa.

e) Las gráficas son las siguientes:







14 **Una masa de 200 g oscila en un resorte de constante $k = 10$ N/m con una amplitud de 4 cm. Calcula:**

a) **La velocidad y la aceleración del oscilador cuando la posición de la partícula es $x = 3$ cm.**

b) **El valor máximo de la aceleración y la velocidad.**

a) La velocidad y la aceleración en función de la posición vienen dadas, respectivamente, por:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0{,}18 \text{ m/s}$$
$$a = -\omega^2 x = -1{,}50 \text{ m/s}^2$$

Donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{50} \text{ rad/s}$$

b) Sus valores máximos son:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = 0{,}28 \text{ m/s};\ a_{\text{máx}} = -\omega^2 A = 2 \text{ m/s}^2$$

Consideraciones energéticas en el MAS

15 **Una masa de 1,5 kg unida a un muelle realiza oscilaciones armónicas sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Sabemos que la amplitud es de 3 cm y la frecuencia de 2 Hz. Si las oscilaciones comienzan desde la máxima elongación positiva, determina:**

a) **La ecuación representativa del movimiento.**

b) **La constante elástica del muelle.**

c) **El valor de la velocidad de oscilación en $x = 2$ cm.**

d) **La energía mecánica del oscilador y la posición en que las energías cinética y potencial del mismo son iguales.**

a) Puesto que la oscilación comienza desde su máxima elongación positiva, la ecuación es del tipo $x = A \cos \omega t$, donde $A = 3$ cm y $\omega = 2\pi f = 4\pi$ rad/s. Así pues:

$$x = 3 \cos 4\pi t \text{ cm}$$

b) La constante elástica del muelle es:

$$k = m\omega^2 = 1{,}5 \cdot (4\pi)^2 = 236{,}87 \text{ N/m}$$

c) La velocidad de oscilación en $x = 2$ cm, es, en valor absoluto:

$$|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 4\pi\sqrt{5} = 28{,}1 \text{ cm/s}$$

d) La energía mecánica del oscilador es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0{,}106 \text{ J}$$

El valor de la elongación en el que la energía potencial y cinética del oscilador son iguales se obtiene de la igualdad:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

Dado que , la igualdad se reduce a:

$$x^2 = A^2 - x^2 \Rightarrow x = 1/\sqrt{2}\ A = 2{,}12 \text{ cm}$$

16 **Dos partículas de masas m y m', respectivamente, efectúan oscilaciones armónicas de igual amplitud unidas a resortes de la misma constante k. Si $m' > m$:**

a) **¿Qué partícula tiene mayor energía mecánica?**

b) **¿Cuál de las dos posee mayor energía cinética al pasar por la posición de equilibrio?**

c) **¿Son iguales sus velocidades en la posición de equilibrio?**

d) **¿Son iguales sus periodos de oscilación?**

a) Los dos osciladores tienen la misma energía mecánica, pues esta es igual a $\frac{1}{2}kA^2$.

b) La energía cinética en ese punto adquiere su máximo valor, que es igual a $\frac{1}{2}kA^2$ y la misma para ambos osciladores.

c) En la posición de equilibrio sus velocidades no son iguales, debido a que en ese punto se cumple que:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m}A^2$$

Dado que k y A son iguales en ambos casos, a mayor masa, menor velocidad. Es decir, la velocidad de m' en ese punto es menor.

d) Los períodos de oscilación no son iguales; dado que el período depende de la masa, el de mayor masa tendrá mayor período.

17 **Una partícula de 40 g de masa unida a un muelle horizontal describe un MAS mediante el cual recorre una distancia total de 16 cm en cada ciclo completo de oscilación. Sabiendo que su aceleración máxima es de 36 cm/s², halla:**

a) La frecuencia y el periodo del movimiento.

b) La constante elástica del muelle.

c) La energía mecánica del sistema.

d) La velocidad del oscilador en $x = 2$ cm.

En cada ciclo completo, la partícula recorre cuatro veces el espacio equivalente a la amplitud. Al ser este espacio 16 cm, resulta que la amplitud es $A = 4$. Conocida la amplitud y la aceleración máxima, podemos determinar la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{a_{\text{máx}} / A} = 3 \text{ rad/s}$$

a) La frecuencia es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}48 \text{ Hz}$$

El período es $T = 1/f = 2{,}1$ s.

b) La constante elástica es $k = m\omega^2 = 0{,}36$ N/m.

c) La energía mecánica del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 2{,}88 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

d) La velocidad viene dada por:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 10{,}4 \text{ cm/s}$$

18 **Una masa de 500 g unida a un resorte oscila armónicamente con una frecuencia de 0,4 Hz. Si la energía mecánica del oscilador es de 3 J:**

a) Calcula la constante k del resorte.

b) Determina la amplitud de la oscilación.

c) Representa en una misma gráfica las variaciones de la energía cinética y la potencial del oscilador frente al tiempo en los cinco primeros segundos y compara dicha gráfica con la de posición.

a) Dado que $\omega^2 = k/m$, entonces $k = m\omega^2$, donde:

$$\omega = 2\pi f = 2{,}51 \text{ rad/s}$$

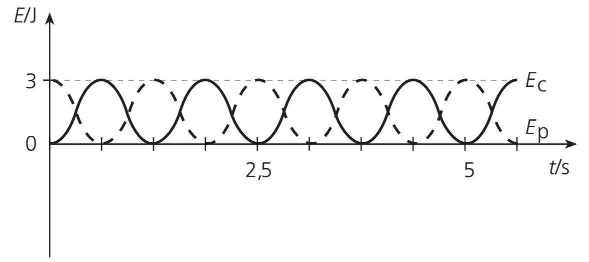
Por tanto:

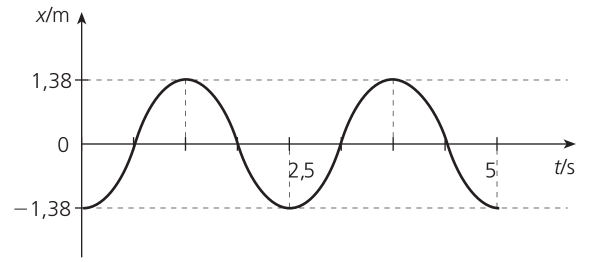
$$k = m\omega^2 = 3{,}15 \text{ N/m}$$

b) La energía mecánica del oscilador es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 1{,}38 \text{ m}$$

c) Las gráficas pedidas son:





Nota: la oscilación vertical del muelle no supone problema si consideramos que la posición de equilibrio se halla desplazada a una distancia con respecto a la posición de equilibrio sin ninguna masa colgada. Teniendo en cuenta ese nuevo sistema de referencia, el problema se aborda de idéntica manera que si se tratase de una oscilación horizontal.

Para la gráfica de posición, se ha considerado que el sistema es estirado hacia abajo y luego soltado.

19 **Una masa de 100 g unida a un muelle horizontal de constante elástica $k = 30$ N/m oscila armónicamente sin amortiguamiento. Si su amplitud es de 7 cm, halla:**

a) La expresión de la velocidad de oscilación de la masa en función de la elongación.

b) La energía potencial elástica del sistema cuando la velocidad de oscilación es nula.

c) La energía cinética del sistema en $x = 3$ cm.

d) La energía cinética y la potencial elástica del sistema cuando la aceleración de la masa es de 8 m/s².

a) A partir de los datos ofrecidos, podemos obtener la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30}{0{,}1}} = 17{,}32 \text{ rad/s}$$

Por lo que:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 17{,}32\ \sqrt{49 - x^2} \text{ cm/s}$$

b) Cuando la velocidad de oscilación es nula, la energía potencial del sistema alcanza su valor máximo, que coincide con la energía mecánica del sistema, es decir:

$$E_{\text{p máx}} = \frac{1}{2}kA^2 = 0{,}073\,5 \text{ J}$$

c) Cuando $x = 3$ cm, la velocidad es:

$$v = 17{,}32\sqrt{49 - 3^2} = 109{,}5 \text{ cm/s} \cong 1{,}1 \text{ m/s}$$

Por lo que la energía cinética en ese punto es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0{,}060\,5 \text{ J}$$

d) El valor de x correspondiente a ese valor de la aceleración es:

$$x = \frac{a}{w^2} = \frac{8}{300} = 0{,}0267 \text{ cm}$$

La energía potencial en dicho punto será:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0{,}0107 \text{ J}$$

Luego la energía cinética será:

$$E_c = E_{\text{mecánica}} - E_p = 0{,}0628 \text{ J}$$

20 **Si la amplitud de un movimiento armónico simple se duplica, calcula cuánto varían:**

a) **Su energía mecánica y su periodo.**

b) **Su velocidad y aceleración máximas.**

a) La energía mecánica viene dada por $E = \frac{1}{2}kA^2$. Por tanto, si A se duplica, la energía se cuadruplica: $E' = 4 \cdot E$.

El período es $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ y depende solo de las características mecánicas del oscilador y no de la amplitud. Por tanto, el período no varía: $T' = T$

b) Su velocidad máxima es $v_{\text{máx}} = \pm\omega A$; por tanto, se duplicará: $v' = 2 \cdot v$

Su aceleración máxima es $|a_{\text{máx}}| = |-\omega^2 A|$, por lo que también se duplicará: $a' = 2 \cdot a$

El péndulo simple

21 **La longitud de un péndulo simple es el cuádruple que la de otro. Compara sus periodos de oscilación.**

El período del péndulo de cuádruple longitud será el doble.

22 **Un péndulo simple de 2 m de longitud tiene un periodo de 2,84 s para pequeñas oscilaciones:**

a) **Determina la intensidad del campo gravitatorio en el lugar de la medición.**

b) **Considerando que la velocidad de la bolita del péndulo cuando pasa por la posición de equilibrio es de 0,4 m/s, calcula su amplitud.**

c) **Si la oscilación comienza en uno de los extremos, escribe la ecuación de posición en el eje X y represéntala gráficamente en función del tiempo.**

a) El período del péndulo, para pequeñas oscilaciones, viene dado por:

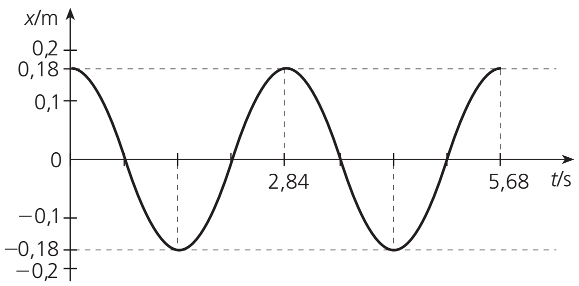
$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \cong 9{,}79 \text{ m/s}^2$$

b) En la posición de equilibrio, el péndulo alcanza su máxima velocidad, por lo que:

$$v = \omega A = \frac{2\pi}{T}A \Rightarrow A = \frac{vT}{2\pi} = 0{,}18 \text{ m}$$

c) Si suponemos que la posición inicial es la correspondiente al extremo de amplitud positiva, y considerando que $\omega = 2\pi/T = 2{,}21$, resulta:

$$x = A \cos \omega t = 0{,}18 \cos 2{,}21\, t \text{ m}$$



23 **Un péndulo de 5 m de longitud se separa 15° de la vertical por su lado izquierdo y se deja oscilar libremente. Determina:**

a) **La ecuación de su movimiento escrita en forma de seno y de coseno.**

b) **Su periodo y su frecuencia.**

c) **Su velocidad al pasar por la posición de equilibrio.**

a) Las ecuaciones en forma seno y coseno tendrán la forma:

$$x = A \cos(\omega t \pm \pi)$$
$$x = A \text{ sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Siendo $A = L$ sen $15 = 1{,}29$ m y $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = 1{,}4 \text{ s}^{-1}$. De modo que las ecuaciones son:

$$x = 1{,}29 \cos(1{,}4t \pm \pi) \text{ m}$$
$$x = 1{,}29 \text{ sen}\left(1{,}4t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

b) El período es $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4{,}48$ s, y la frecuencia $f = 0{,}22 \text{ s}^{-1}$

c) La velocidad al pasar por la posición de equilibrio es la velocidad máxima, cuyo valor absoluto es:

$$|v| = \omega A = 1{,}8 \text{ m/s}$$

SOLUCIONES DE LA EVALUACIÓN FINAL (página 379)

1. ¿Cuándo se dice que un movimiento es armónico simple? ¿En qué parámetro o parámetros del oscilador afecta la actuación de fuerzas disipativas?

Cuando oscila bajo la acción de fuerzas restauradoras de tipo Hooke. La amplitud y, en consecuencia, la energía mecánica, son afectados por la acción de fuerzas disipativas.

2. Un oscilador de constante elástica $k = 50$ N/m y masa de 500 g se separa 8 cm de su posición de equilibrio y se deja oscilar. Calcula su periodo y su frecuencia, su velocidad al pasar por la posición de equilibrio y su ecuación de posición.

La frecuencia angular del oscilador viene dada por $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} =$ $= 10\ \text{s}^{-1}$, por lo que el período vale $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}628\ \text{s}$ y la frecuencia 1,59 s^{-1}.

Por tanto, la velocidad al pasar por la posición de equilibrio es $|v| = \omega A = 80\ \text{cm/s} = 0{,}8\ \text{m/s}$ y su ecuación de posición es:

$$x = 8 \cos 10t \ \text{cm}$$

3. Teniendo en cuenta los datos del problema anterior, ¿qué velocidad llevará el oscilador cuando se encuentre a 4 cm de la posición de equilibrio? ¿Cuánto vale su aceleración en ese punto?

La velocidad que llevará cuando es $x = 4$ cm es $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 69{,}3\ \text{cm/s}$, mientras que la aceleración en ese punto es:

$$a = -\omega^2 x = -400\ \text{cm/s}^2$$

4. Un oscilador armónico se hace oscilar desde 10 cm de su posición de equilibrio. ¿En qué punto son iguales sus energías potencial y cinética?

Son iguales cuando cada una valga la mitad de la energía mecánica total, por lo que $\dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{4}kA^2 \rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}A = 7{,}07\ \text{cm}$

5. Una masa de 10 g sujeta a un resorte de 150 N/m es liberada en $x = +20$ cm para que oscile. Determina sus ecuaciones de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Con los datos que proporciona el enunciado, podemos deducir la posición:

$$A = 20\ \text{cm y } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 122{,}47\ \text{rad/s}$$

y por tanto:

$$x = A\cos\omega t = 20\cos 122{,}47\,t\ \text{cm}$$

La velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\ \text{sen}\,\omega t = -2\,449{,}4\ \text{sen}\,122{,}47\,t\ \text{cm/s}$$

La aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos\omega t = -3\cdot 10^5\cos 122{,}47\,t\ \text{cm/s}^2$$

6. La frecuencia de oscilación de cierta masa m en un resorte de constante k es el triple que la que tiene la misma masa en otro resorte de constante k'. ¿Qué relación guardan las constantes de ambos resortes?

$$k = m\,\omega^2;\ k' = m\,\omega'^2$$

Ahora: $\omega = 3\,\omega'$. Entonces: $k = m \cdot 9\,\omega'^2 = 9\,k'$.

7. Un muelle de masa despreciable tiene una longitud natural de 10 cm. Cuando se cuelga de él un cuerpo de 100 g de masa, su longitud en equilibrio resulta ser de 20 cm.

a) ¿Cuál es la constante restauradora del muelle?

b) Si desplazamos la masa 5 cm por encima de la posición de equilibrio y la dejamos oscilar libremente, ¿con qué amplitud oscilará? ¿Con qué frecuencia? ¿Con qué velocidad pasará por la posición de equilibrio?

c) Representa gráficamente la longitud del muelle en función del tiempo.

a) La constante recuperadora se obtiene aplicando la ley de Hooke:

$$F = k\Delta x$$

Despejando k y sustituyendo los datos (considerando $g = 10\ \text{m/s}^2$), obtenemos:

$$k = \frac{F}{\Delta x} = 0{,}1\ \text{kg}\cdot\frac{10\text{m/s}^2}{10\cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 10\ \text{N/m}$$

Como puede comprobarse, se ha prescindido del signo negativo de esta ley, que solo indica el sentido de la fuerza con relación al desplazamiento.

b) Si no existen amortiguadores, la amplitud será:

$$A = 5\cdot 10^{-2}\ \text{m}.$$

Por otra parte:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10\ \text{N/m}}{0{,}1\ \text{kg}}} = 10\ \text{rad/s}$$

Además:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{10\ \text{rad/s}} = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

La frecuencia es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{5}{\pi}\text{s}^{-1}$$

La ecuación general de un movimiento vibratorio armónico simple es:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Para determinar la velocidad, hay que calcular previamente el valor del desfase. Como $x = 5\cdot 10^{-2}$ m para $t = 0$, sustituyendo en la ecuación general del MAS, se obtiene:

$$5\cdot 10^{-2} = 5\cdot 10^{-2}\cos\delta \Rightarrow \cos\delta = 1 \Rightarrow \delta = 0$$

Luego, la ecuación del este MAS es:

$$x = 5\cdot 10^{-2}\cos 10\,t\ \text{m}$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad:

$$v = -0{,}5 \text{ sen } 10\,t \text{ m/s}$$

En la posición de equilibrio $x = 0$; por lo que:

$$0 = 5 \cdot 10^{-2} \cos 10\,t \Rightarrow 10\,t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

Luego, la velocidad con la que pasará por la posición de equilibrio será:

$$v\left(\frac{\pi}{20}\right) = -0{,}5 \text{ sen } 10 \cdot \frac{\pi}{20} = -0{,}5 \text{ m/s}$$

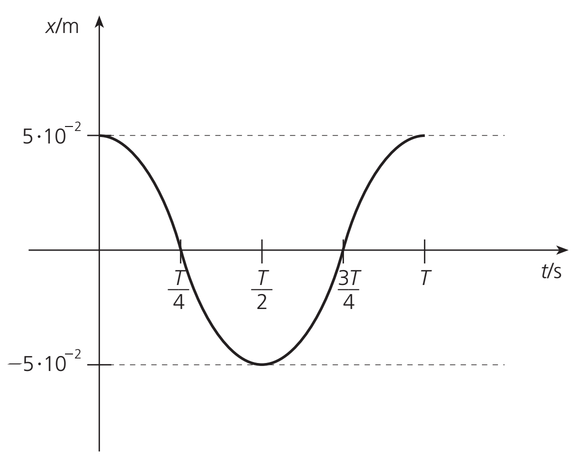
c) Para realizar la representación gráfica, hay que escribir la ecuación en la siguiente forma:

$$x = 5 \cdot 10^{-2} \cos \frac{2\pi}{T} \text{ m}$$

Asignando valores:

t (s)	0	T/4	T/2	3T/4	T
x (m)	$5 \cdot 10^{-2}$	0	$5 \cdot 10^{-2}$	0	$5 \cdot 10^{-2}$

De este modo, la representación gráfica es:



8. ¿Cuál será el periodo de oscilación del muelle anterior si su longitud se reduce a la cuarta parte?

Al reducir su longitud a la cuarta parte, la constante K se cuadruplica, siendo ahora de 40 N/m, por lo que el período se reduce a la mitad, valiendo π/10 s.

9. Imagina que te encuentras en el interior de un elevador sin referencias visuales externas y del techo del mismo cuelga un péndulo. Describe cómo podrías saber por el movimiento del péndulo si el elevador:

a) Se acelera hacia arriba.

b) Se acelera hacia abajo.

c) Está en reposo o se mueve con velocidad constante.

Para responder a las cuestiones, el péndulo tendría que pender del extremo de un dinamómetro. De este modo, si el elevador acelerad hacia arriba, el dinamómetro marcará un peso superior al del péndulo en el reposo. Por el contrario, si el elevador acelera hacia abajo, el dinamómetro marcará un peso inferior. Así pues:

a) Cuando el elevador acelere hacia arriba, el período del péndulo disminuirá con respecto a su oscilación en reposo.

b) Cuando el elevador acelere hacia abajo, el período aumentará con respecto a su oscilación en reposo.

c) Las situaciones de reposo o movimiento con velocidad constante serían indistinguibles, pues el período de oscilación sería el mismo en ambos casos.

10. Un péndulo de 10 g de masa y 80 cm de longitud se aparta 20° hacia la derecha de su posición de equilibrio y se deja oscilar libremente. Determina:

a) Su periodo y frecuencia de oscilación.

b) Su ecuación de posición en función del tiempo.

c) Su energía mecánica.

La amplitud del movimiento es $A = L$ sen 20 = 0,27 m. Por otra parte:

a) Su período es $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 1{,}79$ s, por lo que la frecuencia es de 0,55 s^{-1} y la frecuencia angular es $\omega = 3{,}5$ s^{-1}

b) Con los datos anteriores, la ecuación de posición es:

$$x = 0{,}27 \cos 3{,}5\,t \text{ m}$$

c) Su energía mecánica es:

$$E_m = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 0{,}0392 \text{ J}$$

RÚBRICA DE ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

Estándar de aprendizaje evaluable	Herramientas de evaluación (actividades del LA)	Excelente 3	Satisfactorio 2	En proceso 1	No logrado 0	Puntos
1.1 Diseña y describe experiencias que pongan de manifiesto el MAS y determina las magnitudes involucradas.	A: 2, 5, 9 ER: 1, 3 AT: 1, 2, 5, 6, 8, 9	Responde de adecuada identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde	
2.1 Escribe la posición de un oscilador armónico conociendo la amplitud, la frecuencia, el período y la fase inicial.	A: 1 - 4, 6 ER: 2, 3 AT: 3, 4, 7	Responde de manera, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde los cálculos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
2.2 Obtiene y relaciona las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración y representarlas gráficamente en función del tiempo.	A: 7 – 10 ER: 1-3 AT: 3, 6, 7, 9	Responde de manera, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde los cálculos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
3.1 Demuestra que la aceleración de un MAS es proporcional al desplazamiento utilizando la ecuación fundamental de la Dinámica.	A: 11, 13	Demuestra de manera adecuada, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Demuestra de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Demuestra con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
3.2 Deduce el período y la frecuencia del MAS	A: 11-13 AT: 10-14	Deduce de manera adecuada las magnitudes, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Deduce las magnitudes de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Deduce las magnitudes con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
4.1 Calcula las energías cinética, potencial y mecánica de un oscilador armónico aplicando el principio de conservación de la energía y realizar la representación gráfica correspondiente.	A: 14-16 AT: 15-20	Calcula las energías de manera adecuada, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Calcula las energías manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Calcula las energías con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
5.1 Resuelve la posición, velocidad y aceleración de un MAS a partir de la proyección de las magnitudes del MCU	A: 17-21 ER: 4-6 AT: 20-32	Resuelve de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
6.1 Obtiene los valores de período y frecuencia de un péndulo simple relacionándolos con las variables correspondientes.	A: 17-19 AT: 21-23	Obtiene los valores de manera adecuada, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Obtiene los valores de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Obtiene los valores con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	

A: actividades; ER: estrategias de resolución; AT: actividades y tareas.

PRUEBA DE EVALUACIÓN A

1. **La ecuación del movimiento armónico de un cuerpo que es obligado a oscilar desde su posición de equilibrio es:**
   a) **Senosoidal.**
   b) **Cosenoidal.**
   c) **Cosenoidal, si se introduce un desfase de $\pi/2$.**

   Son correctas las respuestas a) y c). Deben cumplirse, en cualquier caso, que $x = 0$ en $t = 0$, condición que se satisface en la expresión $x = A$ sen ωt, así como en la expresión $x = A \cos(\omega t + \pi/2)$.

2. **Una masa de 200 g sujeta a un resorte de $k = 180$ N/m es liberada en $x = -20$ cm para que oscile. Deduce:**
   a) **Su ecuación de posición en función del tiempo.**
   b) **Su ecuación de velocidad en función del tiempo.**
   c) **Su ecuación de aceleración en función del tiempo.**

   a) Con los datos que proporciona el enunciado, podemos deducir que:

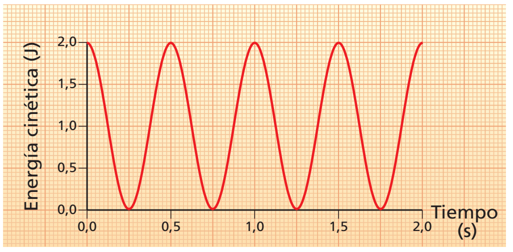
$$A = 20 \text{ cm y } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 30 \text{ rad/s}$$

$$x = A \cos \omega t = -20 \cos 30\, t \text{ cm}$$

   b) $v = \dfrac{dx}{dt} = 600 \text{ sen } 30\, t \text{ cm/s}$

   c) $a = \dfrac{dv}{dt} = 18\,000 \cos 30\, t \text{ cm/s}^2$

3. **La gráfica adjunta representa la energía cinética de un oscilador armónico cuya constante elástica es de 100 N/m. A partir de ella y explicando razonadamente todos los pasos, determina:**



   a) **La amplitud del movimiento del oscilador.**
   b) **La posición inicial del oscilador.**
   c) **Las posibles ecuaciones del movimiento del oscilador si no sabemos el sentido inicial del movimiento.**
   d) **¿Cuál es la masa del oscilador?**

   a) Como se aprecia en la gráfica, la energía cinética máxima tiene un valor de 2 J. Como a su vez la energía cinética máxima es igual a la energía mecánica del oscilador, tenemos que:

$$\frac{1}{2}kA^2 = E_c\,(\text{max})$$

   Resolviendo la amplitud se obtiene $A = 0,2$ m.

   b) Dado que en $t = 0$ la energía cinética es máxima, entonces la posición inicial del oscilador es la posición de equilibrio.

   c) Al partir de la posición de equilibrio, sus ecuaciones podrían ser del tipo $x = A \text{ sen } \omega t$, o bien $x = -A \text{ sen } \omega t$ siendo $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

   A partir de la gráfica podemos apreciar que el período es igual a 1 s, por lo que $\omega = 2\pi$ rad/s, de modo que las ecuaciones pueden ser:

$$x = 0{,}2 \text{ sen } 2\pi t \text{ m (si empieza a oscilar hacia amplitudes positivas)}$$

$$x = -0{,}2 \text{ sen } 2\pi t \text{ m (si empieza a oscilar hacia amplitudes negativas)}$$

   d) La masa del oscilador viene dada por la expresión:

$$m = \frac{k}{\omega^2} = 2{,}53 \text{ kg}$$

4. **Una partícula se mueve en el eje X, alrededor del punto $x = 0$, describiendo un movimiento armónico simple de período 2 s, encontrándose inicialmente en la máxima elongación positiva. Sabiendo que la fuerza máxima que actúa sobre la partícula tiene un valor de 0,05 N y que su energía mecánica es de 0,02 J, determina:**

a) **La amplitud del movimiento.**

b) **La masa de la partícula.**

c) **La ecuación del movimiento de la partícula.**

d) **El valor absoluto de la velocidad cuando se encuentre a 20 cm de la posición de equilibrio.**

a) La fuerza máxima corresponde al punto en el que $x = A$, por lo que las condiciones del enunciado son:

$$F_{max} = kA = 0,05 \text{ N}$$

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 = 0,02 \text{ J}$$

Resolviendo la amplitud a partir del sistema anterior, se obtiene $A = 2\ E_m/F_m = 0,8$ m

b) Dado que el período es de 2 s, entonces $\omega = \pi$ rad/s. A su vez, resolviendo la constante elástica k en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores, se obtiene que $k = 0,0625$ N/m. En consecuencia:

$$m = \frac{k}{\omega^2} = 0,0063 \text{ kg}$$

c) Considerando que inicialmente se encuentra en la máxima elongación, la forma más sencilla de escribir la ecuación será:

$$x = A \cos \omega t = 0,8 \cos \pi t \text{ m}$$

d) El valor de la velocidad en la posición indicada ($x = 0$) se obtiene de la expresión:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 2,43 \text{ m/s}$$

PRUEBA DE EVALUACIÓN B

Señala la respuesta correcta en cada uno de los ejercicios:

1. **Decimos que un movimiento es armónico simple cuando tiene lugar bajo la acción de:**
   a) Fuerzas constantes.
   b) Fuerzas constantes que cambian de sentido periódicamente.
   c) **Fuerzas restauradoras proporcionales a la distancia hasta la posición de equilibrio.**
2. **La ecuación del movimiento armónico de un cuerpo que es obligado a oscilar desde su posición de equilibrio es:**
   a) Senoidal si se introduce un desfase de $\pi/2$.
   b) **Cosenoidal, si se introduce un desfase de $\pi/2$.**
   c) **Senoidal.**
3. **El periodo de un oscilador armónico consistente en una masa unida a un muelle:**
   a) Es independiente de la masa del cuerpo.
   b) Solo depende de la longitud del muelle y del valor de *g*.
   c) **Depende de la masa del cuerpo y de la rigidez del muelle.**
4. **La energía mecánica de un oscilador armónico:**
   a) **Permanece constante si no actúan fuerzas disipativas.**
   b) Es proporcional a la amplitud.
   c) **Es proporcional al cuadrado de la amplitud.**
5. **El fenómeno de resonancia se produce cuando:**
   a) La fuerza externa actúa en oposición al oscilador.
   b) La energía transmitida por la fuerza externa es igual a la del oscilador.
   c) **La frecuencia angular de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural del oscilador.**
6. **El periodo de oscilación de un péndulo simple:**
   a) Depende de la masa del péndulo.
   b) **Depende de la longitud del péndulo.**
   c) Es independiente de los dos factores citados.