2 Álgebra

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Realiza las siguientes operaciones con polinomios.

a) $(3x^2 + 2x - 5)(2x^2 + x - 3)$ **b)** $(2x - 3)(-2x^2 + 2) + x(-2x^2 + x + 1)$ **c)** $4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x)(-2x + 5)$

a) $(3x^2 + 2x - 5)(2x^2 + x - 3) = 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4x^3 + 2x^2 - 6x - 10x^2 - 5x + 15 = 6x^4 + 7x^3 - 17x^2 - 11x + 15$

b) $(2x - 3)(-2x^2 + 2) + x(-2x^2 + x + 1) = -4x^3 + 4x + 6x^2 - 6 - 2x^3 + x^2 + x = -6x^3 + 7x^2 + 5x - 6$

c) $4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x)(-2x + 5) = 4x^3 - 4x + 12 + 4x^3 - 10x^2 + 12x^2 - 30x = 8x^3 + 2x^2 - 34x + 12$

4. Calcula los valores de *a* y *b* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(3x^2 - 5x + a)(2x^2 + bx) = 6x^4 - 19x^3 + 19x^2 - 6x$

b) $2(x + 3)^2 - 3(x + a) = 2x^2 + bx + 3$

a) $(3x^2 - 5x + a)(2x^2 + bx) = 6x^4 + (3b - 10)x^3 + (2a - 5b)x^2 + abx \Rightarrow \begin{cases} 3b - 10 = -19 \\ 2a - 5b = 19 \\ ab = -6 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = -3$

b) $2(x + 3)^2 - 3(x + a) = 2x^2 + 9x + (18 - 3a) \Rightarrow \begin{cases} 9 = b \\ 18 - 3a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 5,\ b = 9$

5. Efectúa las siguientes divisiones.

a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (3x^2 + 2)$

b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x^2 + x + 2)$

c) $(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (2x^3 - 2x + 3)$

a)

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 2x^2 + x - 5 & 3x^2 + 2 \\ \hline -3x^3 \qquad - 2x & x + \frac{2}{3} \\ \hline 2x^2 - x - 5 & \\ -2x^2 \qquad - \frac{4}{3} & \\ \hline -x - \frac{19}{3} & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - x + 6 & 2x^3 - 2x + 3 \\ \hline -x^3 \qquad + x - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline -3x^2 \qquad + \frac{9}{2} & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} 3x^4 \qquad - 2x^2 - x + 4 & x^2 + x + 2 \\ \hline -3x^4 - 3x^3 - 6x^2 & 3x^2 - 3x - 5 \\ \hline -3x^3 - 8x^2 - x & \\ 3x^3 + 3x^2 + 6x & \\ \hline -5x^2 + 5x + 4 & \\ 5x^2 + 5x + 10 & \\ \hline 10x + 14 & \end{array}$$

6. Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (x + 2)$

b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x + 2)$

c) $(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (2x + 3)$

d) $(4x^4 - 3x^2 + 5) : (-x + 5)$

e) $(2x^5 - 12x^3 - 6x^2 - 117) : (x - 3)$

a)

	3	2	1	–5
–2		–6	8	–18
	3	–4	9	–23

Cociente: $3x^2 - 4x + 9$ Resto: –23

b)

	3	0	–2	–1	4
–2		–6	12	–20	42
	3	–6	10	–21	46

Cociente: $3x^3 - 6x^2 + 10x - 21$ Resto: 46

c) Como el divisor no es de la forma $x - a$, antes de aplicar Ruffini se dividen el dividendo y el divisor por 2.

	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
$-\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{4}$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{69}{16}$
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{23}{8}$	$-\frac{21}{16}$

Cociente: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{23}{8}$ Resto: $2 \cdot \left(-\frac{21}{16}\right) = -\frac{21}{8}$

d) Como el divisor no es de la forma $x - a$, antes de aplicar Ruffini se cambia el signo al dividendo y al divisor.

	–4	0	3	0	–5
5		–20	–100	–485	–2425
	–4	–20	–97	–485	–2430

Cociente: $-4x^3 - 20x^2 - 97x - 485$ Resto: 2430

e)

	2	0	–12	–6	0	–117
3		6	18	18	36	108
	2	6	6	12	36	–9

Cociente: $2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 12x + 36$ Resto: –9

7. Utiliza Ruffini para calcular el valor de *a* y *b* que hace que las siguientes divisiones sean exactas.

a) $(2x^3 + 5x^2 - 2x + a) : (x + 3)$

b) $(3x^4 - 5x^2 - ax + 2) : (2x + 3)$

c) $(-6x^4 + x^3 + ax^2 - 16x + 4) : (-3x + 4)$

d) $(4x^4 + 3x^3 - 13x^2 + ax + b) : (x^2 - 2)$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -2 & a \\ -3 & & -6 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & a-3 \end{array} \qquad a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

b)

$$\begin{array}{r|ccccc} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{a}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & & -\frac{9}{4} & \frac{27}{8} & -\frac{21}{16} & \frac{63+24a}{32} \\ \hline & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{8} & -\frac{21+8a}{16} & \frac{95+24a}{32} \end{array} \qquad \frac{95+24a}{16} = 0 \Rightarrow a = -\frac{95}{24}$$

c)

$$\begin{array}{r|ccccc} & 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{a}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & & \frac{8}{3} & \frac{28}{9} & \frac{112-12a}{27} & \frac{1024-48a}{81} \\ \hline & 2 & \frac{7}{3} & \frac{28-3a}{9} & \frac{256-12a}{27} & \frac{916-48a}{81} \end{array} \qquad \frac{48a-916}{27} = 0 \Rightarrow a = \frac{229}{12}$$

d) La división no se puede hacer utilizando Ruffini.

$$\begin{array}{lllll|l} 4x^4 & +3x^3 & -13x^2 & +ax & +b & x^2-2 \\ \cline{6-6} -4x^4 & & +8x^2 & & & 4x^2+3x-5 \\ \cline{1-3} & 3x^3 & -5x^2 & +ax & & \\ & -3x^3 & & +6x & & \\ \cline{2-4} & & -5x^2 & +(a+6)x & +b & \\ & & 5x^2 & & -10 & \\ \cline{3-5} & & & (a+6)x & +b-10 & \end{array}$$

Para que el resto sea cero $a = -6$ y $b = 10$

8 y 9. Ejercicios resueltos.

10. Halla, sin hacer la división, el valor de *m* para que el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 3m$ tenga por resto 12 al dividirlo por $x + 2$.

Por el teorema del resto se tiene: $12 = 2(-2)^4 + 9(-2)^3 + 2(-2)^2 - 6(-2) + 3m = 3m - 20 \Rightarrow m = \frac{32}{3}$

11. Calcula el valor de *k* para que el polinomio:

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$ sea divisible por $x - 2$.

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 4$ sea divisible por $x + 2$.

c) $P(x) = (k - 3)x^3 - 5x + k$ sea divisible por $x + 4$.

d) $P(x) = x^3 - (k - 3)x^2 + (k - 5)x - 3$ sea divisible por $x - 3$.

a) Por el teorema del factor se tiene: $2^3 + 2^2 - 2\cdot 2 + k = 0 \Rightarrow k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$

b) Por el teorema del factor se tiene: $(-2)^3 - 2\cdot(-2)^2 + k\cdot(-2) + 4 = 0 \Rightarrow -2k - 12 = 0 \Rightarrow k = -6$

c) Por el teorema del factor se tiene: $(k - 3)\cdot(-4)^3 - 5\cdot(-4) + k = 0 \Rightarrow -63k + 212 = 0 \Rightarrow k = \frac{212}{63}$

d) Por el teorema del factor se tiene: $3^3 - (k - 3)\cdot 3^2 + (k - 5)\cdot 3 \cdot - 3 = 0 \Rightarrow -6k + 36 = 0 \Rightarrow k = 6$

12. En cada caso, factoriza el polinomio dado y halla sus raíces entera.

a) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ **c)** $x^4 - 16$ **e)** $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$ **g)** $x^4 - 3x^3 - 3x + 2$

b) $9x^2 + 12x + 4$ **d)** $x^5 - x^4 - x^2 + x$ **f)** $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ **h)** $x^6 - 9x^4$

a)

	2	5	–1	–6
1		2	7	6
	2	7	6	0

Se calculan las raíces del cociente $2x^2 + 7x + 6$: $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \dfrac{-7 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = -2 \end{cases}$

Por tanto, $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 2(x-1)(x+2)(x+\frac{3}{2}) = (x-1)(x+2)(2x+3)$. Las raíces enteras son –2 y 1.

b) $x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144-144}}{18} = \dfrac{-12 \pm 0}{18} = -\dfrac{2}{3}$, así $9x^2 + 12x + 4 = 9\left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 = (3x+2)^2$. No tiene raíces enteras.

c) Usando las igualdades notables: $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$. Las raíces enteras son –2 y 2.

d) Se extrae factor común: $x^5 - x^4 - x^2 + x = x(x^4 - x^3 - x + 1)$. Ahora por Ruffini:

	1	–1	0	–1	1
1		1	0	0	–1
	1	0	0	–1	0

	1	0	0	–1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$x^5 - x^4 - x^2 + x = x(x-1)^2(x^2 + x + 1)$. Las raíces enteras son 0 y 1.

e)

	6	11	6	1
–1		–6	–5	–1
	6	5	1	0

Se calculan las raíces del cociente $6x^2 + 5x + 1$: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \dfrac{-5 \pm 1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Por tanto, $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 6(x+1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$. La raíz entera es –1.

f) Es un ejemplo de polinomio sin raíces enteras y que no se puede factorizar de forma sencilla.

g) Es un ejemplo de polinomio sin raíces enteras y que no se puede factorizar de forma sencilla.

h) Se extrae factor común y se utilizan las identidades notables: $x^6 - 9x^4 = x^4(x^2 - 9) = x^4(x-3)(x+3)$. Las raíces enteras son –3, 0 y 3.

13. Ejercicio interactivo.

14 a 17. Ejercicios resueltos.

18. Simplifica la expresión: $\dfrac{\left[\binom{29}{3} + \binom{29}{25}\right]4!}{630}$

$$\frac{\left[\binom{29}{3} + \binom{29}{25}\right]4!}{630} = \frac{\left[\binom{29}{3} + \binom{29}{4}\right]4!}{630} = \frac{\binom{30}{4}4!}{630} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{630} = 1044$$

19. Desarrolla las siguientes potencias y halla su sexto término.

a) $\left(3-2\sqrt{3}\right)^4$ **b)** $\left(2x+\dfrac{4}{3x}\right)^5$ **c)** $\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^9$ **d)** $\left(3a^2+2ab\right)^8$

a) $\left(3-2\sqrt{3}\right)^4=\binom{4}{0}\cdot 3^4-\binom{4}{1}\cdot 3^3\cdot\left(2\sqrt{3}\right)+\binom{4}{2}\cdot 3^2\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2-\binom{4}{3}\cdot 3\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^3+\binom{4}{4}\left(2\sqrt{3}\right)^4=$

$=81-4\cdot 27\cdot 2\sqrt{3}+6\cdot 9\cdot 12-4\cdot 3\cdot 24\sqrt{3}+144=873-504\sqrt{3}$. El desarrollo no tiene sexto término.

b) $\left(2x+\dfrac{4}{3x}\right)^5=\binom{5}{0}(2x)^5+\binom{5}{1}(2x)^4\dfrac{4}{3x}+\binom{5}{2}(2x)^3\left(\dfrac{4}{3x}\right)^2+\binom{5}{3}(2x)^2\left(\dfrac{4}{3x}\right)^3+\binom{5}{4}2x\left(\dfrac{4}{3x}\right)^4+\binom{5}{5}\left(\dfrac{4}{3x}\right)^5=$

$=32x^5+\dfrac{320}{3}x^3+\dfrac{1280x}{9}+\dfrac{2560}{27x}+\dfrac{2560}{81x^3}+\dfrac{1024}{243x^5}$. El sexto término del desarrollo es $T_6=\binom{5}{5}\left(\dfrac{4}{3x}\right)^5=\dfrac{1024}{243x^5}$.

c) $\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^9=\binom{9}{0}(\sqrt{2})^9-\binom{9}{1}(\sqrt{2})^8\left(2\sqrt{3}\right)+\binom{9}{2}(\sqrt{2})^7\left(2\sqrt{3}\right)^2-\binom{9}{3}(\sqrt{2})^6\left(2\sqrt{3}\right)^3+\binom{9}{4}(\sqrt{2})^5\left(2\sqrt{3}\right)^4-$

$-\binom{9}{5}(\sqrt{2})^4\left(2\sqrt{3}\right)^5+\binom{9}{6}(\sqrt{2})^3\left(2\sqrt{3}\right)^6-\binom{9}{7}(\sqrt{2})^2\left(2\sqrt{3}\right)^7+\binom{9}{8}(\sqrt{2})\left(2\sqrt{3}\right)^8-\binom{9}{9}\left(2\sqrt{3}\right)^9=16\sqrt{2}-$

$-288\sqrt{3}+3456\sqrt{2}-16128\sqrt{3}+72\,576\sqrt{2}-145\,152\sqrt{3}+290\,304\sqrt{2}-248\,832\sqrt{3}+186\,624\sqrt{2}-41\,472\sqrt{3}=$

$=552\,976\sqrt{2}-451\,872\sqrt{3}$. El sexto término del desarrollo es $T_6=-\binom{9}{5}\left(\sqrt{2}\right)^4\left(2\sqrt{3}\right)^5=-145\,152\sqrt{3}$.

d) $\left(3a^2+2ab\right)^8=\binom{8}{0}(3a^2)^8+\binom{8}{1}(3a^2)^7(2ab)+\binom{8}{2}(3a^2)^6(2ab)^2+\binom{8}{3}(3a^2)^5(2ab)^3+\binom{8}{4}(3a^2)^4(2ab)^4+$

$+\binom{8}{5}(3a^2)^3(2ab)^5+\binom{8}{6}(3a^2)^2(2ab)^6+\binom{8}{7}(3a^2)(2ab)^7+\binom{8}{8}(2ab)^8=6561a^{16}+34\,992a^{15}b+81\,648a^{14}b^2+$

$+108\,864a^{13}b^3+90\,720a^{12}b^4+48\,384a^{11}b^5+16\,128a^{10}b^6+3072a^9b^7+256a^8b^8$.

El sexto término del desarrollo es $T_6=\binom{8}{5}\left(3a^2\right)^3(2ab)^5=48\,384a^{11}b^5$.

20. Halla el término independiente del desarrollo de: $\left(\dfrac{3}{x^2}+5x\right)^{12}$.

$$T_k=\binom{12}{k-1}\left(\frac{3}{x^2}\right)^{13-k}(5x)^{k-1}=\binom{12}{k-1}\frac{3^{13-k}\cdot 5^{k-1}\cdot x^{k-1}}{x^{26-2k}}=\binom{12}{k-1}3^{13-k}\cdot 5^{k-1}\cdot x^{3k-27}$$

El término independiente cumple $3k-27=0\Rightarrow k=9$.

Por tanto, el término independiente es $T_9=\binom{12}{8}3^{13-9}\cdot 5^{9-1}=495\cdot 3^4\cdot 5^8$

21. Calcula el coeficiente de y^2 en el desarrollo: $\left(\dfrac{2y^2}{3}-\dfrac{3}{2y^2}\right)^7$.

$$T_k=(-1)^{k-1}\binom{7}{k-1}\left(\frac{2y^2}{3}\right)^{8-k}\left(\frac{3}{2y^2}\right)^{k-1}=(-1)^{k-1}\binom{7}{k-1}\frac{2^{8-k}\cdot 3^{k-1}\cdot y^{16-2k}}{2^{k-1}\cdot 3^{8-k}\cdot y^{2k-2}}=(-1)^{k-1}\binom{7}{k-1}2^{9-2k}\cdot 3^{2k-9}\cdot y^{-4k+18}$$

El término de y^2 cumple $-4k+18=2\Rightarrow k=4$. Por tanto, el coeficiente de y^2 es $(-1)^3\binom{7}{3}2^{9-8}\cdot 3^{8-9}=-\dfrac{70}{3}$

22. Ejercicio resuelto.

23. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3$ y $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

c) $P(x) = x$, $Q(x) = x^2 - x$ y $R(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$

e) $P(x) = x^2 - 6x + 8$, $Q(x) = x^2 - 4$ y $R(x) = 2x^2 - 4x$

a) $P(x) = (x-1)(x+2)^2$, $Q(x) = (x-1)^2$

m.c.d.$\left[P(x),\ Q(x)\right] = x-1$; m.c.m.$\left[P(x),\ Q(x)\right] = (x-1)^2(x+2)^2 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

b) $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x+3)$, $Q(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$

m.c.d.$\left[P(x),\ Q(x)\right] = (x-1)(x+1)(x+3) = Q(x)$; m.c.m.$\left[P(x),\ Q(x)\right] = (x-1)^2(x+1)^2(x+3) = P(x)$

c) $P(x) = x$, $Q(x) = x(x-1)$, $R(x) = x(x-1)^2$

m.c.d.$\left[P(x),\ Q(x), R(x)\right] = x = P(x)$; m.c.m.$\left[P(x),\ Q(x), R(x)\right] = x(x-1)^2 = R(x)$

d) $P(x) = (2x+1)(2x-1)(3x-1)$, $Q(x) = (2x-1)^2(3x-1)$

m.c.d.$\left[P(x),\ Q(x)\right] = (2x-1)(3x-1) = 6x^2 - 5x + 1$

m.c.m.$\left[P(x),\ Q(x)\right] = (2x+1)(2x-1)^2(3x-1) = 24x^4 - 20x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

e) $P(x) = (x-4)(x-2)$, $Q(x) = (x+2)(x-2)$, $R(x) = 2x(x-2)$

m.c.d.$\left[P(x),\ Q(x), R(x)\right] = x-2$; m.c.m.$\left[P(x),\ Q(x), R(x)\right] = (x-2)(x+2)2x(x-4) = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 32x$

24. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3}$ **b)** $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$ **c)** $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}$

a) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3} = \dfrac{(x+3)(x-1)^2(2x-1)}{(x-1)(x+3)(2x-1)} = x - 1$

b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \dfrac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)^2} = \dfrac{x+3}{x-2}$

c) $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4} = \dfrac{(x-1)^3(x-2)}{(x-1)^2(x-2)^2} = \dfrac{x-1}{x-2}$

25. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{a^2}{a\cdot b}+\dfrac{a\cdot b^2}{b^4}-a$

b) $\dfrac{6}{2+x}-\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{16}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+6x+5}{2x-3}$

d) $(x^2-y^2):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

e) $\dfrac{a+x}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{x-a}{x+a}$

f) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1-x}{x^2-2x+1}}+\dfrac{x+1}{x}$

h) $1+\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}}$

a) $\dfrac{a^2}{a\cdot b}+\dfrac{a\cdot b^2}{b^4}-a=\dfrac{a^2b^3+a^2b^2-a^2b^4}{ab^4}=\dfrac{a^2b^2\left(b+1-b^2\right)}{ab^4}=\dfrac{ab+a-ab^2}{b^2}$

b) $\dfrac{6}{2+x}-\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{16}{x^2-4}=\dfrac{6(x-2)+4(x+2)+16}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{6x-12+4x+8+16}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{10x+12}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+6x+5}{2x-3}=\dfrac{(x-2)(2x-3)}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{(x+1)(x+5)}{2x-3}=\dfrac{(x-2)(x+5)}{x+1}=\dfrac{x^2+3x-10}{x+1}$

d) $(x^2-y^2):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{(x-y)(x+y)}{\dfrac{x+y}{xy}}=\dfrac{xy(x-y)(x+y)}{x+y}=x^2y-xy^2$

e) $\dfrac{a+x}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{(a+x)(x-a)}{(x-a)(x+a)^2}=\dfrac{1}{x+a}$

f) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{x+1}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{2x+1}{x+1}}=1+\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{3x+2}{2x+1}$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1-x}{x^2-2x+1}}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{x+1}:\dfrac{-x}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{2}{x}$

h) $1+\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}}=1+\left(\dfrac{2x+1}{x-1}:\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}\right)=1+\dfrac{(x+1)(2x+1)}{x^2+1}=\dfrac{3x^2+3x+2}{x^2+1}$

26 a 28. Ejercicios resueltos.

29. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{5}=2x-1$

b) $2(3x-2)+x(x-1)=-4$

c) $(x+1)^3-(x-1)^3=7$

d) $\frac{x^2+1}{2}-\frac{2x-3}{4}+\frac{x^2}{6}=\frac{59}{12}$

e) $6x^4+13x^3-8x^2-17x+6=0$

f) $2x^4-x^3-3x-18=0$

a) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{5}=2x-1 \Rightarrow 10x-15+10x-12x+4=40x-20 \Rightarrow -32x=-9 \Rightarrow x=\frac{9}{32}$

b) $2(3x-2)+x(x-1)=-4 \Rightarrow 6x-4+x^2-x+4=0 \Rightarrow x^2+5x=0 \Rightarrow x(x+5)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-5$

c) $(x+1)^3-(x-1)^3=7 \Rightarrow x^3+3x^2+3x+1-(x^3-3x^2+3x-1)=7 \Rightarrow 6x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{5}{6}},\ x=-\sqrt{\frac{5}{6}}$

d) $\frac{x^2+1}{2}-\frac{2x-3}{4}+\frac{x^2}{6}=\frac{59}{12} \Rightarrow 6x^2+6-6x+9+2x^2=59 \Rightarrow 8x^2-6x-44=0 \Rightarrow 4x^2-3x-22=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+352}}{8}=\frac{3\pm 19}{8} \Rightarrow x=\frac{11}{4},\ x=-2$

e) $6x^4+13x^3-8x^2-17x+6=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)(2x+3)(3x-1)=0 \Rightarrow x=1,\ x=-2,\ x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{1}{3}$

f) $2x^4-x^3-3x-18=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+3)(2x+3)=0 \Rightarrow x=2,\ x=-\frac{3}{2}$

30. Escribe una ecuación polinómica de tercer grado tal que una solución sea 2 y la suma y el producto de las otras dos valgan –4 y 5, respectivamente.

$(x-2)(x^2+4x+5)=0 \Rightarrow x^3+2x^2-3x-10=0$

Las soluciones no son todas reales.

31. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4-17x^2+16=0$

b) $2(x+1)^4-8x^3-8(x+3)+8=0$

c) $3x^4+x^3+73x^2+25x+16=0$

d) $\frac{9}{x^2}=10-x^2$

a) $\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-17z+16=0 \Rightarrow z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{2}=\frac{17\pm 15}{2}=\begin{cases} z=16 \Rightarrow x=4,\ x=-4 \\ z=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \end{cases}$

b) $2(x+1)^4-8x^3-8(x+3)+8=2x^4+8x^3+12x^2+8x+2-8x^3-8x-24+8=2x^4+12x^2-14=x^4+6x^2-7=0$

$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+6z-7=0 \Rightarrow z=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2}=\begin{cases} z=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \\ z=-7 \Rightarrow \text{No tiene solución real} \end{cases}$

c) El polinomio no tiene raíces enteras, por lo que no es sencillo de factorizar y, por tanto, la ecuación no se puede resolver de manera sencilla (de hecho, no tiene raíces reales).

d) $\frac{9}{x^2}=10-x^2 \Rightarrow 9=10x^2-x^4 \Rightarrow x^4-10x^2+9=0$

$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-10z+9=0 \Rightarrow z=\frac{10\pm\sqrt{100+36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases} z=9 \Rightarrow x=3,\ x=-3 \\ z=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \end{cases}$

32 a 34. Ejercicios resueltos.

35. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{7}{8}$ **b)** $\frac{2x}{3}+\frac{2x+3}{x-1}=\frac{11}{3x-3}$ **c)** $\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x+2}=\frac{6x^2}{x^2-4}$

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{7}{8}\Rightarrow 8x^2+8x+8=7x^3\Rightarrow(x-2)(7x^2+6x+4)=0\Rightarrow x=2$ La solución es verdadera.

b) $\frac{2x}{3}+\frac{2x+3}{x-1}=\frac{11}{3x-3}\Rightarrow 2x(x-1)+3(2x+3)=11\Rightarrow 2x^2+4x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1+\sqrt{2}\\x_2=-1-\sqrt{2}\end{cases}$ Ambas son verdaderas.

c) $\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x+2}=\frac{6x^2}{x^2-4}\Rightarrow 2x(x+2)+3x(x-2)=6x^2\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 \text{ Verdadera}\\x=-2 \text{ Falsa}\end{cases}$

36. Encuentra la solución de estas ecuaciones racionales.

a) $\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{x}$ **b)** $\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2$

a) $\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{x}\Rightarrow\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x}$; $x\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$, que anulan los denominadores de la ecuación, son soluciones.

b) $\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2\Rightarrow\frac{2x}{x-1}:\frac{x+3}{x+1}=2\Rightarrow\frac{2x^2+2x}{x^2+2x-3}=2\Rightarrow 2x^2+2x=2x^2+4x-6\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$

37 y 38. Ejercicios resueltos.

39. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}=x-\frac{5}{2}$ **c)** $\sqrt{3(16-x)}-\sqrt{2x-5}=1$ **e)** $\sqrt{1-4x}-2\sqrt{3+x}=\sqrt{3+x}$

b) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$ **d)** $\sqrt{x-7}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+1}$

a) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}=x-\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\frac{2x-5}{2}\Rightarrow 2x-2=(2x-5)\sqrt{x}\Rightarrow(2x-2)^2=\left((2x-5)\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow 4x^3-24x^2+33x-4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(x-4)(4x^2-8x+1)=0\Rightarrow x=4;\ x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Falsa); $x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5\Rightarrow\sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1}\Rightarrow\left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2\Rightarrow x+4=25+x-1-10\sqrt{x-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow 10\sqrt{x-1}=20\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x-1=4\Rightarrow x=5$

c) $\sqrt{3(16-x)}-\sqrt{2x-5}=1\Rightarrow\sqrt{48-3x}=1+\sqrt{2x-5}\Rightarrow 48-3x=1+2x-5+2\sqrt{2x-5}\Rightarrow 2\sqrt{2x-5}=-5x+52\Rightarrow$

$\Rightarrow 4(2x-5)=25x^2+2704-520x\Rightarrow 25x^2-528x+2724=0\Rightarrow x=\frac{264+2\sqrt{399}}{25}$ (Falsa); $x=\frac{264-2\sqrt{399}}{25}$

d) $\sqrt{x-7}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+1}\Rightarrow x-7+2x+2\sqrt{(x-7)2x}=x+1\Rightarrow\sqrt{2x^2-14x}=4-x\Rightarrow 2x^2-14x=16+x^2-8x\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-6x-16=0\Rightarrow x=8$ (Falsa); $x=-2$ (Falsa) La ecuación no tiene solución.

e) $\sqrt{1-4x}-2\sqrt{3+x}=\sqrt{3+x}\Rightarrow\sqrt{1-4x}=3\sqrt{3+x}\Rightarrow 1-4x=9(3+x)\Rightarrow 1-4x=27+9x\Rightarrow 13x=-26\Rightarrow x=-2$

40. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt[3]{x^2-1}+1=x$

b) $\dfrac{\sqrt{3x+7}}{\sqrt[3]{x+1}}=\sqrt[3]{x^2+2x+1}$

a) $\sqrt[3]{x^2-1}+1=x \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-1}=x-1 \Rightarrow x^2-1=(x-1)^3 \Rightarrow (x-1)(x+1)-(x-1)^3=0 \Rightarrow (x-1)(x+1-x^2+2x-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(3x-x^2)=0 \Rightarrow x(x-1)(3-x)=0 \Rightarrow x=0;\ x=1;\ x=3$

b) $\dfrac{\sqrt{3x+7}}{\sqrt[3]{x+1}}=\sqrt[3]{x^2+2x+1} \Rightarrow \sqrt{3x+7}=\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+1} \Rightarrow \sqrt{3x+7}=x+1 \Rightarrow 3x+7=x^2+2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=3;\ x=-2$ (Falsa)

41. Calcula el valor de un número tal que si se le suma una unidad y después se extrae la raíz cuadrada se obtiene el doble que al restarle once unidades y extraer la raíz cuadrada.

Número desconocido: x; $\sqrt{x+1}=2\sqrt{x-11} \Rightarrow x+1=4(x-11) \Rightarrow 3x=45 \Rightarrow x=15$

42 a 44. Ejercicios resueltos.

45. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log(2x+3)-\log(x-1)=2\log 2+2\log 3$

b) $\log\dfrac{2x-2}{x}=2\log(x-1)-\log x$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log(2x-x^2)+1$

d) $\dfrac{\log(4-x)}{\log(x+2)}=2$

a) $\log(2x+3)-\log(x-1)=2\log 2+2\log 3 \Rightarrow \log\dfrac{2x+3}{x-1}=\log\left(2^2\cdot 3^2\right) \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x-1}=36 \Rightarrow 2x+3=36x-36 \Rightarrow x=\dfrac{39}{34}$

b) $\log\dfrac{2x-2}{x}=2\log(x-1)-\log x \Rightarrow \log[2(x-1)]-\log x=2\log(x-1)-\log x \Rightarrow \log 2+\log(x-1)=2\log(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(x-1)=\log 2 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log(2x-x^2)+1 \Rightarrow \log(4-5x)(2x-2)=\log 10(2x-x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x-8-10x^2+10x=20x-10x^2 \Rightarrow -2x=8 \Rightarrow x=-4$ (Falsa) La ecuación no tiene solución.

d) $\dfrac{\log(4-x)}{\log(x+2)}=2 \Rightarrow \lg(4-x)=2\log(x+2) \Rightarrow \log(4-x)=\log(x+2)^2 \Rightarrow 4-x=x^2+4x+4 \Rightarrow\Rightarrow x=0;\ x=-5$ (Falsa)

46. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_x 3=\ln\sqrt{3}$

b) $\log_3 32+\log_{\frac{1}{3}}(6-x)=\log_{\sqrt{3}} x$

a) $\log_x 3=\ln\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\ln 3}{\ln x}=\dfrac{\ln 3}{2} \Rightarrow \ln x=2 \Rightarrow x=e^2$

b) $\log_3 32+\log_{\frac{1}{3}}(6-x)=\log_{\sqrt{3}} x \Rightarrow \dfrac{\log 32}{\log 3}+\dfrac{\log(6-x)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{\log x}{\log\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\log 32}{\log 3}-\dfrac{\log(6-x)}{\log 3}=\dfrac{2\log x}{\log 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 32-\log(6-x)=2\log x \Rightarrow \log\dfrac{32}{6-x}=\log x^2 \Rightarrow x^2=\dfrac{32}{6-x} \Rightarrow 6x^2-x^3=32 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \ \text{(Falsa)} \end{cases}$

47. Halla el número que cumple que al añadir a su logaritmo decimal el valor del logaritmo decimal de 2, el resultado es 1.

Número desconocido: x

$\log x + \log 2 = 1 \Rightarrow \log 2x = \log 10 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

48. Calcula el valor de un número sabiendo que el doble de su logaritmo decimal es igual a la suma de los logaritmos decimales de 4 y de 9.

Número desconocido: x

$2\log x = \log 4 + \log 9 \Rightarrow \log x^2 = \log 36 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \ \ \text{(Falsa)} \end{cases}$

49 a 51. Ejercicios resueltos.

52. Resuelve las ecuaciones exponenciales.

a) $\frac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}}$ **b)** $3{\cdot}2^x = 2{\cdot}3^x$ **c)** $13^{x^2+2x} - \frac{1}{13} = 0$ **d)** $2^{2x^2-3x-5} = 16$

a) $\frac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{4x(x-1)}{2}} \Rightarrow -x = 2x(x-1) \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $3{\cdot}2^x = 2{\cdot}3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1$

c) $13^{x^2+2x} - \frac{1}{13} = 0 \Rightarrow 13^{x^2+2x} = 13^{-1} \Rightarrow x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

d) $2^{2x^2-3x-5} = 16 \Rightarrow 2^{2x^2-3x-5} = 2^4 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

53. Resuelve las ecuaciones.

a) $2^{x+4} - 8^x = 0$ **b)** $3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1$ **c)** $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0$ **d)** $2\cdot 10^{2x+4} + 3\cdot 10^{x+2} - 5 = 0$

a) $2^{x+4} - 8^x = 0 \Rightarrow 2^{x+4} - 2^{3x} = 0 \Rightarrow 2^{x+4} = 2^{3x} \Rightarrow x + 4 = 3x \Rightarrow x = 2$

b) Aplicando el cambio de variable $z = 3^x$

$3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 - \frac{1}{3}3^x = 3{\cdot}3^x + 1 = 0 \Rightarrow z^2 - \frac{1}{3}z = 3z + 3 = 0 \Rightarrow 3z^2 - 10z + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

c) $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0 \Rightarrow 5^x \cdot 5^3 - \frac{5^x}{5} - 3120 = 0 \Rightarrow \cdot(5^3 - \frac{1}{5})5^x = 3120 \Rightarrow 5^x = \frac{5\cdot 3120}{5^4 - 1} = 25 \Rightarrow x = 2$

d) Aplicando el cambio de variable $z = 10^x$

$2{\cdot}10^{2x+4} + 3{\cdot}10^{x+2} - 5 = 0 \Rightarrow 2\cdot 10^4 \cdot \left(10^x\right)^2 + 3\cdot 10^2 \cdot 10^x - 5 = 0 \Rightarrow 20000z^2 + 300z - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4000z^2 + 60z - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0{,}01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2 \\ z = -0{,}025 \Rightarrow 10^x = -0.025 \text{ sin solución real} \end{cases}$

54. Ejercicio interactivo.

55 a 57. Ejercicios resueltos.

58. Estudia el número de soluciones que tienen los siguientes sistemas lineales y, en los casos en los que existan, hállalas.

a) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2y-z=-1 \\ 5x-y-3z=2 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$

a) $$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ -10y+14z=8 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to \frac{E_3}{2}-E_2} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \end{cases}$$

Infinitas soluciones: $\begin{cases} z=t \\ 5y=7z-4=7t-4 \Rightarrow y=\dfrac{7t-4}{5} \\ x=2z-y=2t-\dfrac{7t-4}{5}=\dfrac{3t+4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+4}{5} \\ y=\dfrac{7t-4}{5} \\ z=t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbb{R}$

b) $$\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 5E_2-3E_1 \\ E_3 \to 5E_3-8E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ -11y+21z=-5 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ 0=-5 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución.

c) $$\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-E_1 \\ E_3 \to E_3-2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases}$$

Infinitas soluciones: $\begin{cases} y=t \\ 5z=4y=4t \Rightarrow z=\dfrac{4t}{5} \\ x=-3y+2z=-3t+\dfrac{8t}{5}=-\dfrac{7t}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{7t}{5} \\ y=t \\ z=\dfrac{4t}{5} \end{cases} \quad \forall t\in\mathbb{R}$

d) Intercambiamos la primera ecuación con la y tercera.

$$\begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 5x-y-3z=2 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow_{E_2 \to E_2-5E_1} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to 2E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 11z=-14 \end{cases}$$

Una única solución: $\begin{cases} x=-2-\dfrac{25}{22}+\dfrac{28}{11}=-\dfrac{13}{22} \\ y=3-\dfrac{182}{44}=-\dfrac{25}{22} \\ z=-\dfrac{14}{11} \end{cases}$

59. Resuelve y clasifica en función del número de soluciones los siguientes sistemas lineales.

a) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-3E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -11y+8z=-25 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to 9E_3-11E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -5z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 2E_2-3E_1 \\ E_3 \to 2E_3-3E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ -18y+7z=10 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to E_3-E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ 8z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{25}{36} \\ y=\dfrac{1}{36} \\ z=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

c) $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-E_1 \\ E_3 \to 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=11 \\ -3y=-3 \\ y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 4E_2-5E_1 \\ E_3 \to E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -3y+2z=9 \end{cases} \Rightarrow \underset{E_3 \to 3E_3-E_2}{} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -15z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

60 a 62. Ejercicios resueltos.

63. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x+3y^2=22 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+5y=-8 \\ xy-3x=-5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=0 \\ xy=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

Despejaremos en una de las ecuaciones y sustituiremos en la otra:

a) $y=8-2x \Rightarrow 2x+3(8-2x)^2=22 \Rightarrow 2x+192+12x^2-96x=22 \Rightarrow 6x^2-47x+85=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5, \quad y=-2 \\ x=\dfrac{17}{6}, \quad y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$

b) $y=\dfrac{-8-2x}{5} \Rightarrow x\cdot\left(\dfrac{-8-2x}{5}\right)-3x=-5 \Rightarrow -8x-2x^2-15x=-25 \Rightarrow 2x^2+23x-25=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1, \quad y=-2 \\ x=-\dfrac{25}{2}, \quad y=\dfrac{17}{5} \end{cases}$

c) $y=-x \Rightarrow -x^2=1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.

d) $y=2x-3 \Rightarrow x^2-(2x-3)^2=3 \Rightarrow x^2-4x^2-9+12x=3 \Rightarrow 3x^2-12x+12=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2, \ y=1$

64. Halla la solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x+y=11 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{y+1}=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} xy=-3 \\ x^2+2y^2=19 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x^2+3y^2=32 \\ -3x^2+4y^2=-48 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2-2xy=16-y^2 \\ x^2-y^2=72 \end{cases}$

a) $x=11-y \Rightarrow \dfrac{1}{11-y}+\dfrac{6}{y+1}=1 \Rightarrow y+1+66-6y=11y+11-y^2-y \Rightarrow y^2-15y+56=0 \Rightarrow \begin{cases} y=8,\ x=3 \\ y=7,\ x=4 \end{cases}$

b) $y=-\dfrac{3}{x} \Rightarrow x^2+\dfrac{18}{x^2}=19 \Rightarrow x^4-19x^2+18=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z^2-19z+18=0 \Rightarrow \begin{cases} z=18 \Rightarrow \begin{cases} x=3\sqrt{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-3\sqrt{2},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ z=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=-3 \\ x=-1,\ y=3 \end{cases} \end{cases}$

c) Multiplicando la primera ecuación por 3, la segunda por 2 y sumando obtenemos:

$17y^2=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4,\ \ y=0 \\ x=-4,\ \ y=0 \end{cases}$

d) $x^2-2xy=16-y^2 \Rightarrow x^2-2xy+y^2=16 \Rightarrow (x-y)^2=16 \Rightarrow x-y=\pm 4$

Distinguimos, por tanto, dos casos:

Caso 1: $x-y=4 \Rightarrow x=y+4 \Rightarrow (y+4)^2-y^2=72 \Rightarrow y^2+16+8y-y^2=72 \Rightarrow 8y=56 \Rightarrow y=7,\ x=11$

Caso 2: $x-y=-4 \Rightarrow x=y-4 \Rightarrow (y-4)^2-y^2=72 \Rightarrow y^2+16-8y-y^2=72 \Rightarrow -8y=56 \Rightarrow y=-7,\ x=-11$

65 a 67. Ejercicios resueltos.

68. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

a) $\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=41 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2^x-2^y=1016 \\ 2^{x-y}=128 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ 3^{x-1}-7^{y+2}=-340 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{2^y}=\dfrac{x+y}{8} \\ x+y=5 \end{cases}$

a) $u=2^x\ ,\ v=5^y \Rightarrow \begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 4\cdot 2^x+5\cdot 5^y=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=9 \\ 4u+5v=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2 \\ v=5 \Rightarrow 5^y=5 \Rightarrow y=1 \end{cases}$

b) $2^{x-y}=128 \Rightarrow 2^{x-y}=2^7 \Rightarrow x-y=7 \Rightarrow x=y+7$

$2^x-2^y=1016 \Rightarrow 2^{7+y}-2^y=1016 \Rightarrow 128\cdot 2^y-2^y=1016 \Rightarrow 127\cdot 2^y=1016 \Rightarrow 2^y=8 \Rightarrow y=3,\ x=10$

c) Hacemos el cambio: $u=3^x\ ,\ v=7^y$

$\begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ 3^{x-1}-7^{y+2}=-340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ \dfrac{3^x}{3}-49\cdot 7^y=-340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=16 \\ u-147v=-1020 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=9 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2 \\ v=7 \Rightarrow 7^y=7 \Rightarrow y=1 \end{cases}$

d) $x+y=5 \Rightarrow y=5-x$

$\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{2^y}=\dfrac{x+y}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{2^{5-x}}=\dfrac{5}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{32}2^x=\dfrac{5}{8} \Rightarrow 32+3\cdot\left(2^x\right)^2=20\cdot 2^x$

Aplicando el cambio de variable $z=2^x$ obtenemos:

$3z^2-20z+32=0 \Rightarrow \begin{cases} z=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2,\ y=3 \\ z=\dfrac{8}{3} \Rightarrow 2^x=\dfrac{8}{3} \Rightarrow x=\log_2\dfrac{8}{3}=3-\log_2 3,\ y=2+\log_2 3 \end{cases}$

69. Halla las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases}\log x + 3\log y = 5\\ \log x - \log y = 3\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}\log_3 x = 7 - \log_3 y\\ x - 2y = 27\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}3x + 2y = 64\\ \log x - \log y = 1\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}\log x^2 - 2\log y = 6\\ 2\log x + \log y^2 = 2\end{cases}$

a) Restando las ecuaciones se obtiene: $4\log y = 2 \Rightarrow \log y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $\log x - \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow \log x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{7}{2}} = 10^3\sqrt{10} = 1000\sqrt{10}$

b) $\begin{cases}\log_3 x = 7 - \log_3 y\\ x - 2y = 27\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_3(xy) = 7\\ x = 2y + 27\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \cdot y = 2187\\ x = 2y + 27\end{cases} \Rightarrow 2y^2 + 27y - 2187 = 0 \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases}y = 27,\ x = 81\\ y = -40{,}5 \text{ No válida}\end{cases}$

c) $\log x - \log y = 1 \Rightarrow \log(\frac{x}{y}) = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 10 \Rightarrow x = 10y$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $30y + 2y = 64 \Rightarrow 32y = 64 \Rightarrow y = 2,\ x = 20$

d) $\begin{cases}\log x^2 - 2\log y = 6\\ 2\log x + \log y^2 = 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{y^2} = 10^6\\ x^2y^2 = 10^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2 = 10^6 y^2\\ x^2y^2 = 10^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2 = 10^6 y^2\\ 10^6 y^4 = 10^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2 = 10^6 y^2\\ y = \frac{1}{10}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 100\\ y = \frac{1}{10}\end{cases}$

70. Comprueba si los números reales indicados pertenecen a la solución de las inecuaciones correspondientes.

a) $x = -2$ de la inecuación $x^3 + x^2 + x \le 6$

b) $x = \frac{1}{e}$ de la inecuación $x + \ln x \ge 0$

c) $x = -0{,}5$ de la inecuación $2^x + x - 2 < 3^x$

a) Sí forma parte de la solución de la inecuación, ya que $(-2)^3 + (-2)^2 - 2 = -8 + 4 - 2 = -6 \le 6$.

b) No forma parte de la solución de la inecuación, ya que $\frac{1}{e} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$.

c) Sí forma parte de la solución de la inecuación, ya que $2^{-0{,}5} - 0{,}5 - 2 - 3^{-0{,}5} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2{,}5 - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$

71. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \le \frac{x}{2}$

b) $2x - 3 - \frac{x}{2} > x + \frac{3x+1}{6}$

c) $x + 2(x+1) + 3(x+2) < \frac{x+38}{2}$

d) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{3x-2}{3} \le \frac{(x+1)^2}{6}$

a) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \le \frac{x}{2} \Rightarrow 4x - 12 - x + 2 \le 4x \Rightarrow -x \le 10 \Rightarrow x \ge -10 \Rightarrow$ Solución: $x \in [-10, +\infty)$

b) $2x - 3 - \frac{x}{2} > x + \frac{3x+1}{6} \Rightarrow 12x - 18 - 3x > 6x + 3x + 1 \Rightarrow 0 > 19 \Rightarrow$ La inecuación no tiene solución.

c) $x + 2(x+1) + 3(x+2) < \frac{x+38}{2} \Rightarrow 2x + 4x + 4 + 6x + 12 < x + 38 \Rightarrow 11x < 22 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-\infty, 2)$

d) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{3x-2}{3} \le \frac{(x+1)^2}{6} \Rightarrow 3x^2 - 3 - 6x + 4 \le x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 8x \le 0 \Rightarrow 2x(x-4) \le 0$

Solución: $x \in [0, 4]$

	$-\infty$ a 0	0 a 4	4 a $+\infty$
x	–	+	+
$x - 4$	–	–	+
Polinomio	+	–	+

72. Halla la solución de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $-2x^3+3x>0$ **c)** $x^3-4x>0$ **e)** $3x(2x-1)+x^2\geq 5x-1$ **g)** $x^4-1>0$

b) $3x^2+x-24\geq 0$ **d)** $x^3+x^2-x-1\leq 0$ **f)** $-x^3-2x^2-x\leq 0$ **h)** $(x-1)(x+4)<-6$

a) $-2x^3+3x>0 \Rightarrow x(-2x^2+3)>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}x\right)>0$

$-\infty \quad -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \quad +\infty$

$x+2$	−	−	+	+
x	−	+	+	+
$x-2$	+	+	+	−
Polinomio	+	−	+	−

Solución: $x\in\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

e) $3x(2x-1)+x^2\geq 5x-1 \Rightarrow (x-1)(7x-1)\geq 0$

$-\infty \quad \frac{1}{7} \quad 1 \quad +\infty$

$7x-1$	−	+	+
$x-1$	−	−	+
Polinomio	+	−	+

Solución: $x\in\left(-\infty, \frac{1}{7}\right]\cup\left[1, +\infty\right)$

b) $3x^2+x-24\geq 0 \Rightarrow (x+3)(3x-8)\geq 0$

$-\infty \quad -3 \quad \frac{8}{3} \quad +\infty$

$x+3$	−	+	+
$3x-8$	−	−	+
Polinomio	+	−	+

Solución: $x\in(-\infty, -3]\cup\left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$

f) $-x^3-2x^2-x\leq 0 \Rightarrow -x(x+1)^2\leq 0$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad +\infty$

$(x+1)^2$	+	+	+
$-x$	+	+	−
Polinomio	+	+	−

Solución: $x\in\{-1\}\cup[0, +\infty)$

c) $x^3-4x>0 \Rightarrow x(x-2)(x+2)>0$

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$

$x+2$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
Polinomio	−	+	−	+

Solución: $x\in(-2, 0)\cup(2, +\infty)$

g) $x^4-1>0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)>0$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$x+1$	−	+	+
$x-1$	−	−	+
x^2+1	+	+	+
Polinomio	+	−	+

Solución: $x\in(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$

d) $x^3+x^2-x-1\leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)^2\leq 0$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$(x+1)^2$	+	+	+
$x-1$	−	−	+
Polinomio	−	−	+

Solución: $x\in(-\infty, 1]$

h) $(x-1)(x+4)<-6 \Rightarrow (x+1)(x+2)<0$

$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad +\infty$

$x+2$	−	+	+
$x+1$	−	−	+
Polinomio	+	−	+

Solución: $x\in(-2, -1)$

73. Resuelve las inecuaciones racionales siguientes.

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geq 0$ **c)** $\dfrac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0$ **e)** $\dfrac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0$ **d)** $\dfrac{x^3}{x^2-9} \geq 0$ **f)** $\dfrac{2x+3}{x^3+1} \geq 0$

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geq 0$

	$-\infty$ a $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ a $+\infty$
$2x+1$	–	+	+
$5x-2$	–	–	+
Fracción	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{2}{5}, +\infty\right)$

b) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$

	$-\infty$ a -2	-2 a -1	-1 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
$x+2$	–	+	+	+	+
$x+1$	–	–	+	+	+
$x-1$	–	–	–	+	+
$x-2$	–	–	–	–	+
Fracción	+	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, +\infty)$

c) $\dfrac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0 \Rightarrow \dfrac{4x-5}{(4x-5)(x+1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} < 0$

Observa que $4x-5$ no se puede anular, por lo que se puede simplificar y la solución es $x \in (-\infty, -1)$.

d) $\dfrac{x^3}{x^2-9} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{(x-3)(x+3)} \geq 0$

	$-\infty$ a -3	-3 a 0	0 a 3	3 a $+\infty$
$x+3$	–	+	+	+
x^3	–	–	+	+
$x-3$	–	–	–	+
Fracción	–	+	–	+

Solución: $x \in (-3, 0] \cup (3, +\infty)$

e) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(x+5)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x+5}{x(x+1)} \geq 0$

	$-\infty$ a -5	-5 a -1	-1 a 0	0 a $+\infty$
$x+5$	–	+	+	+
$x+1$	–	–	+	+
x	–	–	–	+
Fracción	–	+	–	+

Solución: $x \in [-5, -1) \cup (0, +\infty) - \{1\}$

Hay que excluir el valor $x = 1$ de la solución porque es una raíz del denominador y la expresión no está definida para él.

f) $\dfrac{2x+3}{x^3+1} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{(x+1)(x^2-x+1)} \geq 0$

	$-\infty$ a $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ a -1	-1 a $+\infty$
$2x+3$	–	+	+
$x+1$	–	–	+
x^2-x+1	+	+	+
Fracción	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup (-1, +\infty)$

74. Ejercicio interactivo.

75 y 76. Ejercicios resueltos.

77. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x+1 < x+2 \\ 3x-1 \leq 4x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-4 > x \\ x > 2x-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+2x-3 \geq 0 \\ 2(x-3) > -6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} > 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+1 < x+2 \\ 3x-1 \leq 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in [-1, 1)$

b) $\begin{cases} 3x-4 > x \\ x > 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 4 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow$ Sin solución

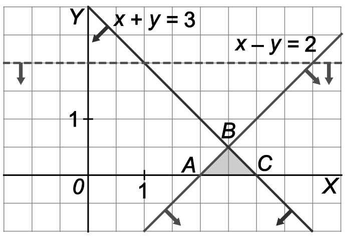
c) $\begin{cases} x^2+2x-3 \geq 0 \\ 2(x-3) > -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(x+3) \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in [1, +\infty)$

d) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} > 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

78. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

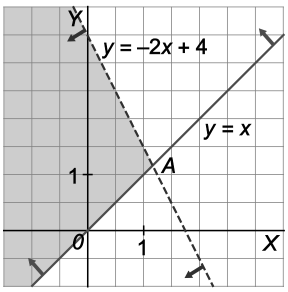
a) $\begin{cases} 0 \leq y < 2 \\ x+y \leq 3 \\ x-y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y < -2x+4 \\ y \geq x \end{cases}$

a)



Vértices $A(2, 0)$ $B(2{,}5\ ;\ 0{,}5)$ $C(3, 0)$

b)



Vértices: $A\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

79 a 91. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Polinomios

92. Simplifica las siguientes expresiones polinómicas.

a) $2(x-2)^2-3(3x+2)-2(3x-2)(3x+2)$

b) $(3x+2)^2+2(2x-3)^2-(2x-5)(x-5)$

c) $(2x^2-2x-13)(3x^2-2x)-3x$

d) $(2x^2-3x+2)(-3x^2+x+1)+(6x-10)x^3$

e) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}\right)+\frac{6}{25}$

f) $\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)(x-2)+2x(x^3-10)x$

g) $(x^3+2x^2+3x+4)(5x-2)$

a) $2(x-2)^2-3(3x+2)-2(3x-2)(3x+2)=2x^2-8x+8-9x-6-18x^2+8=-16x^2-17x+10$

b) $(3x+2)^2+2(2x-3)^2-(2x-5)(x-5)=9x^2+12x+4+8x^2-24x+18-2x^2+10x+5x-25=15x^2+3x-3$

c) $(2x^2-2x-13)(3x^2-2x)-3x=6x^4-4x^3-6x^3+4x^2-39x^2+26x-3x=6x^4-10x^3-35x^2+23x$

d) $(2x^2-3x+2)(-3x^2+x+1)+(6x-10)x^3=-6x^4+2x^3+2x^2+9x^3-3x^2-3x-6x^2+2x+2+6x^4-10x^3=$

$=x^3-7x^2-x+2$

e) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}\right)+\frac{6}{25}=x^3+\frac{4}{15}x-\frac{9}{10}x^2-\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=x^3-\frac{9}{10}x^2+\frac{4}{15}x$

f) $\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)(x-2)+2x(x^3-10)x=(x^4-16)(x-2)+2x^5-20x^2=x^5-2x^4-16x+32+2x^5-20x^2=$

$=3x^5-2x^4-20x^2-16x+32$

g) $(x^3+2x^2+3x+4)(5x-2)=5x^4-2x^3+10x^3-4x^2+15x^2-6x+20x-8=5x^4+8x^3+11x^2+14x-8$

93. Demuestra la igualdad algebraica:

$$\boldsymbol{(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz}$$

$(x+y+x)^2=(x+y+z)(x+y+z)=x^2+xy+xz+yx+y^2+yz+zx+zy+z^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

94. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios.

a) $\left(6x^4+7x^3-5x^2-6x-6\right):\left(3x^2+2x+1\right)$

b) $\left(6x^4+7x^3-x^2+11x-8\right):\left(3x^2+x-2\right)$

c) $\left(6x^5-10x^4-15x^3-7x^2+3\right):\left(4x^2-4x-4\right)$

a) Cociente: $2x^2+x-3$

Resto: $-x-3$

b) Cociente: $2x^2+\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}$

Resto: $\frac{125x}{9}-\frac{64}{9}$

c) Cociente: $\frac{3}{2}x^3-x^2-\frac{13}{4}x-6$

Resto: $-37x-21$

95. Aplica la regla de Ruffini para resolver las siguientes divisiones.

a) $\left(-3x^3+2x^2+x-3\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

b) $\left(2x^4+2x^3+2x^2-2\right):(-x+3)$

c) $\left(x^5+2x^3-2x-1\right):(2x+4)$

d) $\left(x^5+3x^4-3x^3-x^2-4x+2\right):(2x+4)$

e) $\left(-2x^4-x^3-2x^2+x+1\right):(2x-3)$

a) Cociente: $-3x^2+\frac{7}{2}x-\frac{3}{4}$

Resto: $-\frac{21}{8}$

b) Cociente: $-2x^3-8x^2-26x-78$

Resto: 232

c) Cociente: $\frac{1}{2}x^4-x^3+3x^2-6x+11$

Resto: –45

d) Cociente: $\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{2}x-11$

Resto: 46

e) Cociente: $-x^3-2x^2-4x-\frac{11}{2}$

Resto: $-\frac{31}{2}$

96. Determina, si existen, las raíces enteras de cada uno de los siguientes polinomios y factorízalos.

a) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$

c) $P(x)=2x^4-x^3-5x^2+x+3$

d) $P(x)=4x^3-4x^2-11x+6$

e) $P(x)=x^4-4x^2$

f) $P(x)=6x^5+11x^4+3x^3-3x^2-x$

g) $P(x)=x^6-4x^4-x^2+4$

h) $P(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}$

a) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$. Las raíces enteras son $x=1$, $x=-2$ y $x=3$.

b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3=(x-1)^2(x+3)$. Las raíces enteras son $x=1$ y $x=-3$.

c) $P(x)=2x^4-x^3-5x^2+x+3=2(x-1)(x+1)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)$. Las raíces enteras son $x=1$ y $x=-1$.

d) $P(x)=4x^3-4x^2-11x+6=4(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$. La única raíz entera es $x=2$.

e) $P(x)=x^4-4x^2=x^2(x+2)(x-2)$. Las raíces enteras son $x=0$, $x=-2$ y $x=2$.

f) $P(x)=6x^5+11x^4+3x^3-3x^2-x=6x(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$. Las raíces enteras son $x=0$ y $x=-1$.

g) $P(x)=x^6-4x^4-x^2+4=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x^2+1)$. Las raíces enteras son $x=1$, $x=-1$, $x=2$ y $x=-2$.

h) $P(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}=\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}\right)^2$. No tiene raíces enteras.

97. En cada caso, calcula el m.c.d. y el m.c.m de los polinomios dados.

a) $P(x)=x^2+x-2$ y $Q(x)=x^2+2x-3$

b) $P(x)=2x^2-2$ y $Q(x)=4x-4$

c) $P(x)=x-1$, $Q(x)=2x+2$ y $R(x)=3x^2-3$

d) $P(x)=x^2(x-2)$, $Q(x)=x\cdot\left(x^2-4\right)$ y $R(x)=x^3-2x^2$

a) $P(x)=(x-1)(x+2) \quad Q(x)=(x-1)(x+3)$

m.c.d.$\left[P(x),\,Q(x)\right]=x-1 \quad$ m.c.m.$\left[P(x),\,Q(x)\right]=(x-1)(x+2)(x+3)=x^3+4x^2+x-6$

b) $P(x)=2(x-1)(x+1) \quad Q(x)=4(x-1)$

m.c.d.$\left[P(x),\,Q(x)\right]=2(x-1)=2x-2 \quad$ m.c.m.$\left[P(x),\,Q(x)\right]=4(x-1)(x+1)=4x^2-4$

c) $P(x)=x-1 \quad Q(x)=2(x+1) \quad R(x)=3(x-1)(x+1)$

m.c.d.$\left[P(x),\,Q(x),\,R(x)\right]=1 \quad$ m.c.m.$\left[P(x),\,Q(x),\,R(x)\right]=6(x-1)(x+1)=6x^2-6$

d) $P(x)=x^2(x-2) \quad Q(x)=x(x-2)(x+2) \quad R(x)=x^2(x-2)$

m.c.d.$\left[P(x),\,Q(x),\,R(x)\right]=x(x-2)=x^2-2x \quad$ m.c.m.$\left[P(x),\,Q(x),\,R(x)\right]=x^2(x-2)(x+2)=x^4-4x^2$

98. Calcula el valor de k para que $x^3-(3k+2)x^2-3$ entre $x+3$:

a) Sea exacta.

b) Tenga resto 15.

a) Por el teorema del resto se tiene: $0=(-3)^3-(3k+2)(-3)^2-3 \Rightarrow 0=-27-27k-18-3 \Rightarrow k=-\dfrac{16}{9}$

b) Por el teorema del resto se tiene: $15=(-3)^3-(3k+2)(-3)^2-3 \Rightarrow 15=-27-27k-18-3 \Rightarrow k=-\dfrac{7}{3}$

Números combinatorios. Binomio de Newton

99. Calcula las siguientes operaciones.

a) $\dbinom{252}{250}$

b) $\dbinom{25}{3}+\dbinom{25}{4}$

c) $\dbinom{4}{0}+\dbinom{4}{1}+\dbinom{4}{2}+\dbinom{4}{3}$

d) $\dbinom{n+2}{2}+\dbinom{n+2}{n-1}$

a) $\dbinom{252}{250}=\dbinom{252}{2}=\dfrac{252\cdot 251}{2\cdot 1}=31626$

b) $\dbinom{25}{3}+\dbinom{25}{4}=\dbinom{26}{4}=\dfrac{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=14\,950$

c) $\dbinom{4}{0}+\dbinom{4}{1}+\dbinom{4}{2}+\dbinom{4}{3}=1+4+6+4=15$

d) $\dbinom{n+2}{2}+\dbinom{n+2}{n-1}=\dbinom{n+2}{2}+\dbinom{n+2}{3}=\dbinom{n+3}{3}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}=\dfrac{n^3+6n^2+11n+6}{6}$

100. Simplifica las siguientes expresiones y calcula el resultado.

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!}$ **b)** $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}$ **c)** $\dfrac{\binom{n+3}{n}+\binom{n+2}{n}}{\frac{n+6}{6}}$ **d)** $\dfrac{2^{n-3}(n+2)!}{2^{n-1}\binom{n+2}{2}}$

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!}=6+8\cdot 7=6+56=62$

b) $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}=n+(n+2)(n+1)=n+n^2+3n+2=n^2+4n+2$

c) $\dfrac{\binom{n+3}{n}+\binom{n+2}{n}}{\frac{n+6}{6}}=\dfrac{\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{2}}{\frac{n+6}{6}}=\dfrac{\frac{n^3+6n^2+11n+6}{6}+\frac{n^2+3n+2}{2}}{\frac{n+6}{6}}=\dfrac{n^3+6n^2+11n+6+3n^2+9n+6}{n+6}=$

$=\dfrac{n^3+9n^2+20n+12}{n+6}=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+6)}{n+6}=(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$

d) $\dfrac{2^{n-3}(n+2)!}{2^{n-1}\binom{n+2}{2}}=\dfrac{2^{n-3-n+1}(n+2)!}{\frac{(n+2)!}{2!n!}}=2^{-2}\cdot 2\cdot n!=\dfrac{n!}{2}$

101. Desarrolla los binomios siguientes.

a) $(2+x)^4$ **c)** $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ **e)** $\left(1+2\sqrt{2}\right)^2$ **g)** $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4$

b) $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^3$ **d)** $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6$ **f)** $\left(2-3\sqrt{3}\right)^3$ **h)** $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^3$

a) $(2+x)^4=\binom{4}{0}2^4+\binom{4}{1}2^3x+\binom{4}{2}2^2x^2+\binom{4}{3}2x^3+\binom{4}{4}x^4=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$

b) $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^3=\binom{3}{0}2^3-\binom{3}{1}2^2\cdot\dfrac{x}{3}+\binom{3}{2}2\left(\dfrac{x}{3}\right)^2-\binom{3}{3}\left(\dfrac{x}{3}\right)^3=8-4x+\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{27}x^3$

c) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^5=\binom{5}{0}\left(\dfrac{x}{2}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4\cdot\dfrac{2}{x^2}+\binom{5}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^2+\binom{5}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3+\binom{5}{4}\cdot\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^4+\binom{5}{5}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^5=$

$=\dfrac{x^5}{32}+5\cdot\dfrac{x^4}{16}\cdot\dfrac{2}{x^2}+10\cdot\dfrac{x^3}{8}\cdot\dfrac{4}{x^4}+10\cdot\dfrac{x^2}{4}\cdot\dfrac{8}{x^6}+5\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{16}{x^8}+\dfrac{32}{x^{10}}=\dfrac{x^5}{32}+\dfrac{5x^2}{8}+\dfrac{5}{x}+\dfrac{20}{x^4}+\dfrac{40}{x^7}+\dfrac{32}{x^{10}}$

d) $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6=\binom{6}{0}(2x^2)^6-\binom{6}{1}(2x^2)^5\cdot\dfrac{3}{x}+\binom{6}{2}(2x^2)^4\left(\dfrac{3}{x}\right)^2-\binom{6}{3}(2x^2)^3\left(\dfrac{3}{x}\right)^3+\binom{6}{4}(2x^2)^2\left(\dfrac{3}{x}\right)^4-\binom{6}{5}2x^2\left(\dfrac{3}{x}\right)^5+\binom{6}{6}\left(\dfrac{3}{x}\right)^6=$

$=64x^{12}-576x^9+2160x^6-4320x^3+4860-\dfrac{2916}{x^3}+\dfrac{729}{x^6}$

e) $\left(1+2\sqrt{2}\right)^2=1+4\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=9+4\sqrt{2}$

f) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^3=8-3\cdot 2^2\cdot 3\sqrt{3}+3\cdot 2\cdot(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^3=8-36\sqrt{3}+162-81\sqrt{3}=170-117\sqrt{3}$

g) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4=\left(\dfrac{2+\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^4=\left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^4=\dfrac{256}{4}=64$

h) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^3=\left(5\sqrt{2}\right)^3-3\left(5\sqrt{2}\right)^2 2\sqrt{3}+35\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^3=250\sqrt{2}-300\sqrt{3}+180\sqrt{2}-24\sqrt{3}=$

$=430\sqrt{2}-324\sqrt{3}$

Fracciones algebraicas

102. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-x^2-8x+12}$ **c)** $\dfrac{x^4-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$ **e)** $\dfrac{xy-3y+x-3}{xy-3y}$

b) $\dfrac{-2x^4+5x^3-5x+2}{2x^4+7x^3+3x^2-8x-4}$ **d)** $\dfrac{x^3-y^3}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}$ **f)** $\dfrac{x^2y+y^2x+x^2-y^2}{x^2y-xy^2+x^2y^2}$

a) $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-x^2-8x+12}=\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)^2}=\dfrac{x-1}{x+3}$

b) $\dfrac{-2x^4+5x^3-5x+2}{2x^4+7x^3+3x^2-8x-4}=\dfrac{-(x+1)(x-1)(x-2)(2x-1)}{(x-1)(x+2)^2(2x+1)}=-\dfrac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x+2)^2(2x+1)}=\dfrac{-2x^3+3x^2+3x-2}{2x^3+9x^2+12x+4}$

c) $\dfrac{x^4-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{x+1}{x-1}$

d) $\dfrac{x^3-y^3}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}=\dfrac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{(x-y)(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)}=\dfrac{1}{x+y}$

e) $\dfrac{xy-3y+x-3}{xy-3y}=\dfrac{x(y+1)-3(y+1)}{y(x-3)}=\dfrac{(y+1)(x-3)}{y(x-3)}=\dfrac{y+1}{y}$

f) $\dfrac{x^2y+y^2x+x^2-y^2}{x^2y-xy^2+x^2y^2}=\dfrac{xy(x+y)+(x-y)(x+y)}{xy(x-y+xy)}=\dfrac{(xy+x-y)(x+y)}{xy(x-y+xy)}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$

103. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas y simplifica los resultados al máximo.

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}$ **c)** $\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{12x}{9-x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{x^2-25}$ **d)** $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3x-10}{x^2-6x+8}-\dfrac{2x-7}{x-4}$

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}+\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2+1+x^3+x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{x^2-25}=\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{x(x+5)-(2x-1)(x-5)-50}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{-x^2+16x-55}{(x-5)(x+5)}=$

$=\dfrac{-(x-11)(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{11-x}{x+5}$

c) $\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{12x}{9-x^2}=\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{(2x^2-x)(x-3)+2x(x+3)-12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^3-5x^2-3x}{(x+3)(x-3)}=$

$=\dfrac{x(x-3)(2x+1)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^2+x}{x+3}$

d) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3x-10}{x^2-6x+8}-\dfrac{2x-7}{x-4}=\dfrac{(x-4)(x-2)+(3x-10)(x-3)-(2x-7)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-2)}=\dfrac{-2x^3+21x^2-72x+80}{(x-3)(x-4)(x-2)}=$

$=\dfrac{(x-4)^2(-2x+5)}{(x-3)(x-4)(x-2)}=\dfrac{-2x^2+13x-20}{x^2-5x+6}$

104. Realiza los siguientes productos y cocientes de fracciones algebraicas y simplifica al máximo los resultados.

a) $\dfrac{x^2-1}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-4}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-9}{x+2}$

b) $\dfrac{3x^2y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}$

c) $\dfrac{x^3-x}{2x-4}:\dfrac{4x+4}{3x-6}$

d) $\dfrac{1}{x-y}:\dfrac{1}{x^2+y^2-2xy}$

a) $\dfrac{x^2-1}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-4}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-9}{x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)(x-3)=x^3-4x^2+x+6$

b) $\dfrac{3x^2y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}=\dfrac{3x^2y(x-y)(x+y)}{(x-y)6xy^2(x+y)}=\dfrac{x}{2y}$

c) $\dfrac{x^3-x}{2x-4}:\dfrac{4x+4}{3x-6}=\dfrac{x(x-1)(x+1)3(x-2)}{2(x-2)4(x+1)}=\dfrac{3x(x-1)}{8}=\dfrac{3x^2-3x}{8}$

d) $\dfrac{1}{x-y}:\dfrac{1}{x^2+y^2-2xy}=\dfrac{(x-y)^2}{x-y}=x-y$

Ecuaciones polinómicas

105. Resuelve estas ecuaciones de primer grado.

a) $2x-2(3x-1)+4(2x-5)-10=8x$

b) $2x-\dfrac{3x-1}{3}=x+\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{3x-1}{4}-2x=\dfrac{2x-\frac{7}{4}}{2}-(3x-1)$

d) $\dfrac{x+10}{2}+\dfrac{2(x-2)}{5}=\dfrac{5x-15}{3}$

e) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x-2}{12}+\dfrac{x+3}{2}=2x-\dfrac{1}{6}$

a) $2x-2(3x-1)+4(2x-5)-10=8x\Rightarrow 2x-6x+2+8x-20-10=8x\Rightarrow -4x=28\Rightarrow x=-7$

b) $2x-\dfrac{3x-1}{3}=x+\dfrac{1}{3}\Rightarrow 6x-3x+1=3x+1\Rightarrow 0x=0\Rightarrow$ Todos los números reales son solución.

c) $\dfrac{3x-1}{4}-2x=\dfrac{2x-\frac{7}{4}}{2}-(3x-1)\Rightarrow 3x-1-8x=4x-\dfrac{7}{2}-12x+4\Rightarrow 3x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{x+10}{2}+\dfrac{2(x-2)}{5}=\dfrac{5x-15}{3}\Rightarrow 15x+150+12x-24=50x-150\Rightarrow -23x=-276\Rightarrow x=12$

e) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x-2}{12}+\dfrac{x+3}{2}=2x-\dfrac{1}{6}\Rightarrow 8x-x+2+6x+18=24x-2\Rightarrow 11x=22\Rightarrow x=2$

106. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $4x^2 - 7x - 2 = 0$

b) $-7x^2 + 12x - 5 = 0$

c) $x(2x-1) - 3x(x+1) = 0$

d) $\frac{x(x-1)}{15} + \frac{(x-6)^2}{5} + \frac{(x+2)^2}{3} = \frac{(3x-2)(3x-4)}{15}$

e) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$

f) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0$

g) $x^4 - 125x^2 + 484 = 0$

a) $4x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{8} = \frac{7 \pm 9}{8} \Rightarrow x = 2,\ x = -\frac{1}{4}$

b) $-7x^2 + 12x - 5 = 0 \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-140}}{-14} = \frac{-12 \pm 2}{-14} \Rightarrow x = \frac{5}{7},\ x = 1$

c) $x(2x-1) - 3x(x+1) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = -4$

d) $x^2 - x + 3(x^2 + 36 - 12x) + 5(x^2 + 4 + 4x) = 9x^2 - 18x + 8 \Rightarrow 9x^2 - 17x + 128 = 9x^2 - 18x + 8 \Rightarrow x = -120$

e) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-3)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 3$

f) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0 \Rightarrow 6(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{3}\right) = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = -\frac{3}{2},\ x = \frac{5}{3}$

g) $x^4 - 125x^2 + 484 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = x^2 \\ z^2 = x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2 - 125z + 484 = 0 \Rightarrow z = \frac{125 \pm \sqrt{15625 - 1936}}{2} = \frac{125 \pm 117}{2} = \begin{cases} z = 121 \Rightarrow x = 11,\ x = -11 \\ z = 4 \Rightarrow x = 2,\ x = -2 \end{cases}$

Ecuaciones racionales e irracionales

107. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes.

a) $2x - \frac{12}{2-x} = 7 + \frac{11x+11}{9}$

b) $\frac{4}{x} + \frac{4}{x+2} = 3$

c) $\frac{x+9}{x} - \frac{5+x}{x+2} = \frac{12x+12}{x^2+2x}$

d) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2}$

e) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{4x+12}{3x+3}$

f) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{9}{20}$

g) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = x + \frac{7}{6}$

a) $2x - \frac{12}{2-x} = 7 + \frac{11x+11}{9} \Rightarrow 9(2-x)2x - 108 = 63(2-x) + (2-x)(11x+11) \Rightarrow 7x^2 - 88x + 256 = 0 \Rightarrow x = 8,\ x = \frac{32}{7}$

b) $\frac{4}{x} + \frac{4}{x+2} = 3 \Rightarrow 4(x+2) + 4x = 3x(x+2) \Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -\frac{4}{3}$

c) $\frac{x+9}{x} - \frac{5+x}{x+2} = \frac{12x+12}{x^2+2x} \Rightarrow (x+9)(x+2) - x(5+x) = 12x + 12 \Rightarrow -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

d) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2} \Rightarrow x + a + x - a = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

e) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{4x+12}{3x+3} \Rightarrow (x+1)(3x+3) = (4x+12)(x-1) \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -5$

f) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{9}{20} \Rightarrow 20(x+2)^2 - 20(x+1)^2 = 9(x+1)(x+2) \Rightarrow 9x^2 - 13x - 42 = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -\frac{14}{9}$

g) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{7}{6} \Rightarrow 6(x^2+1)(x^2-1) + 6x^2 = 6x^2(x^2-1) + 7x(x^2-1) \Rightarrow 7x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = \frac{-1 \pm \sqrt{22}}{7}$

108. Resuelve estas ecuaciones irracionales.

a) $2-3\sqrt{x}=-x$

b) $3x+\sqrt{2x-2}=2\sqrt{2x-2}+23$

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$

d) $3\sqrt{3x-1}=2\sqrt{3(2x-1)}$

e) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{7x-3}$

f) $\dfrac{2\sqrt{x}}{4+\sqrt{x-5}}=\dfrac{4-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}}$

a) $2-3\sqrt{x}=-x\Rightarrow 3\sqrt{x}=x+2\Rightarrow 9x=x^2+4x+4\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow x=4,\ x=1$

b) $3x+\sqrt{2x-2}=2\sqrt{2x-2}+23\Rightarrow 3x-23=\sqrt{2x-2}\Rightarrow 9x^2-138x+529=2x-2\Rightarrow\Rightarrow x=9,\ x=\dfrac{59}{9}$ (Falsa)

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5\Rightarrow\sqrt{x+1}=5-\sqrt{2x+3}\Rightarrow x+1=25+2x+3-10\sqrt{2x+3}\Rightarrow 10\sqrt{2x+3}=x+27\Rightarrow$

$\Rightarrow 200x+300=x^2+729+54x\Rightarrow x^2-146x+429=0\Rightarrow x=143$ (Falsa), $x=3$

d) $3\sqrt{3x-1}=2\sqrt{3(2x-1)}\Rightarrow 9(3x-1)=4\cdot 3(2x-1)\Rightarrow 3x=-3\Rightarrow x=-1$ (Falsa). La ecuación no tiene solución.

e) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{7x-3}\Rightarrow x+5+x+2\sqrt{x^2+5x}=7x-3\Rightarrow 2\sqrt{x^2+5x}=5x-8\Rightarrow 4x^2+20x=25x^2+64-80x\Rightarrow$

$\Rightarrow 21x^2-100x+64=0\Rightarrow x=4,\ x=\dfrac{16}{21}$ (Falsa)

f) $\dfrac{2\sqrt{x}}{4+\sqrt{x-5}}=\dfrac{4-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}}\Rightarrow 2\sqrt{x^2-5x}=21-x\Rightarrow 4x^2-20x=441+x^2-42x\Rightarrow\Rightarrow x=9,\ x=-\dfrac{49}{3}$ (Falsa)

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

109. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $2\log(2x-2)-\log(x-1)=1$

b) $\log(65-x^3)=3\log(5-x)$

c) $\log 10^{\sqrt{20x+320}}=10\sqrt{x}$

d) $3\log_x 2+\log_x 4=-5$

e) $\log\sqrt{7x+51}-1=\log 9-\log\sqrt{2x+67}$

f) $\log_3(x-1)-\log_3(x+2)=1-\log_3(x+6)$

g) $\log_x 25+\log_{x^2}\dfrac{1}{5}=\log_{\sqrt{5}}x$

a) $2\log(2x-2)-\log(x-1)=1\Rightarrow\log\dfrac{(2x-2)^2}{x-1}=\log 10\Rightarrow\dfrac{(2x-2)^2}{x-1}=10\Rightarrow\dfrac{4(x-1)^2}{x-1}=10\Rightarrow 4(x-1)=10\Rightarrow x=\dfrac{7}{2}$

b) $\log(65-x^3)=3\log(5-x)\Rightarrow\log(65-x^3)=\log(5-x)^3\Rightarrow 65-x^3=(5-x)^3\Rightarrow 65-x^3=125-75x+15x^2-x^3\Rightarrow$
$\Rightarrow 15x^2-75x+60=0\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow x=4,\ x=1$

c) $\log 10^{\sqrt{20x+320}}=10\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{20x+320}=10\sqrt{x}\Rightarrow 20x+320=100x\Rightarrow x=4$

d) $3\log_x 2+\log_x 4=-5\Rightarrow\log_x(2^3\cdot 4)=-5\Rightarrow x^{-5}=32=2^5=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

e) $\log\sqrt{7x+51}-1=\log 9-\log\sqrt{2x+67}\Rightarrow\log\dfrac{\sqrt{7x+51}}{10}=\log\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{7x+51}}{10}=\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}}\Rightarrow$

$\Rightarrow 14x^2+571x+3417=8100\Rightarrow 14x^2+571x-4683=0\Rightarrow x=7,\ x=-\dfrac{669}{14}$ (Falsa)

f) $\log_3(x-1)-\log_3(x+2)=1-\log_3(x+6)\Rightarrow\log_3\dfrac{x-1}{x+2}=\log_3\dfrac{3}{x+6}\Rightarrow\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3}{x+6}\Rightarrow x^2+5x-6=3x+6\Rightarrow$

$x^2+2x-12=0\Rightarrow x=-1+\sqrt{13},\ x=-1-\sqrt{13}$ (Falsa)

g) $\log_x 25+\log_{x^2}\dfrac{1}{5}=\log_{\sqrt{5}}x\Rightarrow\dfrac{\log 25}{\log x}+\dfrac{\log\frac{1}{5}}{\log x^2}=\dfrac{\log x}{\log\sqrt{5}}\Rightarrow\dfrac{2\log 5}{\log x}-\dfrac{\log 5}{2\log x}=\dfrac{2\log x}{\log 5}\Rightarrow\dfrac{3\log 5}{2\log x}=\dfrac{2\log x}{\log 5}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3(\log 5)^2=4(\log x)^2\Rightarrow\log x=\dfrac{\sqrt{3}\log 5}{2}=\log\sqrt{5^{\sqrt{3}}}\Rightarrow x=\sqrt{5^{\sqrt{3}}}$

110. Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5}$ **d)** $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90$ **g)** $9^{x+2} + 3^{x+3} - 810 = 0$

b) $4^{(x-2)^2} = 262144$ **e)** $9^x + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111$ **h)** $\sqrt[x]{27} = 3^{x+2}$

c) $9^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0$ **f)** $2^{2x-4} - 5 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0$ **i)** $49^{\frac{x-5}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{7^{x-1}}}$

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2^{2(x^2+1)} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2x^2 + 2 = 5x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -\dfrac{1}{2}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144 \Rightarrow 4^{(x-2)^2} = 4^9 \Rightarrow (x-2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \Rightarrow x = 5 \\ x-2 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

c) Aplicando el cambio $z = 3^x \Rightarrow 9^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0 \Rightarrow z^2 + 5z - 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ z = -8 \Rightarrow 3^x = -8 \text{ sin solución real} \end{cases}$

d) Aplicando el cambio de variable $z = 3^x$

$3^{x+2} + 9^{x-1} = 90 \Rightarrow 9z + \dfrac{z^2}{9} = 90 \Rightarrow z^2 + 81z - 810 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \\ z = -90 \Rightarrow 3^x = -90 \text{ sin solución real} \end{cases}$

e) Aplicando el cambio de variable $z = 3^x$

$9^x + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111 \Rightarrow z^2 + \dfrac{z^2}{3} + \dfrac{z}{3} = 111 \Rightarrow 4z^2 + z - 333 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \\ z = -\dfrac{37}{4} \Rightarrow 3^x = -\dfrac{37}{4} \text{ sin solución real} \end{cases}$

f) Aplicando el cambio de variable $z = 2^x$

$2^{2x-4} - 5 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{z^2}{16} - \dfrac{5z}{8} + 1 = 0 \Rightarrow z^2 - 10z + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \\ z = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

g) Con el cambio $z = 3^x \Rightarrow 9^{x+2} + 3^{x+3} - 810 = 0 \Rightarrow 3z^2 + z - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ z = -\dfrac{10}{3} \Rightarrow 3^x = -\dfrac{10}{3} \text{ sin solución real} \end{cases}$

h) $\sqrt[x]{27} = 3^{x+2} \Rightarrow 3^{\frac{3}{x}} = 3^{x+2} \Rightarrow \dfrac{3}{x} = x + 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = -3$

i) $49^{\frac{x-5}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{7^{x-1}}} \Rightarrow 7^{\frac{2x-10}{3}} = 7^{\frac{1-x}{2}} \Rightarrow \dfrac{2x-10}{3} = \dfrac{1-x}{2} \Rightarrow 4x - 20 = 3 - 3x \Rightarrow 7x = 23 \Rightarrow x = \dfrac{23}{7}$

Sistemas de ecuaciones

111. Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} y = \dfrac{x+1}{2} + 3 \\ y = 2x + 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2(2x+y) - 3(3x-2y) = -34 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{x+1}{2} + 3 \\ y = 2x + 10 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+1}{2} + 3 = 2x + 10 \Rightarrow x + 1 + 6 = 4x + 20 \Rightarrow 3x = -13 \Rightarrow x = -\dfrac{13}{3},\ y = \dfrac{4}{3}$

b) $\begin{cases} 2(2x+y) - 3(3x-2y) = -34 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 9x + 6y = -34 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 8y = -34 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = -3$

112. Indica si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son compatibles o incompatibles y calcula, según el caso, todas sus soluciones.

a) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -10y+2z=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -7y=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-3E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ -8y+10z=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ 0=-12 \end{cases}$

Sistema incompatible. No tiene solución.

c) $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-E_1 \\ E_3 \to E_3-2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ -3y+10z=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E_3 \to 5E_3-3E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ 35z=-70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ -18y+18z=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E_3 \to E_3-2E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t-2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado

113. Estudia la compatibilidad de estos sistemas y halla, en su caso, sus soluciones.

a) $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=15 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6t \\ y=2-2t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado

b) $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-5E_1 \\ E_3 \to E_3-6E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-5 \\ -11y+7z=36 \\ -11y+7z=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-5 \\ -11y+7z=36 \\ 0=-1 \end{cases}$

Sistema incompatible. No tiene solución.

c) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=15 \\ x+y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 2E_2-3E_1 \\ E_3 \to 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-7z=30 \\ y-3z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-7z=30 \\ 4z=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-4 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-3E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=4 \\ -4y+5z=-5 \\ -7y+7z=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E_3 \to 4E_3-7E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=4 \\ -4y+5z=-5 \\ -7z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

114. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de segundo grado.

a) $\begin{cases} x-6y=-6 \\ 2x^2+y^2=76 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3xy-2x^2=-26 \\ 4x+5y=-7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{2}=15 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x^2+3xy=-8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x^2+5y^2=20 \\ 4x^2-y^2=-4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2-2(x-y)^2=36 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=5 \end{cases}$

a) $x=6y-6 \Rightarrow 2(6y-6)^2+y^2=76 \Rightarrow 73y^2-144y-4=0 \Rightarrow \begin{cases} y=2,\ x=6 \\ y=-\dfrac{2}{73},\ x=-\dfrac{450}{73} \end{cases}$

b) $y=-\dfrac{4x+7}{5} \Rightarrow -3x\cdot\dfrac{4x+7}{5}-2x^2=-26 \Rightarrow -22x^2-21x+130=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{65}{22},\ y=\dfrac{53}{55} \\ x=2,\ y=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{2}=15 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+y=30 \\ 2y+3x=xy \end{cases}$

$y=30-6x \Rightarrow 60-12x+3x=30x-6x^2 \Rightarrow 2x^2-13x+20=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4,\ y=6 \\ x=\dfrac{5}{2},\ y=15 \end{cases}$

d) $y=\dfrac{5-x}{2} \Rightarrow x^2+3x(\dfrac{5-x}{2})=-8 \Rightarrow x^2-15x-16=0 \Rightarrow \begin{cases} x=16,\ y=-\dfrac{11}{2} \\ x=-1,\ y=3 \end{cases}$

e) Multiplicando la segunda ecuación por 5 y sumándole la primera obtenemos:

$23x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0,\ y=2 \\ x=0,\ y=-2 \end{cases}$

f) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=5 \Rightarrow 3x+2y=30 \Rightarrow y=15-\dfrac{3}{2}x$

$x^2-2\left(\dfrac{5}{2}x-15\right)^2=36 \Rightarrow 23x^2-300x+972=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{162}{23},\ y=\dfrac{102}{23} \\ x=6,\ y=6 \end{cases}$

115. Resuelve los siguientes sistemas exponenciales y logarítmicos.

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 15 \cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3 \cdot 5^{x+1} + 2 \cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5 \cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x - y = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases}$

a) Hacemos el cambio: $u = 2^x$, $v = 3^y$: $\begin{cases} u + v = 11 \\ u^2 + v^2 = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2,\ v = 9 \Rightarrow x = 1,\ y = 2 \\ u = 9,\ v = 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log 9}{\log 2},\ y = \dfrac{\log 2}{\log 3} \end{cases}$

b) Hacemos el cambio: $u = 2^x$, $v = 3^y$: $\begin{cases} u + 6v = 8 \\ \dfrac{5}{2}u + v^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2,\ v = 1 \Rightarrow x = 1,\ y = 0 \\ u = -76,\ v = 14 \ \text{ sin solución real} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow x = 30,\ y = 3$

d) $x = y - 1 \Rightarrow 3^{y-1} + 3^{y+1} = 18 \Rightarrow \dfrac{3^y}{3} + 3 \cdot 3^y = 18 \Rightarrow \dfrac{10}{3} 3^y = 18 \Rightarrow 3^y = \dfrac{27}{5} \Rightarrow y = \dfrac{\log \frac{27}{5}}{\log 3} = 3 - \dfrac{\log 5}{\log 3},\ x = 2 - \dfrac{\log 5}{\log 3}$

e) Hacemos el cambio: $u = \log(x-2)$, $v = \log(y+2)$

$\begin{cases} 2u + 3v = 2 \\ 4u + 5v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\dfrac{13}{2} \Rightarrow \log(x-2) = -\dfrac{13}{2} \Rightarrow x = 2 + 10^{-\frac{13}{2}} \\ v = 5 \Rightarrow \log(y+2) = 5 \Rightarrow y = 10^5 - 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 y^2 = 100 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5,\ y = 2 \quad x = -5,\ y = 2 \quad x = 2,\ y = 5 \quad x = -2,\ y = 5 \\ x = 5,\ y = -2 \quad x = -5,\ y = -2 \ x = 2,\ y = -5 \quad x = -2,\ y = -5 \end{cases}$

g) Hacemos el cambio: $u = 5^x$, $v = 6^y$: $\begin{cases} 15u - 6v = 339 \\ 15u + 72v = 807 \end{cases} \Rightarrow u = 25,\ v = 6 \Rightarrow x = 2,\ y = 1$

h) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ 2^{x-24} = 2^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10y \\ x - 24 = 2y \end{cases} \Rightarrow x = 30,\ y = 3$

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

116. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $3x + 3(2x-5) - 4(x-2) \le 2 - x$

c) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x+2}{4} + \dfrac{x-3}{18} \ge -\dfrac{8}{9}$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2}$

d) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x}{2} \le 2(x-1) - \dfrac{35}{4}$

a) $3x + 3(2x-5) - 4(x-2) \le 2 - x \Rightarrow 3x + 6x - 15 - 4x + 8 \le 2 - x \Rightarrow 6x \le 9 \Rightarrow x \le \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2} \Rightarrow 3x - x + 1 > 6 - 6x + 15 \Rightarrow 8x > 20 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$

c) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x+2}{4} + \dfrac{x-3}{18} \ge -\dfrac{8}{9} \Rightarrow 12x + 12 - 9x - 18 + 2x - 6 \ge -32 \Rightarrow 5x \ge -20 \Rightarrow x \ge -4 \Rightarrow$ Solución: $x \in [-4, +\infty)$

d) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x}{2} \le 2(x-1) - \dfrac{35}{4} \Rightarrow 2x - 3 - 2x \le 8x - 8 - 35 \Rightarrow 40 \le 8x \Rightarrow x \ge 5 \Rightarrow$ Solución: $x \in [5, +\infty)$

117. Calcula las soluciones de las inecuaciones polinómicas siguientes.

a) $x^2 + x - 12 \geq 0$

b) $-2x^2 + 3x > 0$

c) $4x^2 - 1 \leq 0$

d) $6x^2 + x - 1 < 0$

e) $x^3 - 4x \leq 0$

f) $x^3 - 3x - 2 < 0$

g) $x^2 - 1 \geq 0$

h) $x^3 - 7x + 6 \leq 0$

a) $x^2 + x - 12 \geq 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) \geq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -4$ y $x = 3$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

b) $-2x^2 + 3x > 0 \Rightarrow x(-2x+3) > 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$

c) $4x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (2x+1)(2x-1) \leq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

d) $6x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow (3x-1)(2x+1) < 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

e) $x^3 - 4x \leq 0 \Rightarrow x(x+2)(x-2) \leq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, -2] \cup [0, 2]$

f) $x^3 - 3x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)^2(x-2) < 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -1$ y $x = 2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, 2)$

g) $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) \geq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -1$ y $x = 1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

h) $x^3 - 7x + 6 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x+3) \leq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -3$, $x = 1$ y $x = 2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x \in (-\infty, -3] \cup [1, 2]$

118. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \le 0$

b) $\dfrac{3x-1}{5-10x} > 0$

c) $\dfrac{x^2-1}{x+2} \le 0$

d) $\dfrac{x^3-1}{4-x^2} \le 0$

e) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0$

f) $\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0$

g) $\dfrac{x-8}{3-x} \le -4-x$

h) $\dfrac{4x^3-4x-x+1}{x^2+2x+1} \le 0$

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-\dfrac{1}{2}$ y $x=\dfrac{2}{5}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}\right]$

b) $\dfrac{3x-1}{5-10x} > 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=\dfrac{1}{3}$ y $x=\dfrac{1}{2}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

c) $\dfrac{x^2-1}{x+2} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+2} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=-1$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1]$

d) $\dfrac{x^3-1}{4-x^2} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(2-x)(2+x)} \le 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{(x-2)(x+2)} \ge 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=1$ y $x=2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-2, 1] \cup (2, +\infty)$

(Observemos que x^2+x+1 es siempre positivo)

e) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)} > 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=1$, $x=2$, $x=3$ y $x=4$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$

f) $\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0 \Rightarrow \dfrac{(x+3)(x-1)^2}{(x+3)^2(x-1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+3} < 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-3$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-3, 1)$

g) $\dfrac{x-8}{3-x} \le -4-x \Rightarrow \dfrac{x-8}{3-x}+4+x \le 0 \Rightarrow \dfrac{4-x^2}{3-x} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-3} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=2$ y $x=3$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, 3)$

h) $\dfrac{4x^3-4x^2-x+1}{x^2+2x+1} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(2x+1)(2x-1)}{(x+1)^2} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-1$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es:

$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

119. Resuelve los sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-3)^2+1\ge 0 \\ x^2-11x+28<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x<10 \\ 2x\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\le 2 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x\in(-\infty, 2)$

b) Observemos que la primera inecuación siempre es cierta, por tanto:

$\begin{cases} (x-3)^2+1\ge 0 \\ x^2-11x+28<0 \end{cases} \Rightarrow (x-7)(x-4)<0 \Rightarrow$ Solución: $x\in(4, 7)$

c) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x\le -12 \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{12}{5} \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left[\dfrac{12}{5},\ 5\right]$

d) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{4}{3} \\ x>\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{4}{3}\right)$

120. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas:

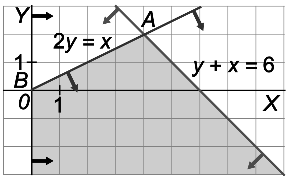
a) $\begin{cases} x+y\le 6 \\ 2y\le x \\ x\ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y<2 \\ x>y-2 \\ x>0 \quad y>0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-4\ge 0 \\ x-6\le 0 \\ 3\le y\le 5 \end{cases}$

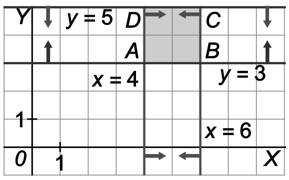
d) $\begin{cases} 3x+4y\ge 12 \\ -3x+4y\le 4 \\ x-4\le 0 \end{cases}$

a)



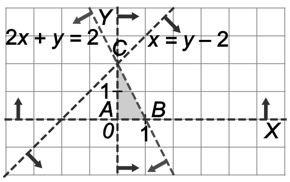
Vértices: $A(4, 2)$ $B(0, 0)$

c)



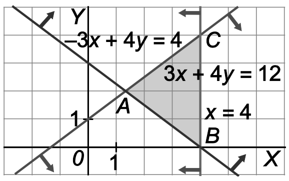
Vértices: $A(4, 3)$ $B(6, 3)$ $C(6, 5)$ $D(4, 5)$

b)



Vértices: $A(0, 0)$ $B(1, 0)$ $C(0, 2)$

d)



Vértices: $A\left(\dfrac{4}{3}, 2\right)$ $B(4, 0)$ $C(4, 4)$

Síntesis

121. Opera y simplifica.

a) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{a}{xz}+\dfrac{a^2}{yz}$

b) $\left(x+\dfrac{(x-1)^2}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{2}$

c) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

d) $\dfrac{x-\dfrac{x^2}{x-y}}{y-\dfrac{y^2}{x+y}}$

e) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$

f) $\left(a^2-b^2\right):\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

g) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x+1}}:\dfrac{x+1}{x+2}$

h) $\dfrac{1+\dfrac{x-2}{x+2}}{\dfrac{x+2}{x-2}-1}$

a) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{a}{xz}+\dfrac{a^2}{yz}=\dfrac{z+ay+a^2x}{xyz}$

b) $\left(x+\dfrac{(x-1)^2}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{2x-x^2+x^2-2x+1}{2-x}\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{1}{2-x}\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x^2-1}{x^2}}=\dfrac{(x+1)x^2}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{x}{x-1}$

d) $\dfrac{x-\dfrac{x^2}{x-y}}{y-\dfrac{y^2}{x+y}}=\dfrac{\dfrac{x^2-xy-x^2}{x-y}}{\dfrac{xy+y^2-y^2}{x+y}}=\dfrac{-xy(x+y)}{xy(x-y)}=\dfrac{y+x}{y-x}$

e) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a^2}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2+a^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{4ab+a^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{4ab+a^2}{a^2-b^2}$

f) $\left(a^2-b^2\right):\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=(a-b)(a+b):\dfrac{b+a}{ab}=(a-b)ab=a^2b-ab^2$

g) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x+1}}:\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x+2}{x+1}}:\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\dfrac{(x+1)(x+2)}{x}}{\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1}}=\dfrac{x+1}{x}$

h) $\dfrac{1+\dfrac{x-2}{x+2}}{\dfrac{x+2}{x-2}-1}=\dfrac{\dfrac{x+2+x-2}{x+2}}{\dfrac{x+2-x+2}{x-2}}=\dfrac{2x(x-2)}{4(x+2)}=\dfrac{x^2-2x}{2x+4}$

122. Racionaliza, opera y simplifica la expresión: $\dfrac{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+2\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-2\sqrt{a}}}{\dfrac{2a}{1-4a^2}}$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+2\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-2\sqrt{a}}}{\dfrac{2a}{1-4a^2}}=\frac{\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)}-\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)}}{\dfrac{2a}{1-4a^2}}=\frac{\dfrac{\sqrt{2a}-2a}{2-4a}-\dfrac{\sqrt{2a}+2a}{2-4a}}{\dfrac{2a}{1-4a^2}}=\frac{\dfrac{-4a}{2-4a}}{\dfrac{2a}{1-4a^2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{-2a}{1-2a}}{\dfrac{2a}{(1-2a)(1+2a)}}=\frac{-2a(1-2a)(1+2a)}{2a(1-2a)}=-1-2a$$

123. Calcula el término que se indica en cada uno de los siguientes desarrollos.

a) El quinto término de $(2 + x)^8$ **b)** El tercer término de $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{x}\right)^6$ **c)** El último término de $(2a^2b - 3a)^{37}$

a) $T_5 = \binom{8}{4} \cdot 2^4 \cdot x^4 = 70 \cdot 16 \cdot x^4 = 1120x^4$

c) $T_{38} = -\binom{37}{37}(3a)^{37} = -450\ 283\ 905\ 890\ 997\ 363a^{37}$

b) $T_3 = \binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{3}{x}\right)^2 = 15 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{9}{x^2} = \frac{80}{3x^2}$

124. Dado el polinomio $P(x) = -3x^3 + x^2 - 2x + k$, calcula el valor de k para que sea divisible por $x - 2$.

Por el teorema del resto tenemos: $P(2) = 0 \Rightarrow -3 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + k = 0 \Rightarrow -24 + k = 0 \Rightarrow k = 24$

125. Resuelve la ecuación: $\binom{x}{2} - 2x = \binom{x-2}{2} - 1$

$$\binom{x}{2} - 2x = \binom{x-2}{2} - 1 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} - 2x = \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 1 \Rightarrow x^2 - x - 4x = x^2 - 5x + 6 - 2 \Rightarrow 0 = 4$$

La ecuación no tiene solución.

126. Sea el polinomio $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + ax + b$. Calcula el valor de a y b para que sea divisible por $x^2 + x + 6$.

Se efectúa la división y se obtiene: cociente: $2x^2 - 23$ y resto: $(23 + a)x + (b + 138)$. Por tanto:

$$\begin{cases} 23 + a = 0 \\ b + 138 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -23,\ b = -138$$

127. Sea el polinomio $P(x) = 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que:

- **El polinomio sea divisible por $x - 1$.**
- **El valor numérico en $x = -1$ valga -12.**

Por el teorema del resto se tiene $P(1) = 0$, por otro lado, $P(-1) = -12$, por tanto:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2 + 3 - 3 + a + b = 0 \\ -2 - 2 - 3 - 3 - a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -1$$

128. Calcula la expresión de $P(x)$ sabiendo que $P(2x + 1) = 8x^2 + 14x$.

$P(x)$ es un polinomio de segundo grado. Podemos escribir: $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Se tiene que:

$$P(2x+1) = a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c = a(4x^2 + 4x + 1) + 2bx + b + c = 4ax^2 + (4a + 2b)x + (a + b + c)$$

Por tanto:

$$\begin{cases} 4a = 8 \\ 4a + 2b = 14 \Rightarrow a = 2,\ b = 3,\ c = -5 \Rightarrow P(x) = 2x^2 + 3x - 5 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

129. a) Calcula la suma y el producto de las soluciones de la ecuación $x^2+3x+c=0$.

b) Calcula el valor de c para que el producto de la soluciones de la ecuación anterior valga –18.

a) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-3$, $x_1x_2=\frac{c}{a}=c$

b) Por el apartado anterior $c=-18$

130. Halla la expresión de un polinomio de tercer grado que verifique que:

$P(0)=0$ **$P(1)=0$** **$P(-1)=2$** **$P(-2)=-6$**

Sea $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases} P(0)=d \\ P(1)=a+b+c+d \\ P(-1)=-a+b-c+d \\ P(-2)=-8a+4b-2c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ -a+b-c+d=2 \\ -8a+4b-2c+d=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c=0 \\ -a+b-c=2 \\ -8a+4b-2c=-6 \end{cases}$$

Sumando la segunda ecuación con la tercera obtenemos: $2b=2\Rightarrow b=1$.

Restándole a la cuarta ecuación el doble de la tercera obtenemos: $-6a+2b=-10\Rightarrow -6a+2=-10\Rightarrow a=2$.

Finalmente, despejando de la segunda ecuación obtenemos: $c=-3$.

131. a) Compara las soluciones de la ecuación de segundo grado $3x^2-4x-4=0$ con las de la ecuación $-4x^2-4x+3=0$.

b) Demuestra que las soluciones de la ecuación $x^2+bx+2=0$ son inversas de las de la ecuación $2x^2+bx+1=0$.

c) Demuestra que las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son inversas de las de la ecuación $cx^2+bx+a=0$.

a) $3x^2-4x-4=0\Rightarrow x=\frac{4\pm 8}{6}\Rightarrow x=2,\ x=-\frac{2}{3}$; $-4x^2-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{4\pm 8}{-8}\Rightarrow x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{1}{2}$

Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

b) $x^2+bx+2=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{2}$; $2x^2+bx+1=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{4}$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-8}}{2}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-8}}{4}=\frac{(-b)^2-\left(b^2-8\right)}{8}=\frac{b^2-b^2+8}{8}=\frac{8}{8}=1$$

De la misma forma: $\frac{-b-\sqrt{b^2-8}}{2}\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-8}}{4}=\frac{(-b)^2-\left(b^2-8\right)}{8}=\frac{b^2-b^2+8}{8}=\frac{8}{8}=1$

Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

c) $ax^2+bx+2=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ab}}{2a}$; $cx^2+bx+a=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\frac{(-b)^2-\left(b^2-4ac\right)}{4ac}=\frac{4ac}{4ac}=1$$

Las soluciones son inversas una de la otra.

Y de la misma forma se comprueba la otra pareja de soluciones.

132. a) La ecuación polinómicas de tercer grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$ tiene por raíces x_1, x_2 y x_3. Calcula, en función de *a*, *b*, *c* y *d*, los valores de:

i) $x_1+x_2+x_3$ **ii)** $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ **iii)** $x_1x_2x_3$

b) Calcula tres números tales que la suma sea 3, la suma de los tres productos de dos de ellos sea –6 y el producto de los tres sea –8.

a) $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=a\left[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3\right]$

Igualando coeficientes obtenemos: $x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}$ y $x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$.

b) Por el apartado anterior, tomando $a=1$, los números buscados son las soluciones de la ecuación de tercer grado $x^3-3x^2-6x+8=0$, por tanto, los números son $x_1=1$, $x_2=4$ y $x_3=-2$.

133. Calcula el conjunto de números reales que cumplen la siguiente condición: $|x-2|\le|x-6|$. Para ello:

a) Calcula el punto que equidista de 2 y de 6

b) Razona cuáles son los puntos que están más cerca de 2 que de 6.

a) El punto que equidista de 2 y de 6 es 4.

b) $|x-2|$ representa la distancia del punto *x* al punto 2 y $|x-6|$ representa la distancia del punto *x* al punto 6.

Por tanto, se buscan los puntos cuya distancia a 2 sea más pequeña que su distancia a 6. Éstos son los puntos menores que 4, es decir, la solución es $x\in(-\infty,4]$

CUESTIONES

134. Para cada caso, escribe una ecuación de segundo grado que cumpla:

a) Que no tenga ninguna solución real.

b) Que tenga una única solución real doble.

c) Que la suma de las raíces sea 7, y el producto, –60.

d) Que el producto de las raíces sea el doble que su suma.

a) $x^2+1=0$ **b)** $x^2-2x+1=0$ **c)** $x^2-7x-60=0$ **d)** $x^2-x+2=0$

135. Escribe dos polinomios diferentes que tengan las mismas raíces:

a) Si son del mismo grado.

b) Si tienen diferente grado.

a) $P(x)=x^2-4$, $Q(x)=2x^2-8$ **b)** $P(x)=x$, $Q(x)=x^3+x$

136. Demuestra que la ecuación $x^2+(2\lambda-1)x-\lambda=0$ tiene dos soluciones reales diferentes para cualquier valor del parámetro λ.

El discriminante de la ecuación es $\Delta=b^2-4ac=(2\lambda-1)^2+4\lambda=4\lambda^2+1$.

Es siempre estrictamente positivo, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.

137. Dada la ecuación de segundo grado $\lambda x^2 + (2+2\lambda)x + \lambda = 0$ dependiente del parámetro λ, se pide:

a) Calcular los valores de λ para que la ecuación tenga dos soluciones reales distintas.

b) Calcular los valores de λ para que la ecuación tenga una única solución real doble.

a) Calcular los valores de λ para que la ecuación no tenga ninguna solución real.

El discriminante de la ecuación es $\Delta = b^2 - 4ac = (2\lambda+2)^2 - 4\lambda^2 = 8\lambda + 4$. Por tanto:

a) Si $\lambda > -\frac{1}{2}$ la ecuación tiene dos soluciones reales.

b) Si $\lambda = -\frac{1}{2}$ la ecuación tiene una única solución real doble.

c) Si $\lambda < -\frac{1}{2}$ la ecuación no tiene solución real.

138. Un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas.

a) ¿Puede ser incompatible? Pon un ejemplo.

b) ¿Puede ser compatible indeterminado? Pon un ejemplo.

c) ¿Puede ser compatible determinado? Pon un ejemplo.

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ **c)** No puede ser compatible determinado.

139. a) A la hora de resolver una ecuación racional en el que la incógnita aparece en algún denominador, puede obtenerse alguna solución falsa. ¿Cuál es la razón?

b) A la hora de resolver una ecuación irracional puede obtenerse alguna solución falsa. ¿Cuál es la razón?

a) Al quitar denominadores se puede estar introduciendo soluciones que anulen dicho denominador y sean falsas por no estar definida la división entre cero.

b) Al elevar al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se pueden introducir soluciones falsas ya que dichos miembros podrían ser iguales en valor absoluto pero con diferente signo.

140. Con la ayuda del desarrollo del binomio $(1+1)^n$, demuestra que se verifica la igualdad:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n\cdot 1^0+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2+\ldots+\binom{n}{n}1^0\cdot 1^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

141. a) ¿Cuáles son las condiciones que deben verificar los coeficientes b y c del polinomio $P(x) = x^2 + bx + c$ para que sea un cuadrado perfecto?

b) ¿Cuáles son las condiciones que deben verificar los coeficientes a, b y c del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ para que sea un cuadrado perfecto?

a) $P(x)$ debe tener una única solución real. Por tanto, $b^2 - 4c = 0$ y $P(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

b) $P(x)$ debe tener una única solución real. Por tanto, $b^2 - 4ac = 0$ y $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{b\sqrt{a}}{2a}\right)^2$

142. Calcula, en función de *a*, *b* y *c*, la suma de las inversas de las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

143. Demuestra que se cumple: $\log_x A = \log_{x^2} A^2$

$$\log_{x^2} A^2 = \frac{\log A^2}{\log x^2} = \frac{2\log A}{2\log x} = \frac{\log A}{\log x} = \log_x A$$

PROBLEMAS

144. Si se divide un número por 5 y por 13 y se suman los cocientes, el resultado es 72. Halla dicho número.

Sea x el número desconocido: $\frac{x}{5} + \frac{x}{13} = 72 \Rightarrow 13x + 5x = 4680 \Rightarrow x = \frac{4680}{18} = 260$

145. Si sumamos cuatro números impares consecutivos obtenemos como resultado 72. ¿Cuáles son estos números?

Sean x, $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ los números buscados. Se tiene que:

$x + x + 2 + x + 4 + x + 6 = 72 \Rightarrow 4x + 12 = 72 \Rightarrow x = \frac{60}{4} = 15$. Por tanto, los números buscados son: 15, 17, 19 y 21.

146. La suma de un número positivo más el valor de su raíz cuadrada coincide con el triple de dicho número. ¿De qué número de trata?

Sea x el número desconocido: $x + \sqrt{x} = 3x \Rightarrow \sqrt{x} = 2x \Rightarrow x = 4x^2 \Rightarrow x(4x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

147. La suma de un número de dos cifras más el que resulta al invertirlas es 99. ¿Cuánto vale la suma de las dos cifras de ese número?

Sea $[xy]_{10)} = 10x + y$ el número desconocido. El número invertido será $[yx]_{10)} = 10y + x$.

Se tiene que: $10x + y + 10y + x = 99 \Rightarrow 11x + 11y = 99 \Rightarrow x + y = 9 \Rightarrow$ Las dos cifras suman 9.

148. a) Encuentra un número de tres cifras tales que la suma de los cuadrados de las dos cifras extremas es 65 y que si a dicho número se le añaden 297 unidades, el número que resulta se escribe al revés que el buscado.

b) ¿Cuántos números de este tipo hay?

a) Suponiendo que el número buscado es $[xyz]_{10)} = 100x + 10y + z$ tenemos:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 65 \\ 100x + 10y + z + 297 = 100z + 10y + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 65 \\ x - z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \text{ (No valida)} \end{cases} \\ z = -4 \text{ (No valida)} \end{cases}$$

Por tanto, un número que cumple las condiciones es 407.

b) El resultado no depende de y, por tanto, hay 10 posibles soluciones: 407, 417, 427, 437, 447, 457, 467, 477, 487 y 497.

149. Tres números están en progresión aritmética. Su suma vale 57 y la suma de sus cuadrados vale 1181. Calcula los tres números.

Sean los números buscados: $x-a$, x , $x+a$.

Tenemos: $x-a+x+x+a=57 \Rightarrow 3x=57 \Rightarrow x=19$

Por otra parte: $(19-a)^2+19^2+(19+a)^2=1181 \Rightarrow 2a^2=98 \Rightarrow a^2=49 \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ a=-7 \end{cases}$

En ambos casos, los números buscados son 12, 19 y 26.

150. De un número de tres cifras sabemos que su suma es 12, que la cifra de las unidades es igual a la semisuma de las cifras de las centenas y de las decenas, y, por último, que el número que resulta al invertir las cifras del buscado es 198 unidades más pequeño que este. ¿De qué número se trata?

Suponiendo que el número buscado es $[xyz]_{10)}=100x+10y+z$ y que, por tanto, el número que resulta al invertir sus cifras es $[zyx]_{10)}=100z+10y+x$, podemos escribir:

$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-2z=0 \\ 99x-99z=198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-2z=0 \\ x-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow$ El número buscado es el 624.

151. Se consideran los números $A=u^2+v^2$, $B=u^2-v^2$ y $C=2uv$ donde u y v son números enteros positivos.

a) Comprueba que para cualesquiera valores de u y v, los números A, B y C forman una terna pitagórica, es decir, que A, B y C pueden ser los lados de un triángulo rectángulo. ¿Cuáles son los catetos y cuál la hipotenusa?

b) Con la ayuda del apartado anterior, calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus longitudes son números enteros que suman 90 y que la suma de las longitudes de sus catetos vale 49.

c) Calcula tres números enteros que formen terna pitagórica, que sumen 132 y tales que la hipotenusa mida una unidad más que uno de los catetos.

a) La hipotenusa debe ser A, el número más grande, y los catetos B y C.

Comprobemos que se verifica el teorema de Pitágoras:

$$A^2=(u^2+v^2)^2=u^4+v^4+2u^2v^2=u^4+v^4-2u^2v^2+4u^2v^2=(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=B^2+C^2$$

b) La hipotenusa vale $90-49=41$.

$41=25+16=5^2+4^2 \Rightarrow u=5, v=4 \Rightarrow A=41, B=9$ y $C=40$

c) $\begin{cases} A+B+C=132 \\ A=B+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2+u^2-v^2+2uv=132 \\ u^2+v^2=2uv+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2+2uv=132 \\ 2uv=u^2+v^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+uv=66 \\ (u-v)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+uv=66 \\ u=1+v \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow u=6,\ v=5 \Rightarrow A=61,\ B=11$ y $C=60$

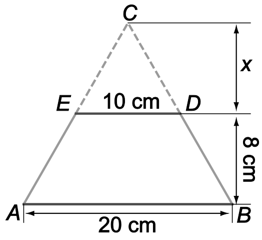
152. Un padre tiene 48 años, y su hijo, 15. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea justo el doble de la del hijo?

Sean x los años que han de pasar: $48+x=2(15+x) \Rightarrow 48+x=30+2x \Rightarrow x=18$

Dentro de 18 años, la edad del padre será el doble de la del hijo.

153. Las bases de un trapecio miden 10 y 20 cm, respectivamente, y la altura, 8. Calcula la altura del triángulo que resulta al prolongar los dos lados no paralelos del trapecio.

La superficie del trapecio es: $S_T = \dfrac{(20+10)\cdot 8}{2} = 120 \text{ cm}^2$



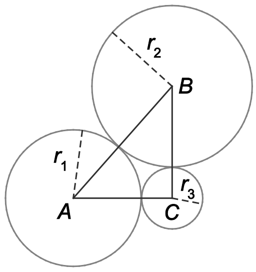
La superficie del triángulo *CED* es: $S_{CED} = \dfrac{10x}{2} = 5x$

La superficie del triángulo *ABC* es: $S_{ABC} = \dfrac{20(x+8)}{2} = 10x + 80$

Por tanto, se tiene que: $10x + 80 - 5x = 120 \Rightarrow 5x = 120 - 80 = 40 \Rightarrow x = \dfrac{40}{5} = 8$

La altura del triángulo *ABC* es $8 + 8 = 16$ cm

154. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 27 y 36 cm. Tomando como centro cada uno de los vértices del triángulo se trazan tres circunferencias de forma que son tangentes exteriores dos a dos.



Calcula los radios de las tres circunferencias.

El valor de la hipotenusa es $\sqrt{36^2 + 27^2} = 45$ cm, por tanto:

$$\begin{cases} r_1 + r_3 = 27 \\ r_2 + r_3 = 36 \\ r_1 + r_2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 18 \text{ cm} \\ r_2 = 27 \text{ cm} \\ r_3 = 9 \text{ cm} \end{cases}$$

155. Tres números están en progresión geométrica y su producto vale 1728. Si al número central se le añaden 8 unidades, los tres números pasan a estar en progresión aritmética. ¿Cuáles son estos tres números?

Sean $\dfrac{x}{r}$, x y rx los números buscados: $\dfrac{x}{r}\cdot x \cdot rx = 1728 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1728} = 12$

Como $\dfrac{12}{r}$, 20 y $12r$ están en progresión aritmética, tenemos:

$$12r - 20 = 20 - \frac{12}{r} \Rightarrow 12r^2 - 40r + 12 = 0 \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

En ambos casos, los números buscados son 4, 12 y 36.

156. Las medidas de los cinco ángulos de un pentágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el segundo más pequeño mide 88º.

Los ángulos son $88 - d$, 88, $88 + d$, $88 + 2d$ y $88 + 3d$.

Como la suma de los ángulos de un pentágono es (5 – 2)·180º = 540º, tenemos:

$$88 - d + 88 + 88 + d + 88 + 2d + 88 + 3d = 540 \Rightarrow d = 20$$

Por tanto, los ángulos valen 68º, 88º, 108º, 128º y 148º.

157. Hace cinco años, la edad de una madre era el triple de la de su hijo, y dentro de diez solo será el doble. Halla las edades actuales de ambos.

Sean $3x$ y x las edades de hace cinco años.

Las edades actuales son $3x + 5$ y $x + 5$, y las edades dentro de 10 años son $3x + 15$ y $x + 15$.

Por tanto, se tiene: $3x+15=2(x+15) \Rightarrow x=15$

La edad actual de la madre es 50 años, y la del hijo, 20.

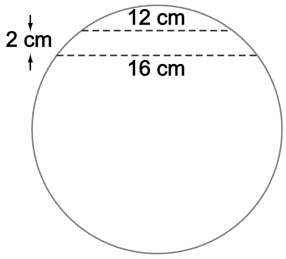
158. Un grupo de amigos debe pagar un total de 360 € por una reserva para un fin de semana en una casa rural. En el último momento cuatro amigos confirman que no podrán asistir, por lo que el resto del grupo deberá abonar, cada uno, 4,5 € más por la reserva. ¿Cuántos amigos disfrutarán del fin de semana en la casa rural? ¿Cuánto dinero aportará cada uno de los amigos?

Se x el número de amigos inicial e y el dinero que aporta, al principio, cada uno de ellos:

$$\begin{cases} xy=360 \\ (x-4)(y+4{,}5)=360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=360 \\ 4{,}5x-4y=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=18 \end{cases}$$

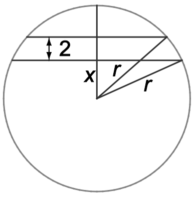
Finalmente, van 16 amigos a la casa rural y cada uno paga 22,5 €.

159. Las dos cuerdas paralelas dibujadas en la circunferencia de la figura miden 12 y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm.



Halla el radio de la circunferencia

Aplicando el teorema de Pitágoras:



$$\left.\begin{array}{l} 8^2+x^2=r^2 \\ 6^2+(2+x)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 64+x^2=36+4+x^2+4x \Rightarrow 4x=24 \Rightarrow x=6 \text{ cm}.$$

Por tanto, $r^2=64+36=100 \Rightarrow r=10$ cm.

160. Si se disminuye en 10 cm el lado de un cuadrado, su área disminuye en 400 cm^2. ¿Cuál es el tamaño original del cuadrado?

Sea x el lado del cuadrado original. Su área es x^2.

Se tiene: $(x-10)^2=x^2-400 \Rightarrow x^2-20x+100=x^2-400 \Rightarrow 20x=500 \Rightarrow x=25$ cm.

161. Dos ciudades *A* y *B*, unidas por una carretera, distan 111 km. Desde la ciudad *A* hacia la *B* sale un coche a 72 km/h y desde *B* sale hacia *A* otro coche a 76 km/h. ¿Cuánto tardarán en encontrarse?

Si los coches tardan t horas en encontrarse, en esas t horas el primer coche habrá recorrido x km y el segundo coche 111 – x. por tanto:

$$\frac{x}{72}=\frac{111-x}{76} \Rightarrow 76x=7992-72x \Rightarrow 148x=7992 \Rightarrow x=\frac{7992}{148}=54 \text{ km}.$$

El tiempo que tardarán en encontrarse será: $\frac{54}{72}=0{,}75$ horas = 45 minutos.

162. Desde un punto *A* sale una moto con velocidad 72 km/h. Diez minutos después sale, desde el mismo punto y a su encuentro, un coche con velocidad constante de 90 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

Si tarda t horas en alcanzarle tenemos: $72\left(t+\frac{1}{6}\right)=90t \Rightarrow 72t+12=90t \Rightarrow t=\frac{2}{3}$ horas $=40$ minutos.

163. Se consideran tres barras homogéneas de metal compuestas de la siguiente forma:

Primera barra: 30 g de oro, 45 de plata y 75 de cobre.

Segunda barra: 60 g de oro, 30 de plata y 135 de cobre.

Tercera barra: 45 g de oro, 60 de plata y 75 de cobre.

¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una de las barras para obtener otra que contenga 64,5 g de oro, 69 de plata y 136,5 de cobre?

En la primera barra se verifica que $\frac{30}{150}=\frac{2}{10}$ es oro, $\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$ es plata y $\frac{75}{150}=\frac{5}{10}$ es cobre.

En la segunda se verifica que $\frac{60}{225}=\frac{4}{15}$ es oro, $\frac{30}{225}=\frac{2}{15}$ es plata y $\frac{135}{225}=\frac{9}{15}$ es cobre.

En la tercera se verifica que $\frac{45}{180}=\frac{3}{12}$ es oro, $\frac{60}{180}=\frac{4}{12}$ es plata y $\frac{75}{180}=\frac{5}{12}$ es cobre.

Supongamos que tomamos x g de la barra primera, y de la segunda y z de la tercera. Se puede escribir el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}\frac{2}{10}x+\frac{4}{15}y+\frac{3}{12}z=64,5\\ \frac{3}{10}x+\frac{2}{15}y+\frac{4}{12}z=69\\ \frac{5}{10}x+\frac{9}{15}y+\frac{5}{12}z=136,5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}12x+16y+15z=3870\\ 18x+8y+20z=4140\\ 30x+36y+25z=8190\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=90\\ y=90\\ z=90\end{cases}$$

Por tanto, se deberán tomar 90 g de cada una de las barras.

164. Halla tres enteros consecutivos tales que al sumar los cuadrados de los dos primeros se obtenga el cuadrado del tercero.

Sean x, $x+1$ y $x+2$ los números buscados:

$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+x^2+2x+1=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=-1,\ x=3$

Por tanto hay dos posibles soluciones: –1, 0 y 1 o 3, 4 y 5.

165. Se sabe que una cierta población de insectos se incrementa en un 9 % cada semana. Calcula el tiempo que ha de pasar para que la población se multiplique por cinco.

Sea P el número inicial de insectos. Al cabo de una semana se tendrán $P\cdot 1{,}09$. Al cabo de t semanas se tendrán $P\cdot 1{,}09^t$ insectos. Por tanto:

$$5P=P\cdot 1{,}09^t \Rightarrow 1{,}09^t=5 \Rightarrow t=\frac{\log 5}{\log 1{,}09}=18{,}676 \text{ semanas} \simeq 131 \text{ días.}$$

166. Si se colocan 5000 € a un 5 % de interés compuesto anual con capitalización anual, ¿cuánto tiempo tarda en aumentar en un 50 %? ¿Y si la capitalización es mensual?

$$1{,}5C=C\cdot 1{,}05^t \Rightarrow 1{,}05^t=1{,}5 \Rightarrow t=\frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}05}=8{,}31 \text{ años.}$$

Si la capitalización es mensual tenemos:

$$1{,}5C=C\cdot\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{12t} \Rightarrow 1{,}004167^{12t}=1{,}5 \Rightarrow t=\frac{\log 1{,}5}{12\cdot\log 1{,}004167}=8{,}13 \text{ años.}$$

167. En un concurso de matemáticas se propone una prueba de 25 preguntas. Cada una de ellas tiene 5 posibles respuestas de las que solo una es verdadera. Por cada respuesta acertada se obtienen 5 puntos; si se responde de forma errónea se obtienen 0 puntos, y si se deja una pregunta sin respuesta, se obtienen 2.

a) Escribe la expresión algebraica que determina la puntuación de un concursante llamando *x* al número de respuestas acertadas, e *y* al número de respuestas incorrectas.

b) Si de un concursante se sabe que ha obtenido 80 puntos, ¿cómo puede deducirse el número de respuestas acertadas, erróneas y no contestadas? Da dos ejemplos posibles.

c) En dos de las preguntas no contestadas, ese mismo concursante dudaba entre dos de las cinco opciones. ¿Qué puntuación habría obtenido en el caso de haberlas contestado de manera correcta?

a) La expresión algebraica que da la puntuación es: $P(x,y)=5x+2(25-x-y)=5x+50-2x-2y=3x-2y+50$.

b) Si el concursante ha obtenido 80 puntos, se tiene que:

$$3x-2y+50=80 \Rightarrow 3x-2y=30 \Rightarrow y=\frac{3x-30}{2} \Rightarrow y=\frac{3x}{2}-15$$

Dos posibles ejemplos pueden ser:

$x=10 \Rightarrow y=0$, es decir, acierta 10 preguntas y no contesta ninguna de las otras 15.

$x=12 \Rightarrow y=3$, es decir, acierta 12 preguntas, falla 3 y no contesta 10.

c) Habría obtenido 6 puntos más, es decir, 86 puntos.

168. Se han comprado un determinado número de discos DVD vírgenes por una cantidad total de 17,25 €. Si se hubieran comprado discos de una calidad superior, cuyo precio es 0,40 € más caro por unidad, se deberían haber adquirido 8 menos para que el precio total no variase. ¿Cuántos discos se han comprado?

Sea *x* el número de discos adquiridos. El precio de cada uno es de $\frac{17{,}25}{x}$ euros.

Si se comprasen discos de una calidad superior, el precio de cada disco sería $\left(\frac{17{,}25}{x}+0{,}4\right)$.

Por tanto, se tiene que:

$$\left(\frac{17{,}25}{x}+0{,}4\right)(x-8)=17{,}25 \Rightarrow 17{,}25+0{,}4x-\frac{138}{x}-3{,}2=17{,}25 \Rightarrow 0{,}4x^2-3{,}2x-138=0 \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} x=23 \\ x=-15 \text{ (No válida)} \end{cases}$$

Se han comprado 23 discos.

169. Para participar en las próximas competiciones locales de atletismo se deben pasar dos pruebas. En la primera se elimina al 60 % de los participantes, y en la segunda, a las dos terceras partes de los que quedan.

¿Cuántos participantes se apuntaron en un principio si después de las dos pruebas quedan 10 atletas para competir en la final?

Sea *x* el número de participantes iniciales.

Después de la primera prueba quedan 0,4*x*. Después de la segunda prueba quedan $\frac{0{,}4x}{3}$.

Por tanto, $\frac{0{,}4x}{3}=10 \Rightarrow x=75$.

Se apuntaron 75 participantes.

170. Un comerciante adquiere dos tipos de café para tostar, moler y, posteriormente, mezclar. El de mayor calidad tiene un precio de 9 €/kg, mientras que por el otro pagó 7,50€ por cada kilo. El comerciante quiere obtener una mezcla que salga a 8,40 €/kg.

¿Cuál deberá ser la proporción de los dos tipos de café?

Sea *x* la cantidad de café de mayor calidad en un kg de mezcla e *y* la cantidad del otro café en un kg de mezcla, tenemos:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 9x+7,5y=8,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0,6 \\ y=0,4 \end{cases}$$

Por tanto, hay que mezclar 0,6 kg de café de mayor calidad por cada 0,4 kg del otro, es decir, hay que mezclar 3 kg de café de mejor calidad por cada 2 kg del otro.

171. Un almacenista trabaja con tres tipos de televisores. Cada televisor del primer tipo le cuesta 180 €, el del segundo tipo, 90 €, y el del tercer tipo, 30 €. Un pedido de 105 unidades tiene un importe total de 9600 €. Determina el número de televisores pedidos de cada clase sabiendo que el número de televisores del segundo tipo es el doble que los del primer y tercer tipo juntos.

Sean *x* el número de televisores del primer tipo e *y* el número de televisores del tercer tipo. El número de televisores del segundo tipo es $2(x + y)$.

Por tanto:

$$\begin{cases} x+2(x+y)+y=105 \\ 180x+90\cdot 2(x+y)+30y=9600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=105 \\ 360x+210y=9600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=35 \\ 12x+7y=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=20 \end{cases}$$

Se pidieron 15 televisores del primer tipo, 70 del segundo y 20 del tercero.

172. Entre las 6 h y 9 h de la tarde la velocidad media contratada de bajada de archivos disminuye en 80 kB/s mientras que de 6 h a 9 h de la mañana, esta velocidad media se ve incrementada en 100 kB/s. Andrés se ha bajado un archivo en dos etapas. Por la mañana se ha bajado la primera parte del archivo de 12400 kB y por la tarde se ha bajado los restantes 11264 kB. En total, la bajada del archivo completo ha precisado exactamente de un minuto. ¿Cuál es la velocidad media de bajada contratada?

Sea *v* kB/s la velocidad media de bajada contratada. Se bajan 12400 kB con una velocidad de $v + 100$ y 11264 kB con velocidad $v - 80$. El tiempo total invertido es 60 segundos, por tanto:

$$\frac{12400}{v+100}+\frac{11264}{v-80}=60 \Rightarrow 60v^2-22464v-614400=0 \Rightarrow v=\frac{22464\pm 25536}{2}=11232\pm 12768$$

La única solución que tiene sentido es $v=11232+12768=24000$ kB/s.

173. Un ciclista está realizando un trayecto a favor del viento. En un primer tramo, el viento le ayuda a razón de 1 km/h, y en un segundo tramo, le ayuda a razón de 2 km/h. El ciclista lleva una velocidad propia constante en todo el recorrido y tarda 2 horas y 36 minutos en hacer los 40 km. Posteriormente, en un mapa topográfico, el ciclista observa que los tramos están en proporción 3 a 2. Calcula la velocidad propia del ciclista.

Sea *x* la velocidad del ciclista. Sean *y*, 40 – *y* las longitudes de los tramos. El tiempo que el ciclista tarda en realizar el total del trayecto es: $\frac{y}{x+1}+\frac{40-y}{x+2}=2,6$.

La relación de los tramos es: $\frac{y}{40-y}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2y=120-3y \Rightarrow y=24$.

Por tanto, $\frac{24}{x+1}+\frac{16}{x+2}=2,6 \Rightarrow 2,6x^2-32,2x-58,8=0 \Rightarrow x=\frac{32,2\pm 40,6}{5,2}$.

La única solución que tiene sentido es $x=\frac{32,2+40,6}{5,2}=14$ km/h.

PARA PROFUNDIZAR

174. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^2 + y^2 + 2xy - z^2$

b) $4x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 12yz$

c) $4 - 9x^2 - 25y^2 + 30xy$

d) $x^3 - y^3$

e) $x^3 + y^3$

a) $x^2 + y^2 + 2xy - z^2 = (x+y)^2 - z^2 = (x+y-z)(x+y+z)$

b) $4x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 12yz = 4x^2 - (3y-2z)^2 = (2x+3y-2z)(2x-3y+2z)$

c) $4 - 9x^2 - 25y^2 + 30xy = 4 - (3x-5y)^2 = (2+3x-5y)(2-3x+5y)$

d) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

e) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

175. Factoriza el polinomio $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ sabiendo que es el producto de dos polinomios irreducibles de segundo grado y que el coeficiente de primer grado del primero de los factores es 1.

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = (x^2 + x + a)(x^2 + bx + c) = x^4 + (b+1)x^3 + (a+b+c)x^2 + (c+ab)x + ac$$

$$\begin{cases} b+1=2 \\ a+b+c=4 \\ c+ab=3 \\ ac=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow P(x) = (x^2+x+1)(x^2+2x+1)$$

176. Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos.

a) $x - 1 + |-3x-3| = -3$

b) $2x - |x^2 - 1| = -2$

c) $|x-1| + |x+1| = 1$

d) $|x^2-1| - 2|x^2-9| = -7$

a) $x - 1 + |-3x-3| = -3 \Rightarrow \begin{cases} x-1-3x-3=-3 & \text{si } x \le -1 \\ x-1+3x+3=-3 & \text{si } x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} & \text{si } x \le -1 \\ x = -\dfrac{5}{4} & \text{si } x > -1 \end{cases} \Rightarrow$ No tiene solución.

b) $2x - |x^2-1| = -2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 + 1 = -2 & \text{si } x > 1 \text{ o } x < -1 \\ 2x + x^2 - 1 = -2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 & \text{si } x > 1 \text{ o } x < -1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 & \text{si } -1 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ x = 3$

c) $|x-1| + |x+1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -x+1-x-1=1 & \text{si } x < -1 \\ -x+1+x+1=1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x-1+x+1=1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x=1 & \text{si } x<-1 \\ 2=1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2x=1 & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow$ No tiene solución

d) $|x^2-1| - 2|x^2-9| = -7 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1-2x^2+18=-7 & \text{si } x<-3 \\ x^2-1+2x^2-18=-7 & \text{si } -3 \le x \le -1 \\ -x^2+1+2x^2-18=-7 & \text{si } -1<x<1 \\ x^2-1+2x^2-18=-7 & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ x^2-1-2x^2+18=-7 & \text{si } x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=24 & \text{si } x<-3 \\ x^2=4 & \text{si } -3 \le x \le -1 \\ x^2=10 & \text{si } -1<x<1 \\ x^2=4 & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ x^2=24 & \text{si } x>3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{24},\ x = -\sqrt{24},\ x = 2,\ x = -2$

177. Estudia si este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2+y^2-z^2=-4} \\ \boldsymbol{xy+xz+yz=-5} \\ \boldsymbol{x+y+z=2} \end{cases}$$

Como $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, tenemos:

$2^2 = z^2-4+z^2+2\cdot(-5) \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z=3,\ \ z=-3$

Suponiendo que $z=3$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy+3x+3y=-5 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

Como $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$, tenemos: $1=5+2xy \Rightarrow xy=-2$ y el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 3x+3y=-3 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=-2,\ z=3 \\ x=-2,\ y=1,\ z=3 \end{cases}$$

Como el sistema tiene, al menos, dos soluciones, es compatible.

De hecho el sistema no tiene más soluciones, si suponemos que $z=-3$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy-3x-3y=-5 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Como $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$, tenemos: $25=5+2xy \Rightarrow xy=10$ y el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 3x+3y=15 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

178. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+3y-2z+2w=12} \\ \boldsymbol{2x-2y-z+w=5} \\ \boldsymbol{3x+y-2z-4w=16} \\ \boldsymbol{3x-3z-3w=15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ 2x-2y-z+w=5 \\ 3x+y-2z-4w=16 \\ 3x-3z-3w=15 \end{cases} \underset{\substack{E_2\to E_2-2E_1 \\ E_3\to E_3-3E_1 \\ E_4\to E_4-3E_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ -8y+4z-10w=-20 \\ -9y+3z-9w=-21 \end{cases} \underset{\substack{E_3\to E_3-E_2 \\ E_4\to 8E_4-9E_2}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ z-7w=-1 \\ -3z-45w=3 \end{cases}$$

$$\underset{E_4\to E_4+3E_3}{\Rightarrow} \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ z-7w=-1 \\ -66w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=-1 \\ w=0 \end{cases}$$