

3 Trigonometría

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Expresa en radianes las siguientes medidas angulares.

a) 30°

c) 200°

b) 60°

d) 330°

a) $30^\circ = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$ rad

c) $200^\circ = \frac{200^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{10\pi}{9}$ rad

b) $60^\circ = \frac{60^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$ rad

d) $330^\circ = \frac{330^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6}$ rad

4. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos.

a) $\frac{7\pi}{3}$ rad

c) 4 rad

b) $\frac{3\pi}{2}$ rad

d) 4π rad

a) $\frac{7\pi}{3}$ rad = $\frac{7\pi \cdot 180^\circ}{3\pi} = 420^\circ$

c) 4 rad = $\frac{4 \cdot 180^\circ}{\pi} = 229^\circ 11'$

b) $\frac{3\pi}{2}$ rad = $\frac{3\pi \cdot 180^\circ}{2\pi} = 270^\circ$

d) 4π rad = $\frac{4\pi \cdot 180^\circ}{\pi} = 720^\circ$

5. Determina las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 cm, respectivamente.

Se trata de un triángulo rectángulo, pues verifica el teorema de Pitágoras: $10^2 = 6^2 + 8^2$

$\text{sen } \hat{A} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\text{cos } \hat{A} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\text{tg } \hat{A} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\text{sen } \hat{B} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\text{cos } \hat{B} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

6. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos.

- a) $\hat{A} = 90^\circ$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm b) $\hat{B} = 90^\circ$, $b = 15$ cm, $c = 12$ cm c) $\hat{C} = 90^\circ$, $b = 12$ cm, $c = 20$ cm

a) $a = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ cm

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61} \quad \operatorname{cos} \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61} \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61} \quad \operatorname{cos} \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61} \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

b) $a = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ cm

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad \operatorname{cos} \hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \quad \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \quad \operatorname{cos} \hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

c) $a = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$ cm

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \quad \operatorname{cos} \hat{A} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad \operatorname{cos} \hat{B} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

7. Calcula las razones inversas del ángulo menor en el triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 10 cm.

Hipotenusa: $a = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ cm. El ángulo de menor amplitud es el opuesto al cateto menor, por tanto:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{10}{5} = 2$$

8. Ejercicio resuelto.

9. Halla los ángulos reducidos y las razones trigonométricas de estos ángulos.

- a) 3990° b) 9π c) 25200° d) $\frac{121\pi}{4}$

a) Se calcula el ángulo reducido: $3990^\circ : 360^\circ = 11,08\bar{3}$ y $0,08\bar{3} \cdot 360^\circ = 30^\circ$

$$\operatorname{sen} 3990^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \operatorname{cos} 3990^\circ = \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} 3990^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Se calcula el ángulo reducido: $9\pi : 2\pi = 4,5$ rad y $0,5 \cdot 2\pi = \pi$ rad

$$\operatorname{sen} 9\pi = \operatorname{sen} \pi = 0 \quad \operatorname{cos} 9\pi = \operatorname{cos} \pi = -1 \quad \operatorname{tg} 9\pi = \operatorname{tg} \pi = 0$$

c) Se calcula el ángulo reducido: $25200^\circ : 360^\circ = 70$ y $0 \cdot 360^\circ = 0^\circ$

$$\operatorname{sen} 25200^\circ = \operatorname{sen} 0^\circ = 0 \quad \operatorname{cos} 25200^\circ = \operatorname{cos} 0^\circ = 1 \quad \operatorname{tg} 25200^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

d) Se calcula el ángulo reducido: $\frac{121\pi}{4} : 2\pi = 15,125$ rad y $0,125 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$ rad

$$\operatorname{sen} \frac{121\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{cos} \frac{121\pi}{4} = \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{tg} \frac{121\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

10. Halla el signo de todas las razones trigonométricas de:

- a) 120° c) 256° e) 315°
 b) -70° d) 800° f) -460°

α	120°	-70°	256°	800°	315°	-460°
Cuadrante	II	IV	III	I	IV	III
$\text{sen } \alpha$ y $\text{cosec } \alpha$	+	-	-	+	-	-
$\text{cos } \alpha$ y $\text{sec } \alpha$	-	+	-	+	+	-
$\text{tg } \alpha$ y $\text{cotg } \alpha$	-	-	+	+	-	+

11. Para los siguientes ángulos, indica el signo de todas sus razones trigonométricas.

- a) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ e) $-\frac{9\pi}{4}$
 b) $\frac{11\pi}{3}$ d) $-\frac{7\pi}{6}$ f) $-\frac{5\pi}{3}$

α	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$
Cuadrante	II	IV	III	II	IV	I
$\text{sen } \alpha$ y $\text{cosec } \alpha$	+	-	-	+	-	+
$\text{cos } \alpha$ y $\text{sec } \alpha$	-	+	-	-	+	+
$\text{tg } \alpha$ y $\text{cotg } \alpha$	-	-	+	-	-	+

12 y 13. Ejercicios resueltos.

14. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante.

- a) $\text{sen } 150^\circ$ d) $\text{tg } 330^\circ$ g) $\text{sen } 240^\circ$
 b) $\text{cos } 225^\circ$ e) $\text{cosec } 135^\circ$ h) $\text{cotg } 300^\circ$
 c) $\text{sen } 840^\circ$ f) $\text{tg } 1800^\circ$ i) $\text{sec } 2295^\circ$

a) $\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ d) $\text{tg } 330^\circ = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ g) $\text{sen } 240^\circ = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) $\text{cos } 225^\circ = -\text{cos } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\text{cosec } 135^\circ = \frac{1}{\text{sen } 45^\circ} = \sqrt{2}$ h) $\text{cotg } 300^\circ = -\frac{1}{\text{tg } 60^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 c) $\text{sen } 840^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\text{tg } 1800^\circ = \text{tg } 0^\circ = 0$ i) $\text{sec } 2295^\circ = -\frac{1}{\text{cos } 45^\circ} = -\sqrt{2}$

15. Calcula, en función de h , $\text{sen } 303^\circ$ sabiendo que $\text{cos } 33^\circ = h$.

$$\text{sen } 303^\circ = -\text{sen } 57^\circ = -\text{sen } (90^\circ - 33^\circ) = -\text{cos } 33^\circ = -h$$

16. Calcula el valor exacto de:

a) $\text{sen } \frac{3\pi}{4}$

b) $\text{sen } \frac{11\pi}{6}$

c) $\text{sen } \frac{4\pi}{3}$

d) $\text{sen } \frac{5\pi}{6}$

a) $\text{sen } \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen } \frac{4\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen } \frac{11\pi}{6} = -\text{sen } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

d) $\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

17. Ejercicio interactivo.

18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Calcula las restantes razones de α sabiendo que:

a) La cotangente de un ángulo $\alpha < 90^\circ$ vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\text{sec } \alpha = -5$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

c) $\text{cosec } \alpha = -2$ y $\alpha \in \text{III}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha \Rightarrow \text{sec } \alpha = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + 3} = 2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos \alpha \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\text{sec } \alpha = -5 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = -2\sqrt{6} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el seno, coseno, cosecante y secante son negativas, y el resto de razones, positivas. Tenemos:

$$\text{cosec } \alpha = -2 \Rightarrow \text{sen } \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sec } \alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \sqrt{3}$$

21. Calcula la razón pedida en cada caso.

a) $\operatorname{sen} \alpha$, si $\operatorname{tg} \alpha = -3$ y $\alpha \in \text{II}$ b) $\operatorname{tg} \alpha$, si $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha \in \text{IV}$ c) $\cos \alpha$, si $\operatorname{cotg} \alpha = 5$ y $\alpha \in \text{III}$

a) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo. Tenemos:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

b) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, la tangente es negativa. Tenemos:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = -\sqrt{\frac{25}{16} - 1} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el coseno es negativo. Tenemos:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{25}}} = -\sqrt{\frac{25}{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

22 a 24. Ejercicios resueltos.

25. Transforma 15° y $\frac{5\pi}{12}$ rad en una suma o diferencia de ángulos y calcula sus razones trigonométricas.

$$15^\circ = 60^\circ - 45^\circ: \operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3} - 4}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}: \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

26. Calcula $\operatorname{tg} 75^\circ$ a partir del seno y del coseno.

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ: \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\operatorname{sen} 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = 2 + \sqrt{3}$$

27. Demuestra que $\text{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$.

$$\text{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen} \alpha \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \alpha \text{sen} \frac{3\pi}{2} = \text{sen} \alpha \cdot 0 + \cos \alpha \cdot (-1) = -\cos \alpha$$

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. Determina el valor del seno, el coseno y la tangente de los ángulos 120° y $\frac{4\pi}{3}$ rad.

$$\text{sen} 120^\circ = \text{sen}(2 \cdot 60^\circ) = 2 \text{sen} 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(2 \cdot 60^\circ) = \cos^2 60^\circ - \text{sen}^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg} 120^\circ = \text{tg}(2 \cdot 60^\circ) = \frac{2 \text{tg} 60^\circ}{1 - \text{tg}^2 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$$

$$\text{sen} \frac{4\pi}{3} = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \text{sen} \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \cos^2 \frac{2\pi}{3} - \text{sen}^2 \frac{2\pi}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg} \frac{4\pi}{3} = \text{tg}\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2 \text{tg} \frac{2\pi}{3}}{1 - \text{tg}^2 \frac{2\pi}{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{1 - (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

31. Desarrolla las expresiones de $\cos 3\alpha$ y de $\text{tg} 3\alpha$ en función de las razones trigonométricas del ángulo α .

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \text{sen} \alpha \text{sen} 2\alpha = \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) - \text{sen} \alpha \cdot 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha = \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \text{sen}^2 \alpha - 2 \text{sen}^2 \alpha \cos \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \text{sen}^2 \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\text{tg} 3\alpha = \text{tg}(\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} 2\alpha}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} 2\alpha} = \frac{\text{tg} \alpha + \frac{2 \text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \frac{2 \text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{\text{tg} \alpha - \text{tg}^3 \alpha + 2 \text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha - 2 \text{tg}^2 \alpha} = \frac{3 \text{tg} \alpha - \text{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \text{tg}^2 \alpha} = \frac{\text{tg} \alpha (3 - \text{tg}^2 \alpha)}{1 - 3 \text{tg}^2 \alpha}$$

32. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $\text{sen} \alpha = \frac{3}{5}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$.

El ángulo $\frac{\alpha}{2}$ es del primer cuadrante, por tanto sus razones trigonométricas son positivas. Tenemos:

$$\text{sen} \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}}} = \sqrt{9} = 3$$

33. Calcula $\text{sen } 32^\circ$ suponiendo que $\text{sen } 8^\circ = 0,14$.

$$\text{sen } 8^\circ = 0,14 \Rightarrow \text{cos } 8^\circ = \sqrt{1 - \text{sen}^2 8^\circ} = \sqrt{1 - 0,14^2} = 0,99$$

$$\text{sen } 16^\circ = \text{sen}(2 \cdot 8^\circ) = 2\text{sen } 8^\circ \text{cos } 8^\circ = 2 \cdot 0,14 \cdot 0,99 = 0,2772 \Rightarrow \text{cos } 16^\circ = \sqrt{1 - \text{sen}^2 16^\circ} = 0,9608$$

$$\text{sen } 32^\circ = \text{sen}(2 \cdot 16^\circ) = 2\text{sen } 16^\circ \text{cos } 16^\circ = 2 \cdot 0,2772 \cdot 0,9608 \approx 0,5327$$

34 y 35. Ejercicios resueltos.

36. Transforma en productos.

a) $\text{sen } 55^\circ + \text{sen } 15^\circ$ b) $\text{sen } 75^\circ - \text{sen } 35^\circ$ c) $\text{cos } 125^\circ + \text{cos } 85^\circ$ d) $\text{cos } 220^\circ - \text{cos } 20^\circ$

a) $\text{sen } 55^\circ + \text{sen } 15^\circ = 2\text{sen} \frac{55^\circ + 15^\circ}{2} \text{cos} \frac{55^\circ - 15^\circ}{2} = 2\text{sen } 35^\circ \text{cos } 20^\circ$

b) $\text{sen } 75^\circ - \text{sen } 35^\circ = 2\text{cos} \frac{75^\circ + 35^\circ}{2} \text{sen} \frac{75^\circ - 35^\circ}{2} = 2\text{cos } 55^\circ \text{sen } 20^\circ$

c) $\text{cos } 125^\circ + \text{cos } 85^\circ = 2\text{cos} \frac{125^\circ + 85^\circ}{2} \text{cos} \frac{125^\circ - 85^\circ}{2} = 2\text{cos } 105^\circ \text{cos } 20^\circ$

d) $\text{cos } 220^\circ - \text{cos } 20^\circ = -2\text{sen} \frac{220^\circ + 20^\circ}{2} \text{sen} \frac{220^\circ - 20^\circ}{2} = -2\text{sen } 120^\circ \text{sen } 100^\circ$

37. Expresa en forma de sumas o diferencias.

a) $\text{sen } 80^\circ \text{sen } 40^\circ$ b) $\text{cos } 25^\circ \text{cos } 10^\circ$

a) $80^\circ = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$; $40^\circ = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$; $\hat{B} = 40^\circ$

$$\text{sen } 80^\circ \text{sen } 40^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\text{sen} \frac{120^\circ + 40^\circ}{2} \text{sen} \frac{120^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{1}{2} (\text{cos } 120^\circ - \text{cos } 40^\circ)$$

b) $25^\circ = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$; $10^\circ = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 35^\circ$; $\hat{B} = 15^\circ$

$$\text{cos } 25^\circ \text{cos } 10^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\text{cos} \frac{35^\circ + 15^\circ}{2} \text{cos} \frac{35^\circ - 15^\circ}{2} = \frac{1}{2} (\text{cos } 35^\circ + \text{cos } 15^\circ)$$

38. Comprueba que $\text{cos } 75^\circ + \text{cos } 45^\circ = \text{cos } 15^\circ$.

$$\text{cos } 75^\circ + \text{cos } 45^\circ = 2\text{cos} \frac{75^\circ + 45^\circ}{2} \text{cos} \frac{75^\circ - 45^\circ}{2} = 2\text{cos } 60^\circ \text{cos } 15^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{cos } 15^\circ = \text{cos } 15^\circ$$

39. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{\text{cos } 2x + \text{cos } x}{\text{sen } 2x + \text{sen } x}$

$$\frac{\text{cos } 2x + \text{cos } x}{\text{sen } 2x + \text{sen } x} = \frac{2\text{cos} \frac{2x + x}{2} \text{cos} \frac{2x - x}{2}}{2\text{sen} \frac{2x + x}{2} \text{cos} \frac{2x - x}{2}} = \frac{\text{cos} \frac{3x}{2}}{\text{sen} \frac{3x}{2}} = \text{cotg} \frac{3x}{2}$$

40. Calcula el valor de: $\text{cos} \frac{\pi}{6} + \text{cos} \frac{\pi}{12} - 2\text{cos} \frac{\pi}{24} \text{cos} \frac{\pi}{8}$

$$\text{cos} \frac{\pi}{6} + \text{cos} \frac{\pi}{12} - 2\text{cos} \frac{\pi}{24} \text{cos} \frac{\pi}{8} = 2\text{cos} \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}}{2} \text{cos} \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}}{2} - 2\text{cos} \frac{\pi}{24} \text{cos} \frac{\pi}{8} = 2\text{cos} \frac{\pi}{8} \text{cos} \frac{\pi}{24} - 2\text{cos} \frac{\pi}{24} \text{cos} \frac{\pi}{8} = 0$$

50. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\text{a) } \begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) = \sqrt{3} \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) = \sqrt{3} \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{6} - \pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

La única solución en el intervalo $[0, 2\pi]$ es $x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{6}$.

b) Haciendo el cambio $u = \operatorname{sen} x, v = \operatorname{sen} y$ tenemos:

$$\begin{cases} u-v = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ u+v = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ v = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$: $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{2\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{5\pi}{6}$ y $x = \frac{2\pi}{3}, y = \frac{5\pi}{6}$

51 a 54. Ejercicios resueltos.

55. Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 10$ cm, $\hat{A} = 45^\circ$ y $\hat{B} = 100^\circ$.

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{10 \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} = 8,11 \text{ cm}$$

56. Dado un triángulo ABC con $a = 12$ cm, $b = 15$ cm y $\hat{C} = 35^\circ$.

a) ¿Cuál es la longitud del lado c ?

b) ¿Cuál es su área?

a) Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos 35^\circ = 74,105 \Rightarrow c = 8,61 \text{ cm}$$

b) Área: $A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \operatorname{sen} 35^\circ = 51,62 \text{ cm}^2$

57. Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

- a) $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $a = 8$ dm
 b) $\hat{A} = 80^\circ$, $a = 10$ m, $b = 5$ m
 c) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm
 d) $\hat{A} = 75^\circ$, $b = 8$ mm, $c = 12$ mm

a) $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 60^\circ$

Aplicando el teorema del seno dos veces:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = 5,22 \text{ dm}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{8 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} = 7,04 \text{ dm}$$

$$\text{Área: } A = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5,22 \cdot \sin 60^\circ = 18,1 \text{ dm}^2$$

b) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{a} = \frac{5 \sin 80^\circ}{10} = 0,492 \Rightarrow \hat{B} = 29^\circ 29' 55,34''$$

(La posibilidad $\hat{B} = 150^\circ 31' 40''$ no es válida)

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 70^\circ 30' 4,66''$$

Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cos 70^\circ 30' 4,66'' = 91,621 \Rightarrow c \approx 9,57 \text{ m}$$

$$\text{Área: } A = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \cdot \sin 70^\circ 30' 4,66'' \approx 23,57 \text{ m}^2$$

c) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{15^2 + 20^2 - 10^2}{2 \cdot 15 \cdot 20} = 0,875 \Rightarrow \hat{A} = 28^\circ 57' 18''$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{10^2 + 20^2 - 15^2}{2 \cdot 10 \cdot 20} = 0,6875 \Rightarrow \hat{B} = 46^\circ 34' 3''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 104^\circ 28' 39''$$

$$\text{Área: } A = \frac{1}{2} bc \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 \cdot \sin 104^\circ 28' 39'' = 72,62 \text{ cm}^2$$

d) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cos 75^\circ = 158,307 \Rightarrow a = 12,58 \text{ mm}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12,58^2 + 12^2 - 8^2}{2 \cdot 12,58 \cdot 12} = 0,789 \Rightarrow \hat{B} = 37^\circ 53' 42''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 67^\circ 6' 18''$$

$$\text{Área: } A = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \sin 75^\circ = 46,36 \text{ mm}^2$$

58. Ejercicio interactivo.

59 a 71. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Medida de ángulos

72. Copia y completa las siguientes tablas.

Grados	30°		60°	
Radianes		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$

Grados	210°		240°	
Radianes		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$

Grados		135°		180°
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	

Grados		315°		360°
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	

Grados	30°	45°	60°	90°
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Grados	210°	225°	240°	270°
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

Grados	120°	135°	150°	180°
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	300°	315°	330°	360°
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

73. Pasa de grados a radianes.

a) 585°

b) 450°

c) 76° 52' 30"

d) 382° 30'

$$a) 585^\circ = \frac{585^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{13\pi}{4} \text{ rad}$$

$$c) 76^\circ 52' 30'' = \frac{76,875^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{41\pi}{96} \text{ rad}$$

$$b) 450^\circ = \frac{450^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}$$

$$d) 382^\circ 30' = \frac{382,5^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{17\pi}{8} \text{ rad}$$

74. Los siguientes ángulos están en radianes, pásalos a grados.

a) $\frac{41\pi}{3}$ rad

b) 13π rad

c) $\frac{11\pi}{12}$ rad

d) 5 rad

$$a) \frac{41\pi}{3} \text{ rad} = \frac{41\pi \cdot 180^\circ}{3\pi} = 2460^\circ$$

$$c) \frac{11\pi}{12} \text{ rad} = \frac{11\pi \cdot 180^\circ}{12\pi} = 165^\circ$$

$$b) 13\pi \text{ rad} = \frac{13\pi \cdot 180^\circ}{\pi} = 2340^\circ$$

$$d) 5 \text{ rad} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{\pi} = 286^\circ 28' 44''$$

Razones trigonométricas

75. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90^\circ$, $a = 29$ cm, $b = 20$ cm

b) $\hat{B} = 90^\circ$, $a = 65$ cm, $c = 72$ cm

a) $c = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{441} = 21$ cm

$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{20}{29}$

$\text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{21}{29}$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{20}{21}$

$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{21}{29}$

$\text{cos } \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{20}{29}$

$\text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{21}{20}$

b) $b = \sqrt{65^2 + 72^2} = \sqrt{9409} = 97$ cm

$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{65}{97}$

$\text{cos } \hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{72}{97}$

$\text{tg } \hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{65}{72}$

$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{72}{97}$

$\text{cos } \hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{65}{97}$

$\text{tg } \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{72}{65}$

76. Indica los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas completas más el ángulo restante.

a) 2345°

b) -1500°

c) $\frac{46\pi}{3}$ rad

d) $-\frac{52\pi}{7}$ rad

a) $2345^\circ = 6 \cdot 360^\circ + 185^\circ = 6$ vueltas + 185°

c) $\frac{46\pi}{3}$ rad = $7 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} = 7$ vueltas + $\frac{4\pi}{3}$ rad

b) $-1500^\circ = -5 \cdot 360^\circ + 300^\circ = -5$ vueltas + 300°

d) $-\frac{52\pi}{7}$ rad = $-4 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{7} = -4$ vueltas + $\frac{4\pi}{7}$ rad

77. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.

a) $\text{sen } 36^\circ$

c) $\text{cotg } 111^\circ$

e) $\text{sec } 126^\circ 33'$

b) $\text{tg } 331^\circ$

d) $\text{sen } 25^\circ 40'$

f) $\text{cotg } 121^\circ 22' 45''$

a) $\text{sen } 36^\circ = 0,588$

c) $\text{cotg } 111^\circ = -0,384$

e) $\text{sec } 126^\circ 33' = -1,679$

b) $\text{tg } 331^\circ = -0,554$

d) $\text{sen } 25^\circ 40' = 0,433$

f) $\text{cotg } 121^\circ 22' 45'' = -0,610$

78. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas. Ten en cuenta que todos los ángulos están dados en radianes.

a) $\text{sen } \frac{\pi}{12}$

c) $\text{cos } \frac{3\pi}{7}$

e) $\text{tg } \frac{21\pi}{5}$

b) $\text{cosec } 2$

d) $\text{sec } 3$

f) $\text{cotg } 2,75$

a) $\text{sen } \frac{\pi}{12} = 0,259$

c) $\text{cos } \frac{3\pi}{7} = 0,223$

e) $\text{tg } \frac{21\pi}{5} = 0,727$

b) $\text{cosec } 2 = 1,100$

d) $\text{sec } 3 = -1,010$

f) $\text{cotg } 2,75 = -2,422$

79. Calcula, de forma exacta, el valor de las siguientes razones trigonométricas.

- | | | | |
|-----------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\sin 240^\circ$ | d) $\sin 1215^\circ$ | g) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{3}$ | j) $\operatorname{cotg} 225^\circ$ |
| b) $\cos 135^\circ$ | e) $\operatorname{cosec} 330^\circ$ | h) $\sec \frac{5\pi}{3}$ | k) $\sin \frac{7\pi}{4}$ |
| c) $\cos(-600^\circ)$ | f) $\operatorname{tg} 300^\circ$ | i) $\sec 120^\circ$ | l) $\operatorname{tg}(-15\pi)$ |
-
- | | |
|--|--|
| a) $\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | g) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ |
| b) $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | h) $\sec \frac{5\pi}{3} = \sec \frac{\pi}{3} = 2$ |
| c) $\cos(-600^\circ) = \cos 600^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ | i) $\sec 120^\circ = -\sec 60^\circ = -2$ |
| d) $\sin 1215^\circ = \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | j) $\operatorname{cotg} 225^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$ |
| e) $\operatorname{cosec} 330^\circ = -\operatorname{cosec} 30^\circ = -2$ | k) $\sin \frac{7\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| f) $\operatorname{tg} 300^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$ | l) $\operatorname{tg}(-15\pi) = -\operatorname{tg} 15\pi = -\operatorname{tg} \pi = 0$ |

80. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que:

- Es un ángulo del primer cuadrante y $\cos \alpha = \frac{2}{3}$
- Pertenece al segundo cuadrante y $\sin \alpha = 0,25$
- $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$
- $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec \alpha = \sqrt{2}$
- $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y $\operatorname{cotg} \alpha = -3$
- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{2}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha = 0,25 = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = 4$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \operatorname{sec} \alpha = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = -\sqrt{15}$$

- c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha \Rightarrow \operatorname{sec} \alpha = -\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + 2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

- d) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el coseno y la secante son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{sec} \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -1 \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = -1$$

- e) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cotg} \alpha = -3 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha \Rightarrow \operatorname{sec} \alpha = -\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + \frac{1}{9}} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

- f) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \operatorname{sec} \alpha = -\frac{5}{\sqrt{21}} = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

81. Calcula, en función de h , el valor de cada una de las siguientes razones trigonométricas.

- a) $\text{sen } 123^\circ$, siendo $\text{sen } 57^\circ = h$. d) $\text{cos } 250^\circ$, siendo $\text{sen } 110^\circ = h$. g) $\text{tg } 290^\circ$, siendo $\text{sen } 110^\circ = h$.
 b) $\text{cos } 220^\circ$, siendo $\text{tg } 40^\circ = h$. e) $\text{cos } 247^\circ$, siendo $\text{sen } 113^\circ = h$. h) $\text{sen } 83^\circ$, siendo $\text{cos } 7^\circ = h$.
 c) $\text{tg } 260^\circ$, siendo $\text{sen } 80^\circ = h$. f) $\text{cosec } 701^\circ$, siendo $\text{cotg } 199^\circ = h$. i) $\text{sec } 203^\circ$, siendo $\text{cotg } 67^\circ = h$.

a) $\text{sen } 123^\circ = \text{sen } 57^\circ = h$

b) $1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \text{cos } 220^\circ = -\sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2 220^\circ}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2 40^\circ}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}$

c) $1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{1 - \text{sen}^2 \alpha} \Rightarrow \text{tg } 260^\circ = \sqrt{\frac{1}{1 - \text{sen}^2 260^\circ} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - (-\text{sen } 80^\circ)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - h^2} - 1} = \sqrt{\frac{h^2}{1 - h^2}} = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}}$

d) $\text{cos } 250^\circ = \text{cos } 110^\circ = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 110^\circ} = -\sqrt{1 - h^2}$

e) $\text{cos } 247^\circ = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 247^\circ} = -\sqrt{1 - (-\text{sen } 113^\circ)^2} = -\sqrt{1 - h^2}$

f) $\text{cosec } 701^\circ = \text{cosec } 341^\circ = -\text{cosec } 19^\circ = \text{cosec } 199^\circ = -\sqrt{1 + \text{cotg}^2 199^\circ} = -\sqrt{1 + h^2}$

g) $\text{tg } 290^\circ = \text{tg } 110^\circ = \sqrt{\frac{1}{1 - \text{sen}^2 110^\circ} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - h^2} - 1} = \sqrt{\frac{h^2}{1 - h^2}} = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}}$

h) $\text{sen } 83^\circ = \text{cos } 7^\circ = h$

i) $\text{sec } 203^\circ = -\text{sec } 23^\circ = \frac{-1}{\text{cos } 23^\circ} = \frac{-1}{\text{sen } 67^\circ} = -\text{cosec } 67^\circ = -\sqrt{1 + \text{cotg}^2 67^\circ} = -\sqrt{1 + h^2}$

82. Determina la razón trigonométrica que se indica en cada caso, expresándola en función de h .

a) $\text{cosec } \frac{23\pi}{5}$, sabiendo que $\text{cotg } \frac{3\pi}{5} = -h^2$. c) $\text{tg } 348^\circ$, sabiendo que $\text{cos } 192^\circ = -h^2$.

b) $\text{sec } 305^\circ$, sabiendo que $\text{cotg } 55^\circ = \frac{1}{h}$.

a) $\text{cosec } \frac{23\pi}{5} = \text{cosec } \frac{3\pi}{5} = \sqrt{1 + \text{cotg}^2 \frac{3\pi}{5}} = \sqrt{1 + h^4}$

b) $\text{sec } 305^\circ = \frac{1}{\text{cos } 305^\circ} = \frac{1}{\text{cos } 55^\circ} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2 55^\circ}}} = \sqrt{1 + \text{tg}^2 55^\circ} = \sqrt{1 + h^2}$

c) $\text{tg } 348^\circ = -\sqrt{\frac{1}{\text{cos}^2 348^\circ} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{\text{cos}^2 12^\circ} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{(-\text{cos } 192^\circ)^2} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{h^4} - 1} = -\frac{\sqrt{1 - h^4}}{h^2}$

83. Sabiendo que $\text{sen } \alpha = h$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de h :

a) $\text{sen } (90^\circ - \alpha)$

b) $\text{tg } (1080^\circ - \alpha)$

a) $90^\circ - \alpha$ es también un ángulo del primer cuadrante $\Rightarrow \text{sen } (90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha = \sqrt{1 - h^2}$

b) $1080^\circ = 3 \cdot 360^\circ \Rightarrow \text{tg } (1080^\circ - \alpha) = \text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha = \frac{-h}{\sqrt{1 - h^2}}$

84. Para un ángulo α del primer cuadrante, que cumple que $\operatorname{tg} \alpha = h$, calcula en función de h :

a) $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)$

b) $\operatorname{cotg}(1080^\circ - \alpha)$

a) $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}}$

b) $\operatorname{cotg}(1080^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{1}{h}$

85. Sabiendo que $\operatorname{cosec} x = -\frac{7}{4}$, calcula:

a) $\operatorname{sen}(810^\circ - x)$

b) $\sec\left(\frac{17\pi}{2} - x\right)$

Observemos que x está en el tercer o cuarto cuadrante, por tanto, $810^\circ - x$ y $\frac{17\pi}{2} - x$ están en el segundo o tercer cuadrante, por lo que no se puede saber el signo de $\cos x$.

a) $\operatorname{sen}(810^\circ - x) = \operatorname{sen}(90^\circ - x) = \cos x = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}} = \pm \frac{\sqrt{33}}{7}$

b) $\sec\left(\frac{17\pi}{2} - x\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x = -\frac{7}{4}$

86. Demuestra que $\operatorname{tg}(270^\circ - x) = \operatorname{cotg} x$.

$$\operatorname{tg}(270^\circ - x) = \operatorname{tg}(180^\circ + 90^\circ - x) = \operatorname{tg}(90^\circ - x) = \operatorname{cotg} x.$$

87. Desarrolla, en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$, las expresiones de $\operatorname{sen} 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ y $\operatorname{tg} 4\alpha$.

$$\operatorname{sen} 4\alpha = \operatorname{sen}(2 \cdot 2\alpha) = 2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \cdot 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos^3 \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 4\alpha = \cos(2 \cdot 2\alpha) = \cos^2 2\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha = (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)^2 - (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)^2 = \cos^4 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha - 6 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\operatorname{sen} 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{4 \operatorname{sen} \alpha \cos^3 \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha \cos \alpha}{\cos^4 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha - 6 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

88. Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, y, siendo $\operatorname{sen} \alpha = 0,4$ y $\cos \beta = -0,5$, calcula:

a) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

b) $\cos(\alpha + \beta)$

c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = -0,917 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -0,866$$

a) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = -0,4 \cdot 0,5 - (-0,917) \cdot (-0,866) = -0,994$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = 0,917 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,866 = 0,805$

c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\frac{0,4}{0,917} + \frac{0,866}{0,5}}{1 + \frac{0,4}{0,917} \cdot \frac{0,866}{0,5}} = 0,738$

89. Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 3$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α si α es un ángulo:

a) Del primer cuadrante

b) Del tercer cuadrante

a) Al ser $\operatorname{tg} \alpha > 1$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ y por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante. Tenemos:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} = -0,8$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

b) Al ser $\operatorname{tg} \alpha > 1$, $225^\circ < \alpha < 270^\circ$ y, por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante y se obtienen los mismos valores del apartado anterior para las razones de 2α .

90. Calcula el valor de la tangente de α , sabiendo que es un ángulo del primer cuadrante y que $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{8}{9} - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{8}}{7}$$

91. Calcula, de forma exacta, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 15°

b) $7^\circ 30'$

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen} \left(\frac{30^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos \left(\frac{30^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 7^\circ 30' = \operatorname{sen} \left(\frac{15^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}$$

$$\cos 7^\circ 30' = \cos \left(\frac{15^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 7^\circ 30' = \frac{\operatorname{sen} 7^\circ 30'}{\cos 7^\circ 30'} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})^2}{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})}} = \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

92. Si $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$.

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{30}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{5}$$

93. Transforma en producto las siguientes sumas de razones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} 48^\circ + \operatorname{sen} 32^\circ$

c) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$

e) $\cos 23^\circ - \cos 57^\circ$

b) $\cos 200^\circ + \cos 40^\circ$

d) $\operatorname{sen} 105^\circ - \operatorname{sen} 25^\circ$

f) $\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9}$

a) $\operatorname{sen} 48^\circ + \operatorname{sen} 32^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{48^\circ + 32^\circ}{2} \cos \frac{48^\circ - 32^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \cos 8^\circ$

b) $\cos 200^\circ + \cos 40^\circ = 2 \cos \frac{200^\circ + 40^\circ}{2} \cos \frac{200^\circ - 40^\circ}{2} = 2 \cos 120^\circ \cos 80^\circ$

c) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} = 2 \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15}$

d) $\operatorname{sen} 105^\circ - \operatorname{sen} 25^\circ = 2 \cos \frac{105^\circ + 25^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{105^\circ - 25^\circ}{2} = 2 \cos 65^\circ \operatorname{sen} 40^\circ$

e) $\cos 23^\circ - \cos 57^\circ = -2 \operatorname{sen} \frac{23^\circ + 57^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{23^\circ - 57^\circ}{2} = -2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen}(-17^\circ) = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 17^\circ$

f) $\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9} = -2 \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}}{2} \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9}}{2} = -2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{9} \operatorname{sen} \frac{\pi}{9}$

94. Transforma en suma los siguientes productos de razones trigonométricas.

a) $2 \operatorname{sen} 33^\circ \cos 11^\circ$

b) $\cos 95^\circ \cos 38^\circ$

c) $\operatorname{sen} 50^\circ \cos 75^\circ$

d) $\operatorname{sen} 119^\circ \operatorname{sen} 25^\circ$

a) $33^\circ = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}; 11^\circ = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 44^\circ; \hat{B} = 22^\circ$, luego $2 \operatorname{sen} 33^\circ \cos 11^\circ = \operatorname{sen} 44^\circ + \operatorname{sen} 22^\circ$

b) $95^\circ = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}; 38^\circ = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 133^\circ; \hat{B} = 57^\circ$, luego $\cos 95^\circ \cos 38^\circ = \frac{1}{2}(\cos 133^\circ + \cos 57^\circ)$

c) $50^\circ = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}; 75^\circ = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 125^\circ; \hat{B} = -25^\circ$, luego:

$$\operatorname{sen} 50^\circ \cos 75^\circ = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 125^\circ + \operatorname{sen}(-25^\circ)) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 125^\circ - \operatorname{sen} 25^\circ)$$

d) $119^\circ = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}; 25^\circ = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 144^\circ; \hat{B} = 94^\circ$, luego $\operatorname{sen} 119^\circ \operatorname{sen} 25^\circ = -\frac{1}{2}(\cos 144^\circ - \cos 94^\circ)$

95. Expresa las siguientes sumas como productos.

a) $\text{sen } 4\alpha + \text{sen } 2\alpha$

c) $\text{cos } 6\alpha + \text{cos } 4\alpha$

b) $\text{sen } 3\alpha - \text{sen } \alpha$

d) $\text{cos } 8\alpha - \text{cos } 2\alpha$

a) $\text{sen } 4\alpha + \text{sen } 2\alpha = 2 \text{sen} \frac{4\alpha + 2\alpha}{2} \text{cos} \frac{4\alpha - 2\alpha}{2} = 2 \text{sen } 3\alpha \text{cos } \alpha$

b) $\text{sen } 3\alpha - \text{sen } \alpha = 2 \text{cos} \frac{3\alpha + \alpha}{2} \text{sen} \frac{3\alpha - \alpha}{2} = 2 \text{cos } 2\alpha \text{sen } \alpha$

c) $\text{cos } 6\alpha + \text{cos } 4\alpha = 2 \text{cos} \frac{6\alpha + 4\alpha}{2} \text{cos} \frac{6\alpha - 4\alpha}{2} = 2 \text{cos } 5\alpha \text{cos } \alpha$

d) $\text{cos } 8\alpha - \text{cos } 2\alpha = -2 \text{sen} \frac{8\alpha + 2\alpha}{2} \text{sen} \frac{8\alpha - 2\alpha}{2} = -2 \text{sen } 5\alpha \text{sen } 3\alpha$

96. Demuestra que:

a) $\text{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta - 1}{\text{cotg } \beta + \text{cotg } \alpha}$

b) $\text{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta + 1}{\text{cotg } \beta - \text{cotg } \alpha}$

a) $\text{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta}} = \frac{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta} = \frac{1 - \frac{1}{\text{cotg } \alpha} \cdot \frac{1}{\text{cotg } \beta}}{\frac{1}{\text{cotg } \alpha} + \frac{1}{\text{cotg } \beta}} = \frac{\frac{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta - 1}{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta}}{\frac{\text{cotg } \beta + \text{cotg } \alpha}{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta}} = \frac{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta - 1}{\text{cotg } \beta + \text{cotg } \alpha}$

b) $\text{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{1}{\frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \text{tg } \beta}} = \frac{1 + \text{tg } \alpha \text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta} = \frac{1 + \frac{1}{\text{cotg } \alpha} \cdot \frac{1}{\text{cotg } \beta}}{\frac{1}{\text{cotg } \alpha} - \frac{1}{\text{cotg } \beta}} = \frac{\frac{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta + 1}{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta}}{\frac{\text{cotg } \beta - \text{cotg } \alpha}{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta}} = \frac{\text{cotg } \alpha \text{cotg } \beta + 1}{\text{cotg } \beta - \text{cotg } \alpha}$

97. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $\text{sen}(\alpha + \beta + \gamma)$

c) $\text{sen}(2\alpha + \beta)$

b) $\text{cos}(\alpha + \beta - \gamma)$

d) $\text{cos}(\alpha - 2\beta)$

a) $\text{sen}(\alpha + \beta + \gamma) = \text{sen}(\alpha + (\beta + \gamma)) = \text{sen } \alpha \text{cos}(\beta + \gamma) + \text{cos } \alpha \text{sen}(\beta + \gamma) =$
 $= \text{sen } \alpha \text{cos } \beta \text{cos } \gamma - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \text{sen } \gamma + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta \text{cos } \gamma + \text{cos } \alpha \text{cos } \beta \text{sen } \gamma =$
 $= \text{sen } \alpha \text{cos } \beta \text{cos } \gamma + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta \text{cos } \gamma + \text{cos } \alpha \text{cos } \beta \text{sen } \gamma - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \text{sen } \gamma$

b) $\text{cos}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{cos}(\alpha + (\beta - \gamma)) = \text{cos } \alpha \text{cos}(\beta - \gamma) - \text{sen } \alpha \text{sen}(\beta - \gamma) =$
 $= \text{cos } \alpha \text{cos } \beta \text{cos } \gamma + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta \text{sen } \gamma - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \text{cos } \gamma + \text{sen } \alpha \text{cos } \beta \text{sen } \gamma =$
 $= \text{cos } \alpha \text{cos } \beta \text{cos } \gamma + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta \text{sen } \gamma + \text{sen } \alpha \text{cos } \beta \text{sen } \gamma - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \text{cos } \gamma$

c) $\text{sen}(2\alpha + \beta) = \text{sen } 2\alpha \text{cos } \beta + \text{cos } 2\alpha \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos}^2 \alpha \text{sen } \beta - \text{sen}^2 \alpha \text{sen } \beta$

d) $\text{cos}(\alpha - 2\beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } 2\beta + \text{sen } \alpha \text{sen } 2\beta = \text{cos } \alpha (\text{cos}^2 \beta - \text{sen}^2 \beta) + 2 \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \text{cos } \beta =$
 $= \text{cos } \alpha \text{cos}^2 \beta - \text{cos } \alpha \text{sen}^2 \beta + 2 \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \text{cos } \beta$

Identidades trigonométricas

98. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - 1} = \cos \alpha$ b) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$ c) $\frac{1 + \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$ d) $\sec^2 \alpha - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$

a) $\frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - 1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - 1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{(\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha) \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha} = \cos \alpha$

b) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$

c) $\frac{1 + \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \frac{1 + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$

d) $\sec^2 \alpha - 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

99. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha$

e) $\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

b) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \sec \alpha \operatorname{cosec} \alpha$

f) $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$

c) $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

g) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2} = \operatorname{tg} 2\alpha$

d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$

h) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$

a) $\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1 \right) = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha \frac{\frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha}$

b) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \sec \alpha \operatorname{cosec} \alpha$

c) $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$

e) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) = \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta - (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha (\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta) - \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$

f) $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = 2 - 2 \left(\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 2 - 2 \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$

g) La expresión es equivalente a la demostrada en el apartado d.

h) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$

100. Simplifica las expresiones trigonométricas dadas.

a) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2$

d) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}$

b) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta (\cotg \alpha + \cotg \beta)$

e) $\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

c) $\operatorname{sen} 2\alpha (\operatorname{tg} \alpha + \cotg \alpha)$

a) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2$

b) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta (\cotg \alpha + \cotg \beta) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$

c) $\operatorname{sen} 2\alpha (\operatorname{tg} \alpha + \cotg \alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha} \right) = 2$

d) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} + 1 \right) = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} + 1 \right) =$
 $= \frac{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha)}{1 - \operatorname{sen} \alpha} \left(\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} + 1 \right) = (1 + \operatorname{sen} \alpha)(2 + \cos \alpha)$

e) $\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} - \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$
 $= \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$

101. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos.

a) $\frac{\operatorname{sen} 8\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cos 3\alpha}$

c) $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha}$

b) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

d) $\frac{\cos 2\alpha + \cos \alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} \alpha}$

a) $\frac{\operatorname{sen} 8\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cos 3\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} 5\alpha \cos 3\alpha}{2 \cos 3\alpha} = \operatorname{sen} 5\alpha$

c) $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{2 \cos 4\alpha \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\cos 4\alpha}$

b) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2}}$

d) $\frac{\cos 2\alpha + \cos \alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{2 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{3\alpha}{2}} = \cotg \frac{3\alpha}{2}$

102. Demuestra que $\cos x = \cos^4 \left(\frac{x}{2} \right) - \operatorname{sen}^4 \left(\frac{x}{2} \right)$.

$$\cos^4 \left(\frac{x}{2} \right) - \operatorname{sen}^4 \left(\frac{x}{2} \right) = \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right)^2 = \frac{1 + \cos^2 x + 2 \cos x}{4} - \frac{1 + \cos^2 x - 2 \cos x}{4} = \cos x$$

Ecuaciones trigonométricas

103. Con ayuda de la calculadora, halla la medida en grados del ángulo α del primer cuadrante tal que:

- a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,345$ c) $\operatorname{cos} \alpha = 0,553$ e) $\operatorname{sec} \alpha = 0,442$
 b) $\operatorname{cosec} \alpha = 0,3$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 0,25$ f) $\operatorname{cotg} \alpha = 0,01$

- a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,345 \Rightarrow \alpha = 20^\circ 10' 54''$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 0,25 \Rightarrow \alpha = 14^\circ 2' 10''$
 b) $\operatorname{cosec} \alpha = 0,3 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo e) $\operatorname{sec} \alpha = 0,442 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo
 c) $\operatorname{cos} \alpha = 0,553 \Rightarrow \alpha = 56^\circ 25' 37''$ f) $\operatorname{cotg} \alpha = 0,01 \Rightarrow \alpha = 89^\circ 25' 37''$

104. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

- a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ d) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 b) $\operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\operatorname{cos} x = -\frac{1}{2}$ h) $\operatorname{sen} x = 0$
 c) $\operatorname{tg} x = 1$ f) $1 + \operatorname{cos} x = 0$ i) $\operatorname{tg} x = 0$

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$ f) $1 + \operatorname{cos} x = 0 \Rightarrow \operatorname{cos} x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

b) $\operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$ g) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 150^\circ + 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$ h) $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

e) $\operatorname{cos} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$ i) $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

105. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

- a) $\operatorname{sen} 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\operatorname{cos} 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg} 3x = -1$ d) $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$ e) $\operatorname{cos} \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ f) $\operatorname{tg} \frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\operatorname{sen} 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \end{cases}$

d) $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pi k \Rightarrow x = 2\pi k$

b) $\operatorname{cos} 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi k \\ x = \frac{7\pi}{8} + \pi k \end{cases}$

e) $\operatorname{cos} \frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{x}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi + 6\pi k \\ x = 4\pi + 6\pi k \end{cases}$

c) $\operatorname{tg} 3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$

f) $\operatorname{tg} \frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{3x}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \\ x = \frac{22\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \end{cases}$

106. Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} x = \cos x$

c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$

d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$

c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60^\circ + 180^\circ k$

d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2 \Rightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = 1 \Rightarrow 2x = 90^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k$

Al elevar al cuadrado aparecen soluciones falsas con k impar. La solución es $x = 45^\circ + 360^\circ k$ con $k = 0, 1, 2, \dots$

107. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 5$

c) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9$

b) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x$

d) $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x$

a) $\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x = 5 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \frac{4}{\operatorname{tg} x} = 5 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 4 = 5 \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 75^\circ 57' 50'' \\ x = 255^\circ 57' 50'' \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ \\ x = 225^\circ \end{cases} \end{cases}$

b) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x \Rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ \\ x = 210^\circ \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ \\ x = 330^\circ \end{cases} \end{cases}$

c) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9 \Rightarrow 8 \cos^2 x - 8 \operatorname{sen}^2 x - 8 \cos x + 9 = 0 \Rightarrow 8 \cos^2 x - 8 + 8 \cos^2 x - 8 \cos x + 9 = 0 \Rightarrow 16 \cos^2 x - 8 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 75^\circ 31' 21'' \\ x = 284^\circ 28' 39'' \end{cases}$

d) $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow \Rightarrow 1 = 4 \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ x = 300^\circ \end{cases} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ \\ x = 240^\circ \end{cases} \end{cases}$

108. Halla, para el intervalo $[0, 2\pi]$, las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0$ b) $\cos 2x - \text{sen } x = \text{sen } 2x - \cos x$ c) $2 \text{sen } x + \sqrt{3} \text{tg } x = 0$

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ 1 + \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \text{Sin solución real} \end{cases}$

b) $\cos 2x - \text{sen } x = \text{sen } 2x - \cos x \Rightarrow \cos 2x + \cos x = \text{sen } 2x + \text{sen } x \Rightarrow 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \text{sen} \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \frac{x}{2} \left[\cos \frac{3x}{2} - \text{sen} \frac{3x}{2} \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi, x = 3\pi \text{ (No vale pues } 3\pi \notin [0, 2\pi]) \\ \cos \frac{3x}{2} - \text{sen} \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \text{tg} \frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4}, \frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

c) $2 \text{sen } x + \sqrt{3} \text{tg } x = 0 \Rightarrow 2 \text{sen } x + \sqrt{3} \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{sen } x \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

109. Calcula, para las ecuaciones propuestas, las soluciones pertenecientes al intervalo $[-\pi, \pi]$.

a) $\cos 3x = 1 + \cos 2x$ c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x$

b) $\text{sen } 3x + \text{sen } 6x = 0$ d) $\sqrt{3} \cos x + \text{sen } x = 2$

a) $\cos 3x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos(2x + x) = 1 + \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x \cos x - \text{sen } 2x \text{sen } x = 2 \cos^2 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^3 x - \text{sen}^2 x \cos x - 2 \text{sen}^2 x \cos x = 2 \cos^2 x \Rightarrow \cos x (\cos^2 x - 3 \text{sen}^2 x - 2 \cos x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x (\cos^2 x - 3 + 3 \cos^2 x - 2 \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} \\ 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = -0,6514 \Rightarrow x = 2,28, x = -2,28 \end{cases}$$

b) $\text{sen } 3x + \text{sen } 6x = 0 \Rightarrow 2 \text{sen} \frac{9x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen} \frac{9x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{2\pi}{9}, x = \frac{2\pi}{9} \\ \cos \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \pi, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x \Rightarrow 2 \cos 4x \cos x = \cos x \Rightarrow \cos x (2 \cos 4x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2} \\ \cos 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}, x = \frac{\pi}{12}, x = -\frac{\pi}{12}, x = -\frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

d) $\sqrt{3} \cos x + \text{sen } x = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \text{sen } x = 1 \Rightarrow \text{sen} \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

110. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 360^\circ]$.

a)
$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm 1 \\ \cos^2 y = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ, y = 45^\circ \\ x = 90^\circ, y = 135^\circ \\ x = 90^\circ, y = 225^\circ \\ x = 90^\circ, y = 315^\circ \\ x = 270^\circ, y = 45^\circ \\ x = 270^\circ, y = 135^\circ \\ x = 270^\circ, y = 225^\circ \\ x = 270^\circ, y = 315^\circ \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 45^\circ \Rightarrow x-y = 90^\circ \\ \frac{x-y}{2} = 315^\circ \Rightarrow x-y = 630^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 90^\circ \\ x-y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 90^\circ, y = 0^\circ$$

c)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)) = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)) = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 30^\circ \\ x-y = 0^\circ \end{cases} \circ \begin{cases} x+y = 150^\circ \\ x-y = 180^\circ \end{cases} \circ \begin{cases} x+y = 390^\circ \\ x-y = -180^\circ \end{cases} \circ \begin{cases} x+y = 510^\circ \\ x-y = -180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15^\circ, y = 15^\circ \\ x = 75^\circ, y = 75^\circ \\ x = 285^\circ, y = 105^\circ \\ x = 105^\circ, y = 285^\circ \\ x = 165^\circ, y = 345^\circ \\ x = 345^\circ, y = 165^\circ \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x - \pi) = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}, y = \frac{\pi}{4}$$

111. Halla todas las soluciones de la siguiente ecuación: $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + 4 \cos^3 x = 0$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + 4 \cos^3 x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} \frac{4x}{2} \cos \frac{2x}{2} + 4 \cos^3 x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} 2x \cos x + 4 \cos^3 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos x (\operatorname{sen} 2x + 2 \cos^2 x) = 0 \Rightarrow 2 \cos x (2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \cos^2 x) = 0 \Rightarrow 4 \cos^2 x (\operatorname{sen} x + \cos x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = 135^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

112. Resuelve este sistema en el intervalo $[0, 2\pi]$:
$$\begin{cases} \sen x + \sen y = 1 \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y sumando miembro a miembro los resultados:

$$\sen^2 x + \cos^2 x + \sen^2 y + \cos^2 y + 2(\sen x \sen y + \cos x \cos y) = 2 \Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(x - y) = 2 \Rightarrow \cos(x - y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \frac{\pi}{2} \\ y - x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo la primera condición en la primera ecuación:

$$\sen\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \sen y = 1 \Rightarrow \cos y + \sen y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \sen^2 y} = 1 - \sen y \Rightarrow 1 - \sen^2 y = 1 + \sen^2 y - 2\sen y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sen^2 y - 2\sen y = 0 \Rightarrow 2\sen y(\sen y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sen y = 0 \Rightarrow y = 0, x = \frac{\pi}{2} \\ \sen y = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}, x = \pi \text{ (Falsa)} \end{cases}$$

De la misma forma, sustituyendo la segunda condición, se obtiene también la solución $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$.

Resolución de triángulos

113. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90^\circ, a = 25 \text{ mm}, c = 14 \text{ mm}$

c) $\hat{C} = 90^\circ, \hat{A} = 20^\circ, a = 12 \text{ dm}$

b) $\hat{B} = 90^\circ, a = 28 \text{ cm}, c = 45 \text{ cm}$

d) $\hat{B} = 90^\circ, \hat{A} = 15^\circ, b = 15 \text{ m}$

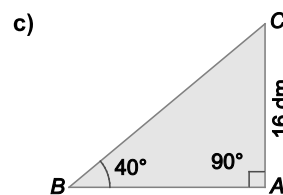
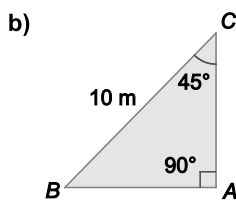
a) $b = \sqrt{25^2 - 14^2} = 20,71 \text{ mm} \quad \sen \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{14}{25} \Rightarrow \hat{C} = 34^\circ 3' 21'' \quad \hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 55^\circ 56' 39''$

c) $\hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 70^\circ \quad \sen \hat{A} = \frac{12}{c} \Rightarrow c = 35,09 \text{ dm} \quad \tg \hat{A} = \frac{12}{b} \Rightarrow b = 32,97 \text{ dm}$

d) $\hat{C} = 90^\circ - \hat{A} = 75^\circ \quad \sen \hat{A} = \frac{a}{15} \Rightarrow a = 3,88 \text{ m} \quad \cos \hat{A} = \frac{c}{15} \Rightarrow c = 14,49 \text{ m}$

114. Calcula el área de cada uno de estos triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90^\circ, a = 73 \text{ mm}, c = 55 \text{ mm}$



a) $b = \sqrt{73^2 - 55^2} = 48 \Rightarrow \text{Área: } S = \frac{55 \cdot 48}{2} = 1320 \text{ mm}^2$

b) $b = c; c = 10 \sen 45^\circ = 5\sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow \text{Área: } S = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25 \text{ m}^2$

c) $c = \frac{16}{\tg 40^\circ} = 19,07 \text{ dm} \Rightarrow \text{Área: } S = \frac{19,07 \cdot 16}{2} = 152,56 \text{ dm}^2$

115. Resuelve los siguientes triángulos.

- a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\hat{C} = 40^\circ$ d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35^\circ$
 b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm e) $a = 30$ cm, $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 50^\circ$
 c) $a = 3$ cm, $\hat{B} = 30^\circ$, $c = 5$ cm f) $b = 25$ cm, $\hat{B} = 55^\circ$, $\hat{C} = 65^\circ$

$$\text{a) } \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{b \text{ sen } \hat{C}}{c} = \frac{20 \cdot \text{sen } 40^\circ}{28} = 0,459 \Rightarrow \hat{B} = 27^\circ 19' 21''$$

$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 112^\circ 40' 39''$$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow a = \frac{c \text{ sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{28 \cdot \text{sen } 112^\circ 40' 39''}{\text{sen } 40^\circ} = 40,2 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9^2 + 40^2 - 41^2}{2 \cdot 9 \cdot 40} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{41^2 + 40^2 - 9^2}{2 \cdot 40 \cdot 41} = 0,9756 \Rightarrow \hat{B} = 12^\circ 40' 58''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 77^\circ 19' 2''$$

$$\text{c) } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ = 8,0192 \Rightarrow b = 2,83 \text{ cm}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2,83^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 2,83 \cdot 5} = 0,8484 \Rightarrow \hat{A} = 31^\circ 57' 43''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 118^\circ 2' 17''$$

$$\text{d) } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot \cos 35^\circ = 74,1053 \Rightarrow c = 8,61 \text{ cm}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{15^2 + 8,61^2 - 12^2}{2 \cdot 15 \cdot 8,61} = 0,6006 \Rightarrow \hat{A} = 53^\circ 5' 14''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 91^\circ 54' 46''$$

$$\text{e) } \hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 100^\circ$$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \text{ sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{30 \text{ sen } 50^\circ}{\text{sen } 100^\circ} = 23,34 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \text{ sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{30 \text{ sen } 30^\circ}{\text{sen } 100^\circ} = 15,23 \text{ cm}$$

$$\text{f) } \hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 60^\circ$$

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{b \text{ sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{25 \text{ sen } 65^\circ}{\text{sen } 55^\circ} = 27,66 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \Rightarrow a = \frac{b \text{ sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{25 \text{ sen } 60^\circ}{\text{sen } 55^\circ} = 26,43 \text{ cm}$$

116. Calcula el área de cada uno de estos triángulos.

- a) $\hat{A} = 80^\circ$, $b = 25$ cm, $c = 16$ cm
- b) $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $c = 20$ cm
- c) $a = 16$ cm, $b = 25$ cm, $c = 15$ cm
- d) $\hat{A} = 66^\circ$, $a = 15$ cm, $c = 20$ cm
- e) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35^\circ$

a) $A = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \hat{A} = 196,96 \text{ cm}^2$

b) $\hat{C} = 70^\circ$, por tanto, el triángulo es isósceles y $a = 20$ cm

$$A = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \hat{B} = 128,56 \text{ cm}^2$$

c) $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0,792 \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = 0,6105$

$$A = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \hat{A} = 114,47 \text{ cm}^2$$

d) $\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c \operatorname{sen} \hat{A}}{a} = 1,218 > 1$

No existe tal triángulo

e) $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \hat{C} = 43,02 \text{ cm}^2$

117. Halla el área de los dos triángulos que verifican que $\hat{A} = 45^\circ$, $a = 6$ cm y $c = 7,5$ cm.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c \operatorname{sen} \hat{A}}{a} = 0,8839 \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 62^\circ 6' 59'' , \hat{B} = 72^\circ 53' 1'' \\ \hat{C} = 117^\circ 53' 1'' , \hat{B} = 17^\circ 6' 59'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \hat{B} = 21,5 \text{ cm}^2 \\ A = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \hat{B} = 6,62 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Síntesis

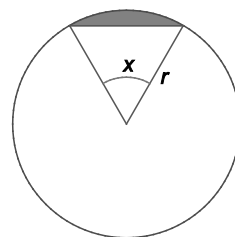
118. Si la suma de dos ángulos α y β es igual, en radianes, a $\frac{\pi}{3}$, calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}$$

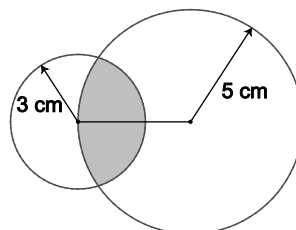
$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

119. a) Demuestra que el área del segmento circular de la figura se puede calcular mediante la expresión:

$$A = \frac{r^2}{2}(x - \operatorname{sen} x)$$



- b) Calcula el área de la zona sombreada.



a) Área del sector circular: $A_1 = \frac{\pi r^2 x}{360^\circ}$

Área del triángulo: $A_2 = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x$

Área del segmento circular: $A = A_1 - A_2 = \frac{\pi r^2 x}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi x}{180^\circ} - \operatorname{sen} x \right)$

Considerando los ángulos dados en radianes, la expresión queda: $A = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi x}{\pi} - \operatorname{sen} x \right) = \frac{r^2}{2} (x - \operatorname{sen} x)$

- b) Aplicando la expresión anterior para calcular el área de los dos segmentos circulares que se forman en ambas circunferencias.

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_1 = 5$ cm:

$$\cos \hat{A}_1 = \frac{5^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 5} = 0,82 \Rightarrow \hat{A}_1 = 34,92^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 2\hat{A}_1 = 69,84^\circ = 1,22 \text{ rad} \Rightarrow A_1 = \frac{r_1^2}{2} (\alpha_1 - \operatorname{sen} \alpha_1) = 3,51 \text{ cm}^2$$

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_2 = 3$ cm:

$$\cos \hat{A}_2 = \frac{3^2 + 5^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 0,3 \Rightarrow \hat{A}_2 = 72,54^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 2\hat{A}_2 = 145,08^\circ = 2,53 \text{ rad} \Rightarrow A_2 = \frac{r_2^2}{2} (\alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_2) = 8,8 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la zona sombreada es $A = A_1 + A_2 = 12,31 \text{ cm}^2$.

120. a) Halla una fórmula que permita calcular el área de un rombo conociendo las medidas de su lado y de uno de sus ángulos.

- b) ¿Cuál es el área de un rombo de 15 cm de lado si uno de sus ángulos mide 40° ?
 c) Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que su lado mide 4 cm y su área 8 cm^2 .

- a) Un rombo de lado x y uno de sus ángulos α se puede dividir en dos triángulos isósceles iguales de área

$$A = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} \alpha, \text{ por tanto, el área del rombo es } A_R = 2A = x^2 \operatorname{sen} \alpha.$$

b) $A_R = 15^2 \operatorname{sen} 40^\circ = 144,63 \text{ cm}^2$.

c) $8 = 4^2 \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Los ángulos del rombo son 30° y 150° .

121. a) Demuestra que $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

b) Con ayuda de la fórmula anterior y el teorema del coseno, demuestra que en un triángulo de lados a , b y c se verifica:

$$\cos \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

con p el valor del semiperímetro del triángulo $p = \frac{a+b+c}{2}$.

a) $1 + \cos \alpha = 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

b) $2 \cos^2 \frac{\hat{A}}{2} = 1 + \cos \hat{A} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

122. Sabiendo que $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$:

a) Calcula $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ y $\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ en función de t .

b) Con la ayuda de las fórmulas del ángulo doble, calcula $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ en función de t .

c) Calcula en función de t las siguientes expresiones:

i) $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}$

ii) $\frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}$

iii) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}$

a) $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \sec^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1 + t^2}$ y $\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}$

b) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos \alpha = \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2t}{1-t^2}$

c) i) $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{t^2+1}} = \frac{t^2+1}{-t^2+2t+1}$

ii) $\frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{t^2+1}} = \frac{t^2+2t-1}{-t^2+2t+1} = \frac{t^2+2t-1}{-t^2+2t+1}$

iii) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{2t}{t^2+2t-1}} = \frac{2t(t^2+1)}{(1-t^2)(t^2+2t-1)}$

CUESTIONES

123. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{cos} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$, $\operatorname{sec} \alpha$ y $\operatorname{cotg} \alpha$?

El valor mínimo de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{cos} \alpha$ es -1 y el valor máximo es 1 .

El valor mínimo y máximo del resto de valores no está definido, $\operatorname{tg} \alpha$ y $\operatorname{cotg} \alpha$ pueden tomar cualquier valor, $\operatorname{sec} \alpha$ y $\operatorname{cosec} \alpha$ pueden tomar cualquier valor salvo los pertenecientes al intervalo $(-1, 1)$.

124. Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = 3$

b) $\operatorname{cos}^n x = 10$ siendo n cualquier número natural.

a) No tiene solución, pues el valor máximo del $\operatorname{sen} x$ y del $\operatorname{cos} x$ es 1 , con lo cual su suma nunca puede ser 3 .

b) No tiene solución, pues el valor máximo del $\operatorname{cos} x$ es 1 , con lo cual su potencia nunca puede ser 10 .

125. Indica todos los ángulos positivos y menores que 360° tales que su tangente coincida con su cotangente.

La tangente coincide con la cotangente para aquellos ángulos en que su valor es 1 y -1 . Luego, los ángulos positivos menores de 360° que satisfacen dicha condición son 45° , 135° , 225° y 315° .

126. ¿Cuánto vale la siguiente diferencia?

$$\operatorname{sen}(5\pi - \alpha) - \operatorname{cos}(\alpha + 8\pi)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(5\pi - \alpha) - \operatorname{cos}(\alpha + 8\pi) &= \operatorname{sen} 5\pi \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos} 5\pi \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} 8\pi + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 8\pi = \\ &= \operatorname{sen} \pi \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos} \pi \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} 2\pi + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \alpha \end{aligned}$$

PROBLEMAS

127. Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Debido a la acción del viento, el globo se ha desplazado de la vertical del punto de amarre y se encuentra a una altura de 8 m. Calcula la inclinación de la cuerda respecto de la línea de tierra.

Sea α la inclinación buscada, tenemos: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 53^\circ 7' 48''$.

128. En cierta ciudad, en el mediodía del solsticio de verano, los rayos solares tienen una inclinación de $73^\circ 3'$. Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

Sea x la longitud de la sombra, tenemos: $\operatorname{tg} 73^\circ 3' = \frac{52}{x} \Rightarrow x = 15,85$ m.

129. Una señal de tráfico indica que la pendiente de un tramo de carretera es del 8% , lo que quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura.

a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

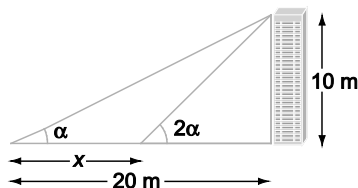
b) ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125 m?

a) Sea α el ángulo buscado, tenemos: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{100} \Rightarrow \alpha = 4^\circ 34' 26''$

b) Sea x el recorrido pedido, tenemos: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{125}{x} \Rightarrow x = 1567,5$ m

130. Desde un cierto punto que dista 20 m del pie de una torre de 10 m de altura, vemos el punto más alto de ella bajo un cierto ángulo.

¿Qué distancia debemos recorrer hacia la torre para verlo con un ángulo que sea el doble del anterior?



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{20}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = \frac{10}{20 - x} \Rightarrow 4x = 50 \Rightarrow x = 12,5 \text{ m}$$

131. Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42° . Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24° .

Calcula la altura del pino.

Sea h la altura del pino y x la distancia del pie del pino al primer punto. Tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 42^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 24^\circ = \frac{h}{2,5 + x} \end{array} \right\} \Rightarrow h = x \operatorname{tg} 42^\circ = 0,9x \Rightarrow 0,445 = \frac{0,9x}{2,5 + x} \Rightarrow 1,1125 + 0,445x = 0,9x \Rightarrow x = 2,45 \text{ m} \Rightarrow h = 2,2 \text{ m}$$

132. Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 km/h, viajan por una carretera que se bifurca en dos que forman un ángulo de 82° y son rectas. Si llegan a la vez a la bifurcación y cada coche toma una de las ramas, ¿qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 15 min = 0,25 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = 90 \cdot 0,25 = 22,5 \text{ km} \\ e_2 = 80 \cdot 0,25 = 20 \text{ km} \end{array} \right\} \Rightarrow x = \sqrt{22,5^2 + 20^2 - 2 \cdot 22,5 \cdot 20 \cos 82^\circ} = 27,95 \text{ km}$$

133. Dos coches parten a la vez de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección nornordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad de 70 km/h, y el otro la segunda con una velocidad de 90 km/h, ambas constantes.

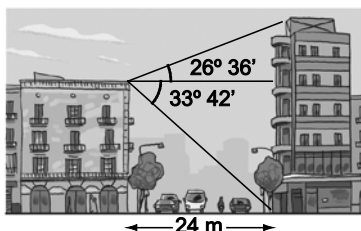
¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

El ángulo que forman las dos carreteras es $\alpha = 22^\circ 30'$.

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 30 min = 0,5 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = 70 \cdot 0,5 = 35 \text{ km} \\ e_2 = 90 \cdot 0,5 = 45 \text{ km} \end{array} \right\} \Rightarrow x = \sqrt{35^2 + 45^2 - 2 \cdot 35 \cdot 45 \cos \alpha} = 18,43 \text{ km}$$

134. Calcula la altura de los dos edificios de la figura.



Sea x la altura del primer edificio e y la del segundo. Tenemos:

$$\operatorname{tg} 33^\circ 42' = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 24 \operatorname{tg} 33^\circ 42' = 16 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 26^\circ 36' = \frac{y - x}{24} \Rightarrow y - x = 24 \operatorname{tg} 26^\circ 36' = 12 \text{ m} \Rightarrow y = 12 + 16 = 28 \text{ m}$$

135. Dos ciudades, *A* y *B*, están situadas sobre el mismo meridiano de la esfera terrestre, mientras que la ciudad *C* se encuentra en el mismo paralelo que *A*. La latitud de *A* es de $\alpha = 40^\circ$ Norte.



- a) Si la ciudad *B* está 150 km al norte de *A*, calcula su latitud sabiendo que el radio de la Tierra es de unos 6370 km.
- b) Si la ciudad *C* está situada sobre el mismo paralelo, a 30° al oeste de *A*, ¿qué distancia separa estas dos ciudades?

- a) Recordemos que la longitud de un arco de amplitud α grados y de una circunferencia de radio r es $L = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$:

$$\alpha + \beta = \frac{180^\circ L}{\pi r} = \frac{180^\circ \left[\frac{\pi \cdot 40^\circ \cdot 6370}{180^\circ} + 150 \right]}{6370\pi} = 41^\circ 21'$$

- b) Se calcula en primer lugar el radio del paralelo correspondiente: $\text{sen } 50^\circ = \frac{r}{6370} \Rightarrow r = 4879,7 \text{ km}$

$$L = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} = 2555 \text{ km}$$

136. Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan 75 km entre sí. Las visuales desde *A* y *B* hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36° y 12° de amplitud, respectivamente.

Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de *A* y de *B*, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

Sean x_A , x_B las distancias del avión a *A* y *B*, respectivamente, y h la altura del avión, tenemos:

$$\frac{x_B}{\text{sen } 36^\circ} = \frac{75}{\text{sen } 132^\circ} \Rightarrow x_B = 59 \text{ km} \quad \frac{x_A}{\text{sen } 12^\circ} = \frac{75}{\text{sen } 132^\circ} \Rightarrow x_A = 21 \text{ km} \quad h = x_B \cdot \text{sen } 12^\circ = 12,3 \text{ km}$$

137. Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm^2 de área.

El lado del cuadrado mide $\sqrt{144} = 12 \text{ cm}$, por tanto, el perímetro del pentágono es 48 cm, es decir, cada lado del pentágono mide 9,6 cm. Si a_p es la apotema, tenemos $\text{tg } 36^\circ = \frac{4,8}{a_p} \Rightarrow a_p = 6,61 \text{ cm}$ y por tanto, el área del pentágono es $\frac{48 \cdot 6,61}{2} = 158,54 \text{ cm}^2$.

138. Calcula los radios y las áreas de las circunferencias inscrita y circunscrita a un octógono regular de 5 cm de lado.

Calculamos el radio de la circunferencia circunscrita: $\text{sen } \frac{360^\circ}{16} = \frac{2,5}{R} \Rightarrow R = 6,53 \text{ cm}$.

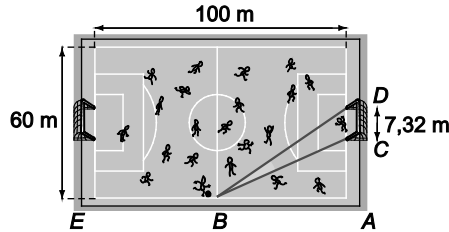
Calculamos el radio de la circunferencia inscrita: $\text{tg } \frac{360^\circ}{16} = \frac{2,5}{r} \Rightarrow r = 6,04 \text{ cm}$.

Por tanto, el área de la circunferencia circunscrita es $A_1 = \pi R^2 = 134 \text{ cm}^2$ y el de la circunferencia inscrita es $A_2 = \pi r^2 = 114 \text{ cm}^2$.

139. Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35° .

El paralelogramo se puede dividir en dos triángulos iguales de área $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 \cdot \sin 35^\circ$, por tanto, el área del paralelogramo es $10 \cdot 15 \cdot \sin 35^\circ = 86,04 \text{ cm}^2$.

140. Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto B del campo.



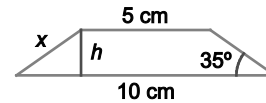
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \widehat{CBA} = \frac{26,34}{50} = 0,5268 \Rightarrow \widehat{CBA} = 27^\circ 46' 49'' \\ \operatorname{tg} \widehat{DBA} = \frac{33,66}{50} = 0,6732 \Rightarrow \widehat{DBA} = 33^\circ 56' 54'' \end{cases} \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBA} - \widehat{CBA} = 6^\circ 10' 5''$$

141. Las bases de un trapecio isósceles miden 10 y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35° . Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.

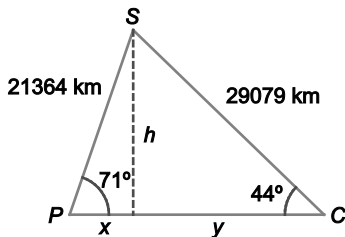
$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{2,5} \Rightarrow h = 1,75 \text{ cm}$$

$$\cos 35^\circ = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x = 3,05 \text{ cm} \Rightarrow P = 21,1 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(10 + 5) \cdot 1,75}{2} = 13,13 \text{ cm}^2$$



142. Desde un satélite GPS se establece la posición de un coche respecto de un punto de referencia fijo en la Tierra. Las distancias desde el punto fijo y el coche al satélite son 21 364 y 29 079 km, respectivamente. Si la línea que une el punto fijo con el satélite forma un ángulo con el suelo de 71° , y la que une el coche con el satélite, 44° , ¿qué distancia separa al coche del punto fijo? ¿A qué altura está el satélite?

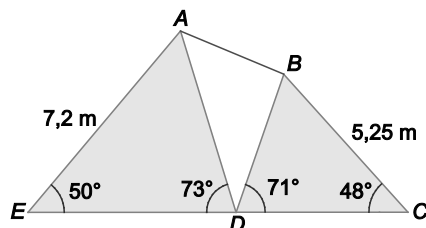


Observemos el dibujo, tenemos:

$$h = 21364 \cdot \sin 71^\circ = 20200 \text{ km}$$

$$x + y = 21364 \cdot \cos 71^\circ + 29079 \cdot \cos 44^\circ = 27873,12 \text{ km}$$

143. Calcula la distancia entre los puntos A y B.

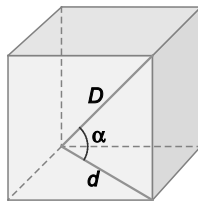


$$\frac{AD}{\sin 50^\circ} = \frac{7,2}{\sin 73^\circ} \Rightarrow AD = 5,77 \text{ m}$$

$$\frac{BD}{\sin 48^\circ} = \frac{5,25}{\sin 71^\circ} \Rightarrow BD = 4,13 \text{ m}$$

$$AB^2 = 5,77^2 + 4,13^2 - 2 \cdot 5,77 \cdot 4,13 \cos(180^\circ - 73^\circ - 71^\circ) = 11,79 \Rightarrow AB = 3,43 \text{ m}$$

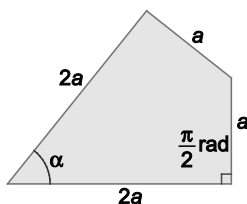
144. Calcula el ángulo α que forman la diagonal del cubo y la diagonal de una cara del mismo.



Sea a la arista del cubo, $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$ y $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, por tanto, tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{d}{D} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha = 35^\circ 15' 52''$$

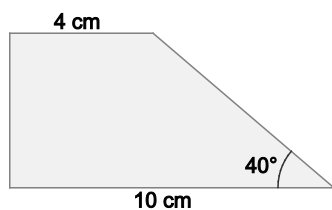
145. Calcula la amplitud del ángulo α de la figura.



La figura se puede dividir en dos triángulos iguales, ya que tienen los tres lados iguales, por tanto:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 26^\circ 33' 54'' \Rightarrow \alpha = 53^\circ 7' 48''$$

146. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la figura.



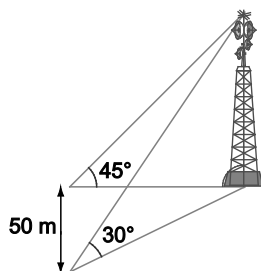
Altura: $h = 6 \operatorname{tg} 40^\circ = 5,03$ cm

Lado restante: $x = 6 \cos 40^\circ = 4,6$ cm

Perímetro: 23,63 cm

Área: $\frac{10+4}{2} \cdot 5,03 = 35,21$ cm²

147. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45° . Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30° . Halla la altura de la antena.



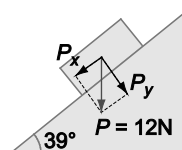
La distancia inicial a la antena es igual a su altura h , ya que el ángulo en el primer punto es de 45° .

Desde el segundo punto, la distancia a la antena es $\frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}h$.

Al ser el triángulo del suelo rectángulo tenemos:

$$h^2 + 50^2 = (\sqrt{3}h)^2 = 3h^2 \Rightarrow h^2 = 1250 \Rightarrow h = 35,36$$
 m

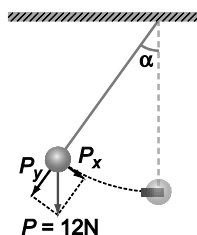
148. Calcula las componentes p_x y p_y de la fuerza \vec{P} de la figura.



$$p_x = P \operatorname{sen} \alpha = 12 \operatorname{sen} 39^\circ = 7,55$$
 N

$$p_y = P \operatorname{cos} \alpha = 12 \operatorname{cos} 39^\circ = 9,32$$
 N

149. Calcula, en función de α , las componentes p_x y p_y de la fuerza \vec{P} en el siguiente péndulo. Halla el valor de la fuerza para el caso en que $\alpha = 30^\circ$.



$$p_x = P \operatorname{sen} \alpha = 12 \operatorname{sen} 30^\circ = 6 \text{ N}$$

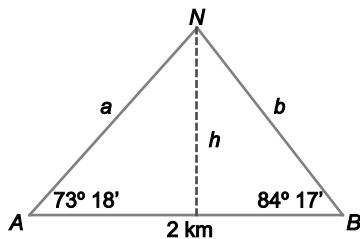
$$p_y = P \operatorname{cos} \alpha = 12 \operatorname{cos} 30^\circ = 10,39 \text{ N}$$

150. Dos personas que están separadas por 2 km de distancia, ven, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos de $73^\circ 18'$ y $84^\circ 17'$, respectivamente.

Calcula la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

Hay dos posibles interpretaciones del problema.

Si la nube está situada entre los dos observadores, tenemos:

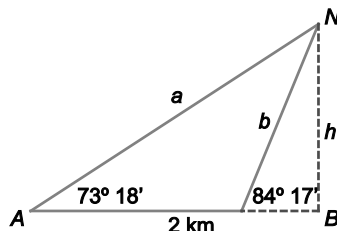


$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73^\circ 18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22^\circ 25'} \Rightarrow b = 5,02 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 84^\circ 17'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22^\circ 25'} \Rightarrow a = 5,22 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84^\circ 17' = 5 \text{ km}$$

Si la nube está situada a un mismo lado de los dos observadores, tenemos



$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73^\circ 18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10^\circ 59'} \Rightarrow b = 10,05 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 95^\circ 43'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10^\circ 59'} \Rightarrow a = 10,45 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84^\circ 17' = 10 \text{ km}$$

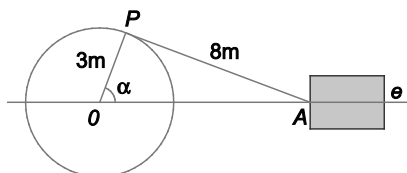
151. Determina, en función del número de lados, las áreas de los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos, respectivamente, a una circunferencia de 10 cm de radio.

$$\text{Área del polígono inscrito. } A = n \frac{1}{2} 10^2 \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n} = 50n \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n}$$

El lado del polígono circunscrito mide $2 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2n} = 20 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, por tanto, el área del polígono circunscrito es:

$$A = \frac{n \cdot 20 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \cdot 10}{2} = 100n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

152. La máquina que representa la figura transforma un movimiento con trayectoria circular en un movimiento con trayectoria recta.



a) Calcula la distancia que separa a O de A cuando:

i) $\alpha = 0$ rad ii) $\alpha = \pi$ rad iii) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad

b) Halla una expresión que relacione la distancia OA con el ángulo α .

c) Comprueba que la relación hallada se corresponde con los valores calculados en el apartado a).

d) Calcula la distancia OA cuando:

i) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad ii) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad iii) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ rad iv) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ rad

a) i) $\alpha = 0 \Rightarrow OA = 8 + 3 = 11$ m ii) $\alpha = \pi \Rightarrow OA = 8 - 3 = 5$ m iii) $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} = 7,42$ m

b) Aplicando el teorema del coseno tenemos:

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2 \cdot OA \cdot OP \cos \alpha \Rightarrow 64 = OA^2 + 9 - 6 \cdot OA \cos \alpha \Rightarrow OA^2 - 6 \cos \alpha OA - 55 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA = \frac{6 \cos \alpha \pm \sqrt{36 \cos^2 \alpha - 4 \cdot 1 \cdot (-55)}}{2} = 3 \cos \alpha \pm \sqrt{9 \cos^2 \alpha + 55}$$

c) $\alpha = 0 \Rightarrow OA = 3 \cos 0 \pm \sqrt{9 \cos^2 0 + 55} = 3 \pm \sqrt{9 + 55} = 3 \pm 8 \Rightarrow \begin{cases} OA = 3 - 8 = -5 \text{ Imposible} \\ OA = 3 + 8 = 11 \text{ m} \end{cases}$

De igual manera, eliminando las soluciones imposibles tenemos:

$$\alpha = \pi \Rightarrow OA = 3 \cos \pi + \sqrt{9 \cos^2 \pi + 55} = -3 + \sqrt{9 + 55} = -3 + 8 = 5 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA = 3 \cos \frac{\pi}{2} + \sqrt{9 \cos^2 \frac{\pi}{2} + 55} = 0 + \sqrt{0 + 55} = \sqrt{55} = 7,42 \text{ m}$$

d) Como antes, eliminando las soluciones imposibles, tenemos:

i) $\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow OA = 3 \cos \frac{\pi}{6} + \sqrt{9 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 55} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 10,46$ m

ii) $\alpha = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow OA = 3 \cos \frac{5\pi}{6} + \sqrt{9 \cos^2 \frac{5\pi}{6} + 55} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 5,26$ m

iii) $\alpha = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow OA = 3 \cos \frac{7\pi}{6} + \sqrt{9 \cos^2 \frac{7\pi}{6} + 55} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 5,26$ m

iv) $\alpha = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow OA = 3 \cos \frac{11\pi}{6} + \sqrt{9 \cos^2 \frac{11\pi}{6} + 55} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 10,46$ m

153. a) Demuestra que en cualquier triángulo ABC, rectángulo en A, se verifica que: $\text{sen } 2\hat{B} = \text{sen } 2\hat{C}$

b) Demuestra que cualquier triángulo ABC que verifique la igualdad anterior es isósceles o rectángulo.

a) $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \Rightarrow \text{sen } 2\hat{B} = \text{sen}(180^\circ - 2\hat{C}) = \text{sen } 2\hat{C}$

b) $\text{sen } 2\hat{B} = \text{sen } 2\hat{C} \Rightarrow \begin{cases} 2\hat{B} = 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \text{Triángulo isósceles} \\ 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \text{Triángulo rectángulo} \end{cases}$

154. Prueba que si los ángulos de un triángulo verifican que $\cos \hat{A} + \cos \hat{B} = \sin \hat{C}$, entonces el triángulo es rectángulo. ¿Cuál es el ángulo recto?

$$\begin{aligned} \cos \hat{A} + \cos \hat{B} = \sin \hat{C} &\Rightarrow 2 \cos \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = 2 \sin \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow 2 \cos \frac{180^\circ - \hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = 2 \sin \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cos \left(90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} \right) \cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = 2 \sin \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow 2 \sin \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = 2 \sin \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = \cos \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \text{Triángulo rectángulo en } A \\ \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = -\frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \text{Triángulo rectángulo en } B \end{cases} \end{aligned}$$

155. Enunciado Si \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} son los tres ángulos de un triángulo cualquiera, calcula el valor de la expresión:

$$\cotg \hat{A} \cotg \hat{B} + \cotg \hat{A} \cotg \hat{C} + \cotg \hat{B} \cotg \hat{C}$$

$$-\cotg \hat{C} = \cotg(180^\circ - \hat{C}) = \cotg(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{1}{\tg(\hat{A} + \hat{B})} = \frac{1 - \tg \hat{A} \tg \hat{B}}{\tg \hat{A} + \tg \hat{B}} = \frac{\cotg \hat{A} \cotg \hat{B} - 1}{\cotg \hat{A} + \cotg \hat{B}}$$

Por tanto, $\cotg \hat{A} \cotg \hat{B} - 1 = -\cotg \hat{A} \cotg \hat{C} - \cotg \hat{B} \cotg \hat{C}$ y la expresión vale 1.

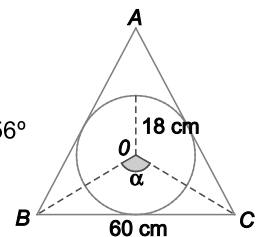
156. El radio de la circunferencia inscrita a un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo sabiendo que su base mide 60 cm.

$$OB = \sqrt{18^2 + 30^2} = 35 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo OBC tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{35^2 + 35^2 - 60^2}{2 \cdot 35 \cdot 35} = -0,4694 \Rightarrow \alpha = 118^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 2 \cdot 31^\circ = 62^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 2 \cdot 62^\circ = 56^\circ$$

$$\frac{AB}{\sen 62^\circ} = \frac{60}{\sen 56^\circ} \Rightarrow AB = AC = \frac{60 \sen 62^\circ}{\sen 56^\circ} = 63,9 \text{ cm}$$

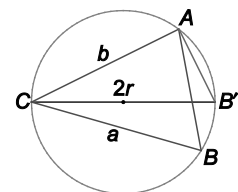


PARA PROFUNDIZAR

157. Para el triángulo de la figura y la circunferencia circunscrita a él demuestra la afirmación dada en cada caso.

a) Se cumple la relación: $r = \frac{a}{2 \sen \hat{A}} = \frac{b}{2 \sen \hat{B}} = \frac{c}{2 \sen \hat{C}}$ (Ten en cuenta la relación entre los ángulos \hat{B} y \hat{B}')

b) El área del triángulo se puede calcular como: $A = \frac{abc}{4r}$

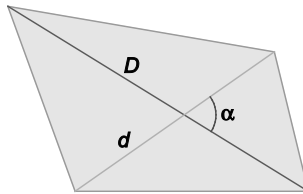


a) $\hat{B} = \hat{B}'$, ya que ambos son ángulos inscritos a la misma circunferencia y determinan el mismo arco.

$$\sen \hat{B} = \frac{b \sen \hat{A}}{a} \text{ y } \sen \hat{B}' = \frac{b}{2r} \Rightarrow \frac{b \sen \hat{A}}{a} = \frac{b}{2r} \Rightarrow r = \frac{a}{2 \sen \hat{A}} \Rightarrow r = \frac{a}{2 \sen \hat{A}} = \frac{b}{2 \sen \hat{B}} = \frac{c}{2 \sen \hat{C}}$$

b) $A = \frac{1}{2} ab \sen \hat{C} = \frac{1}{2} ab \frac{c}{2r} = \frac{abc}{4r}$

158. Observa la siguiente figura.

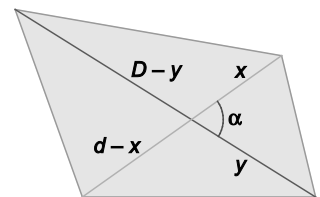


- a) Si las diagonales de un cuadrilátero miden d y D unidades lineales, respectivamente, y forman un ángulo α , demuestra que el área de dicho cuadrilátero puede calcularse con la fórmula: $A = \frac{1}{2}dD \operatorname{sen} \alpha$.
- b) Calcula el área de un cuadrilátero cuyas diagonales forman un ángulo de 80° si miden 4 y 5 cm, respectivamente.

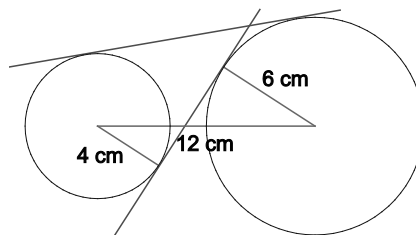
- a) El cuadrilátero se puede dividir en cuatro triángulos, como $\operatorname{sen} \alpha (180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ se puede escribir:

$$A = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha [xy + x(D-y) + y(d-x) + (D-y)(d-x)] = \frac{1}{2} dD \operatorname{sen} \alpha$$

- b) $A = \frac{1}{2} Dd \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} 4 \cdot 5 \operatorname{sen} 80^\circ = 9,85 \text{ cm}^2$



159. Considera las dos circunferencias coplanarias de la figura.



Calcula la inclinación sobre la recta que une los centros de:

- a) la tangente común exterior.

- b) la tangente común interior.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{6-4}{12} \Rightarrow \alpha = 9^\circ 35' 39''$

b) $\operatorname{sen} \beta = \frac{6+4}{12} \Rightarrow \beta = 56^\circ 26' 34''$