4 Ecuaciones y sistemas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ **b)** $x^2 + 9x + 14 = 0$ **c)** $7x + 2 = 30x^2$

a) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{-4} = \begin{cases} x = -3 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ **b)** $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -7 \end{cases}$ **c)** $30x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5} \\ x = -\dfrac{10}{60} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.

a) $3x^2 + 18x = 0$ **b)** $16x^2 - 25 = 0$ **c)** $-5x^2 + 7x = 0$

a) $x(3x+18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 18 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{18}{3} = -6 \end{cases}$

b) $x^2 = \dfrac{25}{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \pm\dfrac{5}{4} \Rightarrow x = \dfrac{5}{4} \quad x = -\dfrac{5}{4}$

c) $x(-5x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -5x + 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7}{5} \end{cases}$

5. Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $4x^2 + 4x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 18x + 80 = 0$ **d)** $(x+2)^2 + 2(x-1)^2 = 2x(x-4) - 10$

a) $\Delta = -15$ Ninguna **b)** $\Delta = 0$ Una **c)** $\Delta = 4$ Dos **d)** $\Delta = 0$ Una

6. Halla una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces sea -3 y el producto -28.

Se aplican las fórmulas de Cardano-Vieta:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -3 \Rightarrow b = 3a \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = -28 \Rightarrow c = -28a \end{array}\right\} \text{Si } a = 1 \Rightarrow b = 3 \text{ y } c = -28$$

Por tanto, una ecuación que cumple las condiciones es: $x^2 + 3x - 28 = 0$

7 y 8. Ejercicios resueltos.

9. Opera y resuelve las ecuaciones bicuadradas obtenidas.

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ **b)** $\dfrac{24}{x^2} = 3x^2 - 6$ **c)** $x\left((x+2)^2 - 4(x-1) - 2\right) = -\dfrac{5}{x}$

a) Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 - 20z + 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 16 \\ z = 4 \end{cases}$. Luego si $z = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ y si $z = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

b) $\dfrac{24}{x^2} = 3x^2 - 6 \Rightarrow 3x^4 - 6x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$. Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 - 2z - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = -2 \end{cases}$.

Luego $z = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ y si $z = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2}$ no tiene solución real

c) $x\left((x+2)^2 - 4(x-1) - 2\right) = -\dfrac{5}{x} \Rightarrow x^2\left[x^2 + 6\right] + 5 = 0 \Rightarrow x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 + 6z + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = -5 \end{cases}$. Por tanto, no hay soluciones reales.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones por factorización.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

b) $6x^4 + 13x^3 - 8x^2 - 17x + 6 = 0$

c) $x^4 - 5x^3 - 39x^2 + 265x - 350 = 0$

d) $8x^4 + 10x^3 - 17x^2 - 7x + 6 = 0$

a) $(x-1)^2(x-4) = 0$; $x = 1$ (doble) y $x = 4$

b) $(x-1)(x+2)(2x+3)(3x-1) = 0$; $x = 1$, $x = -2$, $x = \dfrac{-3}{2}$ y $x = \dfrac{1}{3}$

c) $(x-5)^2(x-2)(x+7) = 0$; $x = 5$ (doble), $x = 2$ y $x = -7$

d) $(x-1)(x+2)(2x-1)(4x+3) = 0$; $x = 1$, $x = -2$, $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{-3}{4}$

11. Ejercicio resuelto.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x + \dfrac{2}{x} = -3$ **b)** $\dfrac{11x + 11}{9} = 2x - \dfrac{12}{2-x} - 7$ **c)** $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{4}{x} = 3$ **d)** $\dfrac{6x+7}{x+3} = \dfrac{x}{x-1}$

a) $x^2 + 2 = -3x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x = -2,\ x = -1$

b) $(11x + 11)(2 - x) = 18x(2 - x) - 108 - 63(2 - x) \Rightarrow 7x^2 - 88x + 256 = 0 \Rightarrow x = 8,\ x = \dfrac{32}{7}$

c) $4x + 4(x+2) = 3x(x+2) \Rightarrow -3x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -\dfrac{4}{3}$

d) $(6x+7)(x-1) = x(x+3) \Rightarrow 5x^2 - 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = \dfrac{7}{5}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{2x}{3}+\frac{2x+3}{x-1}=\frac{7}{3x-3}$ **b)** $\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x+2}=\frac{6x^2}{x^2-4}$ **c)** $\frac{2}{x^2-1}+\frac{3x}{x-1}=\frac{x}{x+1}$ **d)** $\frac{x^3-8}{x-1}=\frac{24x+16}{x+2}$

a) $2x(x-1)+3(2x+3)=7 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1$

b) $2x(x+2)+3x(x-2)=6x^2 \Rightarrow -x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$, $x=-2$ (solución no válida)

c) $2+3x(x+1)=x(x-1) \Rightarrow 2x^2+4x+2=0=0 \Rightarrow x=-1$ (solución doble), pero la solución no es válida

d) $\left(x^3-8\right)(x+2)=(24x+16)(x-1) \Rightarrow x^2\left(x^2+2x-24\right)=0 \Rightarrow x=0$ (doble), $x=4$ $x=-6$

14 a 16. Ejercicios resueltos.

17. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+2}-x+4=0$ **c)** $\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=-5$ **e)** $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$

b) $x+\sqrt{10+x^2}=5$ **d)** $\sqrt{x+7}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+23}$ **f)** $x^2-\sqrt{3x^2-2}=4$

a) $\sqrt{x+2}=x-4 \Rightarrow \left(\sqrt{x+2}\right)^2=(x-4)^2 \Rightarrow x+2=x^2+16-8x \Rightarrow x^2-9x+14=0$.

Luego $x=7$ (sí es solución) y $x=2$ (no es solución).

b) $\left(\sqrt{10+x^2}\right)^2=(5-x)^2 \Rightarrow 10+x^2=x^2+25-10x \Rightarrow 10x=15$. Luego $x=\frac{3}{2}$ (sí es solución).

c) $\sqrt{x+1}=\sqrt{4x-3}-5 \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(\sqrt{4x-3}-5\right)^2 \Rightarrow x+1=4x-3+25-10\sqrt{4x-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10\sqrt{4x-3}=3x+21 \Rightarrow \left(10\sqrt{4x-3}\right)^2=(3x+21)^2 \Rightarrow 9x^2-274x+741=0$.

Luego $x=3$ (no es solución) y $x=\frac{247}{9}$ (sí es solución).

d) $\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{2x}\right)^2=\left(\sqrt{x+23}\right)^2 \Rightarrow x+7+2x+2\sqrt{2x^2+14x}=x+23 \Rightarrow 2\sqrt{2x^2+14x}=16-2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2+14x}=8-x \Rightarrow \left(\sqrt{2x^2+14x}\right)^2=(8-x)^2 \Rightarrow x^2+30x-64=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-32 \ \ \text{Solución falsa} \end{cases}$.

Luego $x=2$ (sí es solución) y $x=-32$ (no es solución).

e) $\sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1} \Rightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow x+4=25+x-1-10\sqrt{x-1} \Rightarrow 10\sqrt{x-1}=20 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x-1}=2 \Rightarrow x-1=4$.

Luego x= 5 (sí es solución).

f) $\left(x^2-4\right)^2=\left(\sqrt{3x^2-2}\right)^2 \Rightarrow x^4+16-8x^2=3x^2-2 \Rightarrow x^4-11x^2+18=0$.

Luego $x=-3$ (sí es solución), $x=3$ (sí es solución), $x=-\sqrt{2}$ (no es solución) y $x=\sqrt{2}$ (no es solución).

18. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales.

a) $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x}=2$ **b)** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}=x-1$ **c)** $\dfrac{x}{\sqrt{x}}=x-2$ **d)** $\sqrt{3\sqrt{16-x}}=\sqrt{2x-5}$

a) $\left(\sqrt{2x+7}\right)^2=\left(\sqrt{x}+2\right)^2 \Rightarrow 2x+7=x+4+4\sqrt{x} \Rightarrow (x+3)^2=\left(4\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2-10x+9=0$

Luego $x=9$, $x=1$ (sí son soluciones)

b) $\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^2=(x-1)^2 \Rightarrow \dfrac{x^2-2x+1}{x}=x^2-2x+1 \Rightarrow -x^3+3x^2-3x+1=0 \Rightarrow -(x-1)^3=0 \Rightarrow x=1$ (sí es solución)

c) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)^2=(x-2)^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x}=x^2+4-4x \Rightarrow x^2-5x+4=0$. Luego $x=4$ (sí es solución), $x=1$ (no es solución)

d) $\left(\sqrt{3\sqrt{16-x}}\right)^2=\left(\sqrt{2x-5}\right)^2 \Rightarrow 3\sqrt{16-x}=2x-5 \Rightarrow \left(3\sqrt{16-x}\right)^2=(2x-5)^2 \Rightarrow 9(16-x)=4x^2-20x+25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-11x-119 \Rightarrow x=-\dfrac{17}{4}$ (no es solución), $x=7$ (sí es solución)

19 a 22. Ejercicios resueltos.

23. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log 3x=\log 6+2\log x$

b) $\log(2x+3)-\log(x-2)=\log 36$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log(2x-x^2)+1$

a) $3x=6x^2 \Rightarrow x(6x-3)=0$. Luego $x=0$ (no es solución) y $x=\dfrac{1}{2}$ (sí es solución)

b) $\log\dfrac{2x+3}{x-2}=\log 36 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x-2}=36 \Rightarrow 2x+3=36x-72 \Rightarrow x=\dfrac{75}{34}$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log\left(2x-x^2\right)+1 \Rightarrow \log\left[(4-5x)(2x-2)\right]=\log\left[10\left(2x-x^2\right)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x-8-10x^2+10x=20x-10x^2 \Rightarrow -2x=8 \Rightarrow x=-4$ (no es solución). La ecuación no tiene solución.

24. Halla un número tal que si se añade a su logaritmo decimal el valor del logaritmo decimal de 2, el resultado es la unidad.

Número desconocido: x.

Por tanto, $\log x+\log 2=1 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$

25. Calcula el valor de un número si el doble de su logaritmo decimal es igual a la suma de los logaritmos decimales de 4 y de 9.

Número desconocido: x

$2\log x=\log 4+\log 9 \Rightarrow \log x^2=\log 36 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=6, x=-6$. El valor es $x=6$, la solución $x=-6$ no es válida.

26 a 28. Ejercicios resueltos.

29. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $4^{2x}=16$ **b)** $7^{x-3}=49$ **c)** $\frac{1}{2^x}=16^{\frac{x(x-1)}{2}}$ **d)** $4^{\frac{2x-3}{5}}=64$

a) $4^{2x}=16\Rightarrow 4^{2x}=4^2\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$

b) $7^{x-3}=49\Rightarrow 7^{x-3}=7^2\Rightarrow x-3=2\Rightarrow x=5$

c) $\frac{1}{2^x}=16^{\frac{x(x-1)}{2}}\Rightarrow 2^{-x}=2^{4\cdot\frac{x(x-1)}{2}}\Rightarrow -x=2x(x-1)\Rightarrow 2x^2-x=0\Rightarrow x(2x-1)=0\Rightarrow x=0, x=\frac{1}{2}$

d) $4^{\frac{2x-3}{5}}=64\Rightarrow 4^{\frac{2x-3}{5}}=4^3\Rightarrow \frac{2x-3}{5}=3\Rightarrow 2x-3=15\Rightarrow x=9$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$

b) $2^{x+4}-8^x=0$

c) $5^{2x}-30\cdot 5^x+125=0$

d) $2\cdot 10^{2x+4}+3\cdot 10^{x+2}-5=0$

a) $\frac{1}{2}\cdot 2^x+2^x+2\cdot 2^x=7\Rightarrow \frac{7}{2}\cdot 2^x=7\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1$

b) $2^{x+4}=\left(2^3\right)^x=2^{3x}\Rightarrow x+4=3x\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$

c) $\left(5^x\right)^2-30\cdot 5^x+125=0\Rightarrow 5^x=\frac{30\pm 20}{2}\Rightarrow\begin{cases}5^x=25\Rightarrow x=2\\5^x=5\Rightarrow x=1\end{cases}$

d) $2\cdot 10^{2x+4}+3\cdot 10^{x+2}-5=0\Rightarrow 20\,000\left(10^x\right)^2+300\cdot 10^x-5=0\Rightarrow 20\,000\,z^2+300z-5=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 4000z^2+60z-1=0\Rightarrow z=\frac{-60\pm 140}{8000}\Rightarrow z=10^{-2}, z=-0{,}025$. Deshaciendo el cambio $x=-2$, $10^x=-0{,}025$ (sin solución real).

31. Ejercicio interactivo.

32. Ejercicio resuelto.

33. Di si los siguientes sistemas son lineales o no lineales e identifica las incógnitas, coeficientes y términos independientes.

a) $\begin{cases}2x+xy=3\\x+3y=4\\2x+5y=6\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x+y=1\\y+z=2\\x+2z=0\end{cases}$

		Incógnitas	Primera ecuación		Segunda ecuación		Tercera ecuación	
			Coeficientes	Término independiente	Coeficientes	Término independiente	Coeficientes	Término independiente
a)	No lineal	*x,y*	2 (en *x*) 1 (en *xy*)	3	1 (en *x*) 3 (en *y*)	4	2 (en *x*) 5 (en *y*)	6
b)	Lineal	*x, y, z*	1,1 y 0	1	0, 1 y 1	2	1, 0 y 2	0

34. Indica si los pares de valores dados son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \mathbf{9x + 10y = 13} \\ \mathbf{-x + 4y = -4} \end{cases}$.

a) $x = -3,\ y = 4$ **b)** $x = 2,\ y = -\dfrac{1}{2}$

a) $\begin{cases} 9(-3) + 10 \cdot 4 = -27 + 40 = 13 \\ -(-3) + 4 \cdot 4 = 3 + 16 = 19 \neq -4 \end{cases} \Rightarrow$ No es solución.

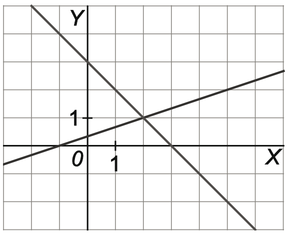
b) $\begin{cases} 9 \cdot 2 + 10\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 18 - 5 = 13 \\ -2 + 4\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$ Sí es solución.

35 a 39. Ejercicios resueltos.

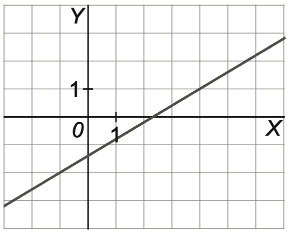
40. Resuelve gráficamente y por algún método algebraico.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 5y = -10 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3(4 - y) = 6 \\ 3(2x - 9) - 5y = -1 \end{cases}$

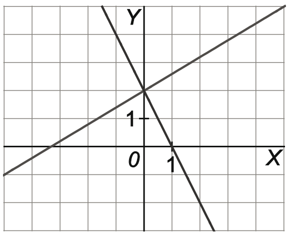
a) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 1, x = 2$



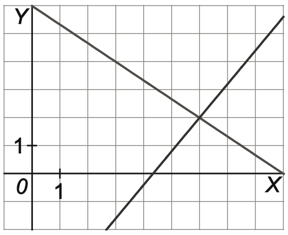
c) $\begin{cases} 6x - 10y = 14 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$, Infinitas soluciones.



b) $\begin{cases} 3x - 5y = -10 \\ 10x + 5y = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 2$



d) $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 6x - 5y = 26 \end{cases} \Rightarrow x = 6, y = 2$



41. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + 3y^2 = 22 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 32 \\ -3x^2 + 4y^2 = -48 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 8 - 2x \\ 2x + 3(8 - 2x)^2 = 22 \end{cases} \Rightarrow 2x + 192 + 12x^2 - 96x = 22 \Rightarrow 12x^2 - 94x + 170 = 0$. Soluciones: $\begin{cases} x = 5, y = -2 \\ x = \dfrac{17}{6}, y = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

b) $\begin{matrix} 3E_1 \\ 2E_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 9y^2 = 96 \\ -6x^2 + 8y^2 = -96 \end{cases} \Rightarrow 17y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$. Soluciones: $\begin{cases} y = 0, x = 4 \\ y = 0, x = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ (4 - y)^2 + 2y^2 = 19 \Rightarrow 3y^2 - 8y + 16 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ 3y^2 - 8y - 3 = 0 \end{cases}$. Soluciones: $\begin{cases} y = 3,\ x = 1 \\ y = -\dfrac{1}{3},\ x = \dfrac{13}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = 13 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Soluciones: $\begin{cases} x = 2,\ y = 3 \\ x = -2,\ y = -3 \\ x = 3, y = 2 \\ x = -3, y = -2 \end{cases}$

42 a 44. Ejercicios resueltos.

45. Estudia y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x-y+z=5 \\ x-y+2z=3 \\ x+2y-7z=0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 2x+5y-2z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

a) $\begin{matrix} E_2-3E_1 \\ E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -11y+8z=-25 \end{cases} \; 9E_3-11E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -5z=-5 \end{cases} \Rightarrow z=1, y=3, x=-2$

b) $\begin{matrix} E_2-E_1 \\ 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=11 \\ -3y=-3 \\ y-z=3 \end{cases} \Rightarrow y=1, z=-2, x=4$

c) $\begin{matrix} 2E_2-3E_1 \\ E_3-E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ 4z=6 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{36}, x=\frac{25}{36}$

d) $\begin{matrix} 4E_2-5E_1 \\ E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -3y+2z=9 \end{cases} \; 3E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -15z=0 \end{cases} \Rightarrow z=0, y=-3, x=2$

e) $\begin{matrix} 5E_2-3E_1 \\ 5E_3-8E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ -11y+21z=-5 \end{cases}$ Sistema incompatible. No tiene solución.

f) $\begin{matrix} 2E_2-E_1 \\ 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+z=5 \\ -y+3z=1 \\ 5y-15z=-5 \end{cases} \; E_3+5E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+z=5 \\ -y+3z=1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow z=t, y=3t-1, x=t+2$

g) $\begin{matrix} 2E_2-E_1 \\ E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y+3z=2 \\ 2z=2 \end{cases} \Rightarrow z=1, y=-1, x=1$

h) $\begin{matrix} 3E_2-2E_1 \\ 3E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 17y-8z=-4 \\ 4y+2z=1 \end{cases} \; 17E_3-4E_2 \Rightarrow \begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 17y-8z=-4 \\ 66z=33 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{1}{2}, y=0, x=\frac{1}{2}$

46. Resuelve el siguiente sistema aplicando un cambio de variable que lo transforme en lineal.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=-7 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{5}{z}=-12 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z}=15 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable: $a=\dfrac{1}{x}$, $b=\dfrac{1}{y}$, $c=\dfrac{1}{z}$. Por tanto:

$$\begin{cases} a+2b-3c=-7 \\ 2a+3b-5c=-12 \\ 4a+4b-c=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2b-3c=-7 \\ -b+c=2 \\ -4b+11c=43 \end{cases} \Rightarrow E_3-4E_2 \Rightarrow \begin{cases} a+2b-3c=-7 \\ -b+c=2 \\ 7c=35 \end{cases} \Rightarrow c=5, b=3, a=2$$

Luego: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{1}{5}$

47. Calcula las edades de tres hermanos sabiendo que:

- **Las edades de los tres suman 44 años.**
- **La edad del hermano mediano es superior en medio año a la media aritmética de las edades de los otros dos hermanos.**
- **La suma de las edades de los dos hermanos menores supera en 10 años a la edad del mayor.**

x edad del hermano mayor en años, y edad del hermano mediano en años, z edad del hermano pequeño en años.

$$\begin{cases} x+y+z=44 \\ y=\dfrac{x+z}{2}+\dfrac{1}{2} \\ y+z=x+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=44 \\ x-2y+z=-1 \\ x-y-z=-10 \end{cases} \begin{matrix} E_2-E_1 \\ E_3+E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=44 \\ -3y=-45 \\ 2x=34 \end{cases} \Rightarrow x=17, y=15, z=12\ .$$

Por tanto, la edad del hermano mayor es 17 años, la del hermano mediano es 15 años y la del hermano pequeño 12 años.

48. Ejercicio interactivo.

49. La oferta y la demanda del mercado de un modelo de pantalones vaqueros, cuyo precio se encuentra entre 40 € y 60 €, en cierto momento vienen dadas por las expresiones:

$$\boldsymbol{f_o=0{,}5p^2-40p+1000} \qquad \boldsymbol{f_d=-10p+750}$$

a) Calcula el punto de equilibrio de este mercado.

b) Halla el número de vaqueros vendidos cuando se produce el equilibrio de mercado.

a) Igualando ambas expresiones: $0{,}5p^2-40p+1000=-10p+750 \Rightarrow p=10$ (no válida) $p=50$ .Luego el punto de equilibrio se alcanza con un precio de 50 €.

b) Para $p=50$, sustituimos en f_0 o en f_d y el número de vaqueros vendidos es de 250 unidades.

50. La tabla muestra la población española (en millones de personas) en diferentes años:

Año	2005	2011	2012	2013	2014
Población	43	46,2	46,1	46,1	46

Calcula la tasa de crecimiento exponencial de la población española para los periodos:

a) 2005 a 2014 **b)** 2011 a 2013 **c)** 2012 a 2013

a) $46 = 43 \cdot e^{(2014-2005)r} \Rightarrow e^{9r} = \frac{46}{43} \Rightarrow \ln\left(e^{9r}\right) = \ln\left(\frac{46}{43}\right) \Rightarrow 9r = \ln\left(\frac{46}{43}\right) \Rightarrow r = 0{,}0075 \Rightarrow r\ \% = 0{,}75\ \%.$

b) $46{,}1 = 46{,}2 \cdot e^{(2013-2011)r} \Rightarrow e^{2r} = \frac{46{,}1}{46{,}2} \Rightarrow \ln\left(e^{2r}\right) = \ln\left(\frac{46{,}1}{46{,}2}\right) \Rightarrow 2r = \ln\left(\frac{46{,}1}{46{,}2}\right) \Rightarrow r = -0{,}001 \Rightarrow r\ \% = -0{,}1\%.$

c) $46{,}1 = 46{,}1 \cdot e^{(2013-2012)r} \Rightarrow e^{r} = \frac{46{,}1}{46{,}1} \Rightarrow r = 0 \Rightarrow \%r = 0\ \%$

51 a 61. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Ecuaciones de primer y segundo grado

62. Halla mentalmente las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones.

a) $3x + 1 - 2x = 6x$ **b)** $x^2 + x + 1 = 3 - x + x^2$ **c)** $3x + 2 - x = 2x - 5$ **d)** $\frac{1}{2}x + 3{,}5 = 2{,}6 - x$

a) $x = \frac{1}{5}$ **b)** $x = 1$ **c)** Sin solución **d)** $x = -0{,}6$

63. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $2x - 2(3x - 1) + 4(2x - 5) - 10 = 8x$

b) $2x - \frac{3x-1}{3} = x + \frac{1}{3}$

c) $\frac{3x-1}{4} - 2x = \frac{2x - \frac{7}{4}}{2} - (3x-1)$

d) $\frac{x+10}{2} + \frac{2(x-2)}{5} = \frac{5x-15}{3}$

a) $2x - 6x + 2 + 8x - 20 - 10 = 8x$, luego $x = -7$

b) $6x - 3x + 1 = 3x + 1$, luego $0 = 0$. Se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $3x - 1 - 8x = 4x - \frac{7}{2} - 12x + 4 \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $15x + 150 + 12x - 24 = 50x - 150$, luego $x = 12$

64. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(x - 2)^2 + (x + 4)(x - 2) = 2 - 3(x + 1)$

b) $-2(x - 2)^2 + 3x + 8 = 0$

c) $\frac{x(x-1)}{15} + \frac{(x-6)^2}{5} + \frac{(x+2)^2}{3} = \frac{(3x-2)(3x-4)}{15}$

a) $x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x - 2x - 8 - 2 + 3x + 3 = 0 \rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$, de soluciones $x = 1$, $x = \frac{-3}{2}$

b) $-2x^2 + 8x - 8 + 3x + 8 = 0$; $-2x^2 + 11x = 0$, de soluciones $x = 0$ y $x = \frac{11}{2}$

c) $x^2 - x + 3(x^2 + 36 - 12x) + 5(x^2 + 4 + 4x) = 9x^2 - 12x - 6x + 8$; $x = -120$

65. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas.

a) $x^2 + 18x = 0$ **b)** $2x^2 - 9x = 0$ **c)** $-x^2 + 2x = 0$ **d)** $2x^2 - 8 = 0$

a) $x = 0$, $x = -18$ **b)** $x = 0$, $x = \frac{9}{2}$ **c)** $x = 0$, $x = 2$ **d)** $x = 2$, $x = -2$

66. Indica el número de soluciones reales de las siguientes ecuaciones sin resolverlas.

a) $x^2 - 3x + 12 = 0$ **b)** $-4x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{9} = 0$ **c)** $-3x^2 - x + 4 = 0$ **d)** $\frac{3}{2}x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{5}{2} = 0$

a) $\Delta = -39$. Ninguna solución real

c) $\Delta = 49$. Dos soluciones reales

b) $\Delta = 0$. Una solución real doble

d) $\Delta = \frac{151}{9}$. Dos soluciones reales

67. Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado que tenga las soluciones indicadas.

a) $x = 2$, $x = -3$ **b)** $x = 4$ (doble)

a) $(x - 2)(x + 3) = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

b) $(x - 4)^2 = 0 \rightarrow x^2 + 16 - 8x = 0$

68. Calcula, sin resolverlas, la suma y el producto de las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 + 3x = 18$ **b)** $x^2 - 2x - 2 = 0$ **c)** $x^2 + \frac{x}{6} = \frac{1}{3}$ **d)** $ax^2 + ax - 1 = 0$

a) Suma $-\frac{3}{3} = -1$, producto $-\frac{18}{3} = -6$

c) Suma $-\frac{1}{6}$, producto $-\frac{1}{3}$

b) Suma 2, producto -2

d) Suma $-\frac{a}{a} = -1$, producto $-\frac{1}{a}$

69. Halla una ecuación de segundo grado que tenga como raíces:

a) $x_1 = -2, x_2 = 3$ **c)** $x_1 = -2, x_2 = -2$ **e)** $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{4}$

b) $x_1 = -2, x_2 = -5$ **d)** $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -1$ **f)** $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 2$

a) $x^2 - x - 6 = 0$ **c)** $x^2 + 4x + 4 = 0$ **e)** $12x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$ **d)** $3x^2 + x - 2 = 0$ **f)** $x^2 + \left(-\sqrt{2} - 2\right)x + 2\sqrt{2} = 0$

70. Escribe una ecuación de segundo grado tal que sus soluciones sumen $\frac{3}{4}$ y el producto de las mismas sea 2.

Respuesta abierta: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{4} = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = 2 = \frac{c}{a} \end{cases} \rightarrow$ Si, por ejemplo $a = 1 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x + 2 = 0$

71. Escribe una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces valga 3 y su producto –18.

Respuesta abierta: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = -18 = \frac{c}{a} \end{cases} \rightarrow$ Si, por ejemplo $a = 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

Ecuaciones de grado superior a dos

72. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ **c)** $x^4 - 34x^2 - 72 = 0$ **e)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **g)** $2(x + 1)^4 - 8x^3 - 8(x + 3) + 8 = 0$

b) $x^4 - 125x^2 + 484 = 0$ **d)** $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$ **f)** $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

a) $x = 1, x = -1, x = 7, x = -7$

b) $x = 2, x = -2, x = 11, x = -11$

c) $x = 6, x = -6$

d) Sin soluciones reales

e) $x = 2, x = -2, x = 1, x = -1$

f) $x = \pm\dfrac{1}{2}$

g) $x = 1, x = -1$

73. Opera y encuentra las soluciones de la siguiente ecuación: $x^2 = \dfrac{10x^2}{x^2 + 36} + 3$

$x^4 + 36x^2 = 10x^2 + 3x^2 + 108$. Luego $x^4 + 23x^2 - 108 = 0$, cuyas soluciones son $x = 2, x = -2$

74. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas por factorización.

a) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$ **c)** $x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 + \dfrac{11}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x = 2$ **e)** $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

b) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0$ **d)** $x^6 + x^4 = 2x^5 + 2x^3$ **f)** $x^2(x + 1) = x\,(x + 1)$

a) $(x + 2)(x - 3)(x^2 + 1) = 0$, de soluciones $x = -2, x = 3$

b) $(x - 1)(6x^2 - x - 15) = 0$, de soluciones $x = 1$, $x = -\dfrac{3}{2}$ $x = \dfrac{5}{3}$

c) $(3x + 2)(x - 3)(x - 1)^2 = 0$, de soluciones $x = 1$ (doble), $x = 3$, $x = \dfrac{-2}{3}$

d) $x^3(x - 2)(x^2 + 1) = 0$; $x = 0$ (triple), $x = 2$

e) $(x - 1)^2(x + 1) = 0$; $x = 1$ (doble), $x = -1$

f) $(x + 1)x(x - 1) = 0$; $x = 0, x = -1, x = 1$

75. Resuelve las siguientes ecuaciones estudiando los valores que anulan cada factor.

a) $(x - 4)(x + 5) = 0$ **b)** $x(x^2 - x - 1) = 0$ **c)** c) $(2x + 1)(3x + 1)(x^2 + 1) = 0$ d) $(x^2 - a)\,(x^2 + 2x - 3) = 0$

a) $x = 4, x = -5$ **b)** $x = 0$, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ **c)** $x = \dfrac{-1}{2}$, $x = \dfrac{-1}{3}$ **d)** $x = \pm\sqrt{a}$ si $a \geq 0$, $x = 1, x = -3$

76. Escribe en cada caso una ecuación cuyas soluciones sean las indicadas.

a) 1 y 5 **b)** –2, –7, 2 y 7 **c)** $\dfrac{1}{2}$, –2 y $\dfrac{3}{4}$ **d)** a, b, $\dfrac{c}{4}$ y 0

a) $(x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $(x+2)(x+7)(x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x^4 - 53x^2 + 196 = 0$

c) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x+2)\left(x - \dfrac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{17}{8}x + \dfrac{3}{4} = 0$

d) $(x-a)(x-b)\left(x - \dfrac{c}{4}\right)x = 0$

77. Resuelve la ecuación $(x^3 - 2)^4 = 16$ aplicando el cambio de incógnita $z = x^3 - 2$.

$z^4 = 16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16} = \pm 2$. Si $z = 2$, entonces $x^3 = 2 + 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$ y si $z = -2$, entonces $x^3 = -2 + 2 \Rightarrow x = 0$

Ecuaciones racionales

78. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{9}{4}$

b) $\frac{1}{2x}+\frac{2}{3x}+\frac{3}{4x}=\frac{13}{36}$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-1$

d) $\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}=\frac{1300}{729}$

e) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^3}$

f) $-2232+\frac{1100}{1+r}+\frac{1200}{(1+r)^2}=0$

a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{9}{4}\Rightarrow 12(x+1)=9x^2\Rightarrow x=-\frac{2}{3},\ x=2$

b) $\frac{1}{2x}+\frac{2}{3x}+\frac{3}{4x}=\frac{13}{36}\Rightarrow\frac{23}{12x}=\frac{13}{36}\Rightarrow x=\frac{69}{13}$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-1\Rightarrow x^3+x^2+x+1=0\Rightarrow x=-1$

d) $\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}=\frac{1300}{729}\Rightarrow 729(r+2)=1300(r+1)^2\Rightarrow r=-\frac{79}{52},r=\frac{2}{25}$

e) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^3}\Rightarrow a^3(a+1)=a^2\Rightarrow a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

f) $-2232+\frac{1100}{1+r}+\frac{1200}{(1+r)^2}=0\Rightarrow 558r^2+841r-17=0\Rightarrow r=0{,}02,\ r=-1{,}527$

79. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x+3=-\frac{2}{x}$

b) $2x-\frac{12}{2-x}=7+\frac{11x+11}{9}$

c) $\frac{x+9}{x}-\frac{5+x}{x+2}=\frac{12x+12}{x^2+2x}$

d) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{9}{20}$

e) $\frac{x+1}{2x}=\frac{x^2-1}{x-1}$

f) $\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=3$

g) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x+12}{3x+3}$

h) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$

a) $x^2+3x+2=0\Rightarrow x=-1,x=-2$

b) $36x-18x^2-108=126-63x+22x+22-11x^2-11x\Rightarrow 7x^2-88x+256=0\Rightarrow x=8,x=\frac{32}{7}$

c) $x^2+11x+18-5x-x^2=12x+12\Rightarrow x=1$

d) $20x^2+80+80x-20x^2-20-40x=9x^2+27x+18\Rightarrow 9x^2-13x-42=0\Rightarrow x=3,x=\frac{-14}{9}$

e) $x^2-1=2x\left(x^2-1\right)\Rightarrow\left(x^2-1\right)(1-2x)=0\Rightarrow x=1,x=-1,x=\frac{1}{2}$

f) $4x+8+4x=3x^2+6x\Rightarrow 3x^2-2x-8=0\Rightarrow x=2,x=\frac{-4}{3}$

g) $3x^2+3x+3x+3=4x^2+12x-4x-12\Rightarrow x^2+2x-15=0\Rightarrow x=3,x=-5$

h) $x+a+x-a=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

80. Resuelve la siguiente ecuación aplicando el cambio de variable $z = x^2 - 3x$.

$$\frac{x^2-3x-1}{(x^2-3x)^2-1}=\frac{x^2-3x-2}{(x^2-3x)^2}$$

$$\frac{z-1}{z^2-1}=\frac{z-2}{z^2}\Rightarrow\frac{1}{z+1}=\frac{z-2}{z^2}\Rightarrow z^2=(z+1)(z-2)\Rightarrow z^2-z^2+2+z=0\Rightarrow z=-2\Rightarrow x=2, x=1$$

Ecuaciones con radicales

81. Halla mentalmente la solución de las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+1}=4$ **b)** $\sqrt{\frac{x}{4}}=9$ **c)** $\sqrt{3x+1}=7$ **d)** $\sqrt{x^4}=9$

a) $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=4^2\Rightarrow x+1=16\Rightarrow x=15$ (solución válida)

b) $\left(\sqrt{\frac{x}{4}}\right)^2=9^2\Rightarrow\frac{x}{4}=81\Rightarrow x=324$ (solución válida).

c) $\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=7^2\Rightarrow 3x+1=49\Rightarrow x=16$ (solución válida).

d) $x^2=9\Rightarrow x=\pm3$ (soluciones válidas).

82. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $2-3\sqrt{x}=-x$ **b)** $3x+\sqrt{2x-2}=2\sqrt{2x-2}+23$ **c)** $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$ **d)** $3\sqrt{3x-1}=2\sqrt{3(2x-1)}$

a) $\left(3\sqrt{x}\right)^2=(2+x)^2\Rightarrow 9x=4+x^2+4x\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow x=4,\ x=1$ (soluciones válidas).

b) $(3x-23)^2=\left(\sqrt{2x-2}\right)^2\Rightarrow 9x^2-140x+531=0\Rightarrow x=9$ (válida), $x=\frac{59}{9}$ (no válida).

c) $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(5-\sqrt{2x+3}\right)^2\Rightarrow x+1=25+2x+3-10\sqrt{2x+3}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(10\sqrt{2x+3}\right)^2=(x+27)^2\Rightarrow x^2-146x+429=0\Rightarrow x=3$ (válida), $x=143$ (no válida).

d) $\left(3\sqrt{3x-1}\right)^2=\left(2\sqrt{3(2x-1)}\right)^2\Rightarrow 27x-9=24x-12\Rightarrow x=-1$ (no válida).

83. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{2+\sqrt{x-4}}=\sqrt{12-x}$ **b)** $\frac{\sqrt{2x-1}}{4}=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}$ **c)** $4x-5+\sqrt{6x^2-24x+25}=0$ **d)** $\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

a) $\left(\sqrt{2+\sqrt{x-4}}\right)^2=\left(\sqrt{12-x}\right)^2\Rightarrow 2+\sqrt{x-4}=12-x\Rightarrow\left(\sqrt{x-4}\right)^2=(10-x)^2\Rightarrow x^2-21x+104=0\Rightarrow\begin{cases}x=8\text{ (válida)}\\x=13\text{ (no válida)}\end{cases}$

b) Quitando denominadores: $2x-1=12\Rightarrow x=\frac{13}{2}$ (válida)

c) $\left(-\sqrt{6x^2-24x+25}\right)^2=(4x-5)^2\Rightarrow 6x^2-24x+25=25+16x^2-40x\Rightarrow 10x^2-16x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\text{ (válida)}\\x=\frac{8}{5}\text{ (no válida)}\end{cases}$

d) $\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow 2\sqrt{x-x^2}=x-1\Rightarrow 4x-4x^2=x^2+1-2x\Rightarrow 5x^2-6x+1=0\Rightarrow x=1,\ x=\frac{1}{5}$ (no válidas)

84. Resuelve la ecuación $\sqrt{x}=\sqrt[4]{36+5x}$.

$\left(\sqrt{x}\right)^4=\left(\sqrt[4]{36+5x}\right)^4 \Rightarrow x^2=36+5x \Rightarrow x^2-36-5x=0 \Rightarrow x=-4$ (no válida), $x=9$ (válida)

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

85. *Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log x=\log 2-\log 4$

b) $2\log(2x-2)-\log(x-1)=1$

c) $\log\left(65-x^3\right)=3\log(5-x)$

d) $\log x=\log 6+2\log\dfrac{x}{3}$

e) $\log 10^{\sqrt{20x+320}}=10\sqrt{x}$

f) $3\log_x 2+\log_x 4=-5$

g) $\log\sqrt{7x+51}-1=\log 9-\log\sqrt{2x-67}$

a) $\log x=\log 2-\log 4 \Rightarrow \log x=\log 0,5 \Rightarrow x=0,5$ (solución válida).

b)

$2\log(2x-2)-\log(x-1)=1 \Rightarrow \log\dfrac{(2x-2)^2}{x-1}=\log 10 \Rightarrow \dfrac{(2x-2)^2}{x-1}=10 \Rightarrow \dfrac{4(x-1)^2}{x-1}=10 \Rightarrow 4(x-1)=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{7}{2}$ (solución válida)

c) $\log\left(65-x^3\right)=3\log(5-x) \Rightarrow \log\left(65-x^3\right)=\log(5-x)^3 \Rightarrow 65-x^3=(5-x)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 65-x^3=125-75x+15x^2-x^3 \Rightarrow 15x^2-75x+60=0 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=4, x=1$ (soluciones válidas).

d) $\log x=\log 6+2\log\dfrac{x}{3} \Rightarrow \log x=\log\left(6\left(\dfrac{x}{3}\right)^2\right) \Rightarrow x=\dfrac{6x^2}{9} \Rightarrow 6x^2=9x \Rightarrow 3x(2x-3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (solución válida), $x=0$ (solución no válida).

e) $\log 10^{\sqrt{20x+320}}=10\sqrt{x} \Rightarrow 10^{10\sqrt{x}}=10^{\sqrt{20x+320}} \Rightarrow 10\sqrt{x}=\sqrt{20x+320} \Rightarrow 100x=20x+320 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{320}{80}=4$ (solución válida)

f) $3\log_x 2+\log_x 4=-5 \Rightarrow \log_x(8\cdot 4)=-5 \Rightarrow x^{-5}=32=2^5=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (solución válida)

g) $\log\sqrt{7x+51}-1=\log 9-\log\sqrt{2x+67} \Rightarrow \log\dfrac{\sqrt{7x+51}}{10}=\log\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{7x+51}}{10}=\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 14x^2+571x+3417=8100 \Rightarrow 14x^2+571x-4683=0 \Rightarrow x=7$ (solución válida), $x=-\dfrac{669}{14}$ (solución falsa)

86. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144$

c) $2^x + 2^{x+1} = 24$

d) $9^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0$

e) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90$

f) $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111$

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2^{2(x^2+1)} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2x^2 + 2 = 5x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -\frac{1}{2}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144 \Rightarrow 4^{(x-2)^2} = 4^9 \Rightarrow (x-2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \Rightarrow x = 5 \\ x-2 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

c) $2^x + 2^{x+1} = 24 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

d) $9^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0 \Rightarrow \left(3^2\right)^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 + 5 \cdot 3^x - 24 = 0$

Si $z = 3^x \Rightarrow z^2 + 5z - 24 = 0 \Rightarrow z = 3,\ z = -8 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ z = -8 \Rightarrow 3^x = -8 \text{ (sin solución real)} \end{cases}$

e) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90 \Rightarrow 3^2 \cdot 3^x + \frac{9^x}{9} = 90 \Rightarrow 3^2 \cdot 3^x + \frac{\left(3^x\right)^2}{9} = 90$

Si $z = 3^x \Rightarrow 9z + \frac{z^2}{9} = 90 \Rightarrow z^2 + 81z - 810 = 0 \Rightarrow z = 9, z = -90 \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ z = -90 \Rightarrow 3^x = -90 \text{ (sin solución real)} \end{cases}$

f) $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 + \frac{\left(3^x\right)^2}{3} + \frac{3^x}{3} = 111$

Así,

$z = 3^x \Rightarrow z^2 + \frac{z^2}{3} + \frac{z}{3} = 111 \Rightarrow 4z^2 + z - 333 = 0 \Rightarrow z = 9,\ z = -\frac{37}{4} \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ z = -\frac{37}{4} \Rightarrow 3^x = -\frac{37}{4} \text{ (sin solución real)} \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones

87. Comprueba en cada caso si los valores indicados forman una solución de los sistemas dados.

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $x=2,\ y=1$

b) $\begin{cases} x-2y-6z=2 \\ x+y+z=0 \\ -2x+y+3z=-4 \end{cases}$ $x=2,\ y=1,\ z=1$

a) No, porque no verifica la 2.ª ecuación

b) No, porque no verifica la 1.ª ecuación.

88. Comprueba que todas las ternas de números reales $(t,\ t,\ 3t-4)$, siendo t cualquier número real, son soluciones del siguiente sistema.

$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ -x+y=0 \\ 3y-z=4 \end{cases}$$

$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ -x+y=0 \\ 3y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2t-3t+4=4 \\ -t+t=0 \\ 3t-3t+4=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=4 \\ 0=0 \\ 4=4 \end{cases}$ Al verificarse las tres ecuaciones, las ternas son solución.

89. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 5x+2y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-3y=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{1}{5}x-\dfrac{3}{4}y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{2}+3 \\ y=2x+10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(2x+y)-3(3x-2y)=-34 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+3(2x+y)=-1 \\ \dfrac{x}{2}+3y=14 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y+1}=-1 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 5x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=13 \\ -19y=57 \end{cases} \Rightarrow y=-3,\ x=2$ x = 2, y =–3

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-3y=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{1}{5}x-\dfrac{3}{4}y=\dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-9y=7 \\ 4x-15y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-9y=7 \\ -3y=2 \end{cases} \Rightarrow y=-\dfrac{2}{3},\ x=\dfrac{1}{2}$

c) $\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{2}+3 \\ y=2x+10 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+1}{2}+3=2x+10 \Rightarrow x=-\dfrac{13}{3},\ x=\dfrac{4}{3}$

d) $\begin{cases} 4x+2y-9x+6y=-34 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+8y=-34 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \Rightarrow 7x=14 \Rightarrow x=2,\ y=-3$

e) $\begin{cases} 8x+3y=-1 \\ x+6y=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+3y=-1 \\ x=28-6y \end{cases} \Rightarrow 8(28-6y)+3y=-1 \Rightarrow y=5,\ x=-2$

f) $a=\dfrac{1}{x}, b=\dfrac{1}{y+1} \Rightarrow \begin{cases} a-3b=-1 \\ 2a+b=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=2, y=1$

90. Resuelve y clasifica los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x - 6y = -6 \\ 2x^2 + y^2 = 76 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3xy - 2x^2 = -26 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ -2x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + \dfrac{y}{2} = 15 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 - 2(x-y)^2 = 36 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2y^2}{3} = -\dfrac{61}{24} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 6y - 6 \\ 2(6y-6)^2 + y^2 = 76 \end{cases} \Rightarrow 73y^2 - 144y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2, y = \dfrac{-2}{73}$

Luego $y = 2, x = 6$, $y = \dfrac{-2}{73}, x = -\dfrac{450}{73}$. Es un sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} -3x \cdot \dfrac{7+4x}{5} - 2x^2 = -26 \\ y = -\dfrac{7+4x}{5} \end{cases} \Rightarrow -22x^2 - 21x + 130 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -\dfrac{65}{22}$

Luego $x = 2, y = -3$, $x = -\dfrac{65}{22}, y = \dfrac{53}{55}$. Es un sistema compatible determinado.

c) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ -2x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 10y^2 = -4 \\ -6x^2 + 12y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 1$

Luego $x = 1, y = 1$, $x = 1, y = -1$, $x = -1, y = 1$, $x = -1, y = -1$. Es un sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} 6x + y = 30 \\ 2y + 3x = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 - 6x \\ 60 - 12x + 3x = 30x - 6x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 4,\ x = \dfrac{5}{2}$

Luego $x = 4, y = 6$, $x = \dfrac{1}{2},\ y = 15$.

e) $\begin{cases} -x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ x = \dfrac{30-2y}{3} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{900 + 4y^2 - 120y}{9} - 2y^2 + \dfrac{120y - 8y^2}{3} = 36 \Rightarrow y = 6, y = \dfrac{102}{23}$

Luego $y = 6, x = 6$, $y = \dfrac{102}{23}, x = \dfrac{162}{23}$. Es un sistema compatible determinado.

f) $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2y^2}{3} = -\dfrac{61}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16x^2 + 3y^2 = 8 \\ 12x^2 - 16y^2 = -61 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -48x^2 + 9y^2 = 24 \\ 48x^2 - 64y^2 = -244 \end{cases} \Rightarrow 55y^2 = 220 \Rightarrow y = \pm 2$.

Luego $y = 2,\ x = \dfrac{1}{2};\ y = 2,\ x = -\dfrac{1}{2};\ y = -2,\ x = \dfrac{1}{2};\ y = -2,\ x = -\dfrac{1}{2}$. Es un sistema compatible determinado.

91. Encuentra todas las soluciones de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \sqrt{x} - 3y = 2 \\ 4x - 2y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - \sqrt{y-1} = 2 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\sqrt{x^2-3} + y = \frac{7}{2} \\ 3x - y = \frac{9}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x - y = -5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{2y} = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{y}} = 0 \\ 2x + \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \sqrt{x} - 3y = 2 \\ 4x - 2y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9y^2 + 12y + 4 \\ x = \frac{1}{2}y + 4 \end{cases} \Rightarrow 9y^2 + \frac{23}{2}y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0,\ x = 4 \text{ (válida)} \\ y = -\frac{23}{18},\ x = \frac{121}{36} \text{ (no válida)} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - \sqrt{y-1} = 2 \\ x - 2y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = 4x^2 + 4 - 8x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x + 3 = 4x^2 + 4 - 8x \Rightarrow \begin{cases} x = 2,\ y = 5 \text{ (válida)} \\ x = \frac{1}{8},\ y = \frac{65}{16} \text{ (no válida)} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\sqrt{x^2-3} + y = \frac{7}{2} \\ 3x - y = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12 = \frac{49}{4} + y^2 - 7y \\ x = \frac{3}{2} + \frac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow 4\left(\frac{3}{2} + \frac{y}{3}\right)^2 - 12 = \frac{49}{4} + y^2 - 7y \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2},\ x = 2 \text{ (válida)} \\ y = \frac{183}{10},\ x = \frac{38}{5} \text{ (no válida)} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x - y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 + y - 10\sqrt{y} \\ x = y - 5 \end{cases} \Rightarrow y - 5 = 25 + y - 10\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y} = 3 \Rightarrow x = 4, y = 9$

e) $\begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{2y} = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{2(2x-4)} = 1 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 30x + 81 = 0 \Rightarrow x = 3, y = 2; x = 27, y = 50$ (no son válidas). El sistema no tiene solución.

f) $\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{y}} = 0 \\ 2x + \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{y} \\ \frac{2}{y} + \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1; x = \frac{1}{4}, y = 4$

92. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales indicando si son compatibles o incompatibles, y escribiendo todas sus soluciones.

a) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases}$

a) $\begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -10y+2z=-18 \end{cases} \quad E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -7y=-14 \end{cases}$ $\Rightarrow y=2,\ z=1,\ x=2$. C. determinado

b) $\begin{matrix} E_2-3E_1 \\ E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ -8y+10z=-14 \end{cases}$. Incompatible.

c) $\begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ y+2z=2 \end{cases} \quad E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$ $\Rightarrow z=t,\ y=2-2t,\ x=6t$. C. indeterminado

d) $\begin{matrix} E_2-5E_1 \\ E_3-6E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-5 \\ -11y+7z=36 \\ -11y+7z=35 \end{cases}$. Incompatible.

e) $\begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ -18y+18z=36 \end{cases} \quad E_3-2E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ 0=0 \end{cases}$ $z=t,\ y=t-2,\ x=-t$. C. indeterminado

f) $\begin{matrix} E_2-E_1 \\ E_3-2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ -3y+10z=-20 \end{cases} \quad 5E_3-3E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ 35z=-70 \end{cases}$ $\Rightarrow z=-2,\ y=0,\ x=2$. C. determinado

93. *Encuentra las soluciones enteras del siguiente sistema.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2+z^2=10} \\ \boldsymbol{y^2+z^2=13} \\ \boldsymbol{x^2+2y-6z=-13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=13 \\ x^2+2y-6z=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=10-z^2 \\ y^2=-z^2+13 \\ 10-z^2+2y-6z=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=13-z^2 \\ y=\dfrac{z^2+6z-23}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{z^2+6z-23}{2}\right)^2=13-z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^4+12z^3-6z^2-276z+477=0 \Rightarrow (z-3)(z^3+15z^2+39z-159)=0$$

La única solución entera del polinomio es $z=3$, y con ella: $z=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{13-3^2}=\pm 2$; $x=\pm\sqrt{10-3^2}=\pm 1$

Las soluciones son las ternas: $x=1,\ y=2,\ z=3$; $x=-1,\ y=2,\ z=3$, ya que las ternas formadas con el valor $y=-2$ no son válidas al no verificarse la tercera ecuación.

94. Resuelve los sistemas.

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5 \cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15 \cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3 \cdot 5^{x+1} + 2 \cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases}$

j) $\begin{cases} -3x + y = 70 \\ \log y - \log x^2 = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases} \Rightarrow 2^x = A, 3^y = B \Rightarrow \begin{cases} A + B = 11 \\ A^2 + B^2 = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \;\; B = 9 \Rightarrow x = 1 \;\; y = 2 \\ A = 9 \;\; B = 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log 9}{\log 2} \;\; y = \dfrac{\log 2}{\log 3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5 \cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases} \Rightarrow 2^x = A, 3^y = B \Rightarrow \begin{cases} A + 6B = 8 \\ \dfrac{5}{2}A + B^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \;\; B = 1 \Rightarrow x = 1 \;\; y = 0 \\ A = -76 \;\; B = 14 \text{ Sin solución real} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15 \cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3 \cdot 5^{x+1} + 2 \cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$. Si $A = 5^x, B = 6^y \Rightarrow \begin{cases} 15A - 6B = 339 \\ 15A + 72B = 807 \end{cases} \Rightarrow A = 25, B = 6 \Rightarrow x = 2, y = 1$

d) $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x = 3y - 1 \end{cases} \Rightarrow 3^{3y-1} + 3^{y+1} = 18$. Si $z = 3^y \Rightarrow \dfrac{1}{3}z^3 + 3z = 18 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow y = 1, x = 2$

e) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \log \dfrac{x}{y} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{33 - y}{y} = 10 \Rightarrow 33 - 11y = 0 \Rightarrow y = 3, \; x = 30$

f) $\begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = 100 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow 100y^2 + y^2 = 29 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{29}{101}} \Rightarrow x = \pm 10\sqrt{\dfrac{29}{101}}, y = \pm\sqrt{\dfrac{29}{101}}$

g) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ \dfrac{100y}{x} = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10}{x} \\ \dfrac{1000}{x^2} = 250 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 5$

h) $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 (y+2)^3 = 100 \\ (x-2)^4 (y+2)^5 = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow y = 10^5 - 2, x = 10^{-\frac{13}{2}} + 2$

i) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ 2^{x-24} = 2^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10y \\ x = 2y + 24 \end{cases} \Rightarrow x = 30, y = 3$

j) $\begin{cases} -3x + y = 70 \\ \log y - \log x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 70 + 3x \\ \dfrac{y}{x^2} = 10 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{14}{5}, y = \dfrac{392}{5}; x = -\dfrac{5}{2}, y = \dfrac{125}{2}$

95. Calcula el valor de *k* para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones. Para ese valor, escribe dichas soluciones.

$$\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=k \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss: $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ y+2z=k-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ 0z=k-18 \end{cases}$

Para $k=18$, se obtiene la ecuación $0 \cdot z=0$, que se verifica para cualquier valor de z.

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por las fórmulas: $\begin{cases} x=4+2\lambda-2(2-2\lambda)=6\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

96. Calcula los valores de *k* para que el siguiente sistema sea incompatible: $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=k \end{cases}$ **.**

Aplicando el método de Gauss: $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ -8y+10z=k-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ 0z=k-13 \end{cases}$

Cuando $k\neq 13$, la última ecuación no tiene sentido y, por tanto, el sistema no tiene solución.

97. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ 2x-2y-z+w=5 \\ 3x+y-2z-4w=16 \\ 3x-3z-3w=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ -8y+4z-10w=-20 \\ -9y+3z-9w=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ z-7w=-1 \\ -3z-45w=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ z-7w=-1 \\ -66w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w=0 \\ z=-1 \\ y=2 \\ x=4 \end{cases}$$

98. Dado el sistema lineal de ecuaciones dependientes del parámetro real *a*: $\begin{cases} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

a) Discute el sistema para los distintos valores de *a*. **b)** Resuelve el sistema para a = 3 y a = 1.

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+ay+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+az=2 \\ (a-1)y=0 \end{cases}$

Si $a=1$, la tercera ecuación es $0=0$, luego es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Si $a=0$, el sistema es incompatible. Si $a\neq 1$ y $a\neq 0$, el sistema es compatible determinado con una única solución.

b) Si $a=3$, entonces la solución es: $y=0$, $z=\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{3}$

Si $a=1$, entonces la solución es: $y=\lambda$, $z=2-2\lambda$, $x=1-\lambda-2+2\lambda=-1+\lambda$

Síntesis

99. Escribe una ecuación de segundo grado tal que una de sus raíces sea igual al doble de la otra.

Respuesta abierta, por ejemplo: Raíces: 2, 1. Ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

100. Escribe una ecuación de segundo grado tal que sus dos raíces sean inversas y su suma valga $\frac{10}{3}$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{10}{3} = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = 1 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow$ Si $a = 1 \Rightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$

101. Escribe una ecuación de tercer grado tal que tenga como soluciones $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $(x+2)(x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

102. Escribe una ecuación bicuadrada tal que sus únicas soluciones reales sean 1 y –1.

$(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0$

103. a) Calcula la suma y el producto de las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x + c = 0$.

b) Calcula el valor de c para que el producto de las soluciones de la ecuación anterior valga –18.

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3$, $x_1x_2 = \frac{c}{a} = c$

b) $x_1x_2 = \frac{c}{a} = c = -18$

104. Halla la expresión de un polinomio $P(x)$ de segundo grado tal que $P(0) = 2$, $P(1) = -1$ y $P(-1) = 1$.

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases} P(0) = c = 2 \\ P(1) = a + b + c = -1 \\ P(-1) = a - b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b = -3 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2,\ b = -1, c = 2$$

Luego: $P(x) = -2x^2 - x + 2$

105. Halla la expresión de un polinomio de tercer grado que verifique que: $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 2$, $P(-2) = -6$.

Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases} P(0) = d = 0 \\ P(1) = a + b + c + d = 0 \\ P(-1) = -a + b - c + d = 2 \\ P(x) = -8a + 4b - 2c + d = -6 \end{cases} E_2 + E_3 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 2b = 2 \\ -a + b - c + d = 2 \\ -8a + 4b - 2c + d = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 1 \\ a + c = -1 \\ 8a + 2c = 10 \end{cases} E_4 + 2E_3 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 1 \\ a = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

El polinomio buscado es $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$.

106. Encuentra la solución de la ecuación: $5\log x = 3\log x + 2\log 6$

$5\log x = 3\log x + 2\log 6 \Rightarrow x^5 = 36x^3 \Rightarrow x = 0, x = -6$ (soluciones no válidas), $x = 6$ (solución válida).

107. Resuelve la siguiente ecuación: $13^{x^2+2x} - \frac{1}{13} = 0$

$13^{x^2+2x} = 13^{-1} \Rightarrow x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

108. Resuelve el siguiente sistema por tres métodos.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 5x - y = 19 \end{cases}$$

La solución por cualquiera de los métodos es: $x = 3, y = -4$.

CUESTIONES

109. Demuestra que la ecuación $x^2 - ax - a^2 = 0$ tiene dos soluciones reales diferentes para cualquier valor de *a* no nulo.

$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2) = a^2 + 4a^2 = 5a^2 > 0$ para cualquier $a \neq 0$.

110. Escribe, en cada caso, una ecuación de segundo grado:

a) Que no tenga ninguna solución real.

b) Que tenga una única solución real doble.

c) Que la suma de las raíces sea 7 y el producto –60.

d) Que el producto de las raíces sea el doble que su suma.

a) $x^2 + 1 = 0$ **b)** $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 7x - 60 = 0$ **d)** $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

111. a) Compara las soluciones de la ecuación de segundo grado $3x^2 - 4x - 4 = 0$ con las de la ecuación $-4x^2 - 4x + 3 = 0$.

b) Demuestra que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + 2 = 0$ son inversas de las de la ecuación $2x^2 + bx + 1 = 0$.

c) Demuestra que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son inversas de las de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

a) Las soluciones de la primera son $x = 2$ y $x = -\frac{2}{3}$, y las de la segunda, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{3}{2}$. Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

b) Las soluciones de la primera son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{2}$, y las de la segunda, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{4}$, que son inversas porque $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8}}{2} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 8}}{4} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \frac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

De la misma forma: $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 8}}{2} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8}}{4} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \frac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

c) En efecto, son inversas porque $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4ac} = \frac{4ac}{4ac} = 1$.

Y de la misma forma con la otra pareja de soluciones.

112. a) Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tengan como única solución la (0,0).

b) Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones entre las que se encuentre la (0,0)

a) Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ **b)** Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$

113. a) Escribe una ecuación racional que no tenga ninguna solución.

b) Escribe una ecuación bicuadrada que no tenga ninguna solución.

c) Escribe una ecuación irracional que no tenga ninguna solución.

a) $\dfrac{x^2+1}{x+1} = 0$ **b)** $(x^2+1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **c)** $\sqrt{x} = -3$

PROBLEMAS

114. La suma de tres números pares consecutivos es 1242. ¿Cuáles son esos números?

Números: x, $x+2$, $x+4$

$x + x + 2 + x + 4 = 1242 \Rightarrow 3x = 1236 \Rightarrow x = 412$. Los números son: 412, 414 y 416.

115. Calcula dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 545.

Números: x, $x+1$

$x^2 + (x+1)^2 = 545 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 544 = 0 \Rightarrow x = -17$ (solución no válida), $x = 16$ (solución válida).

Los dos números son: 16 y 17.

116. Un triángulo rectángulo está formado por tres lados cuyas longitudes son números consecutivos. ¿Cuánto miden los lados de dicho triángulo?

Lados: x, $x+1$, $x+2$

$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ (solución no válida), $x = 3$ (solución válida).

Las longitudes de los lados son: 3, 4 y 5.

117. La suma de los cuadrados de dos números naturales impares consecutivos es 1570. Calcula el valor del siguiente impar.

Números impares desconocidos: $2x+1$, $2x+3$. El siguiente impar es $2x+5$.

$(2x+1)^2 + (2x+3)^2 = 1570$. Luego $x = 13$, $x = -15$ (solución no válida). El siguiente impar es $2 \cdot 13 + 5 = 31$.

118. Al dividir dos números que suman 147 se obtiene 5 de cociente y 9 de resto. ¿Cuáles son esos números?

Los números son x e y. Suponemos que x es mayor que y.

$\begin{cases} x + y = 147 \\ x = 5y + 9 \end{cases}$ cuyas soluciones son $x = 124$ e $y = 23$. Los números son: 124 y 23.

119. Dos capitales iguales se colocan al 3% y al 4%, respectivamente, durante un año. El segundo capital produce 12,50 euros más de intereses que el primero. ¿A cuánto ascendían los capitales iniciales iguales?

Sea C el capital: $0,04C - 0,03C = 12,5 \Rightarrow C = 1250$ €.

120. Un padre tiene cuatro veces la edad de su hija. Dentro de cinco años sólo tendrá tres veces la edad de ella. ¿Cuáles son las edades actuales del padre y la hija?

	E. Actual	E. dentro de 5 años
Hija	x	$x+5$
Padre	$4x$	$4x+5$

$4x + 5 = 3(x+5) \Rightarrow x = 10$

Edad actual del padre 40 años, edad actual de la hija 10 años.

121. Hace tres años, las edades de dos personas estaban en la proporción 6 : 1, y dentro de seis años estarán en la proporción 3 : 1. ¿Cuáles son las edades que tienen ahora ambas personas?

	Hace tres años	Actual	Dentro de seis años
Persona A	$6x$	$6x+3$	$6x+9$
Persona B	x	$x+3$	$x+9$

$6x + 9 = 3(x+9) \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

Actualmente, las edades son de 39 y 9 años respectivamente.

122. Ernesto ha comprado un ordenador de sobremesa por valor de 400 €. A la hora de pagar, ha utilizado 32 billetes, unos de 20 € y otros de 5 € ¿Cuántos billetes de cada cantidad ha entregado?

Llamamos: x= número de billetes de 20 €, y= número de billetes de 5 €.

$\begin{cases} x + y = 32 \\ 20x + 5y = 400 \end{cases}$ La solución del sistema es: x= 16 e y= 16.

Ha entregado 16 billetes de 20 € y 16 billetes de 5 €.

123. Halla una fracción tal que se cumpla que si al numerador y al denominador se les suma una unidad, la fracción equivale a $\frac{1}{3}$, y si se les restan 3 unidades, equivale a $\frac{1}{5}$.

Llamamos x al numerador e y al denominador.

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x-3}{y-3} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3 = y + 1 \\ 5x - 15 = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 5x - y = 12 \end{cases} \Rightarrow x = 7, y = 23$$

La fracción es $\frac{7}{23}$.

124. Un almacenista trabaja con tres tipos de televisores. Por cada uno de los televisores del primer tipo, de gama baja, paga 350 €; por los del segundo, de gama media, 650 € y, finalmente, por los del tercero, de gama alta, 1150 €.

Un pedido de 240 unidades tiene un importe de 160 000 €. Determina el número de televisores pedidos sabiendo que el número de televisores del segundo tipo es el doble que los del primer y tercer tipo juntos.

Llamamos: x, y, z al número de televisores de gama baja, media y alta, respectivamente.

$\begin{cases} x + y + z = 240 \\ 350x + 650y + 1150z = 160000 \\ y = 2(x+z) \end{cases} \Rightarrow x = 45, y = 160, z = 35$. Luego se han pedido 45 televisores de gama baja, 160 televisores de gama media y 35 televisores de gama alta.

125. Un ciclista realiza un trayecto a la velocidad de 12 km/h. En cierto momento se le pincha una rueda, por lo que debe regresar andando a una velocidad de 4 km/h. Calcula a qué distancia del punto de partida se le pinchó la rueda, sabiendo que el tiempo total que invirtió entre la ida y la vuelta fue de dos horas y media.

Sea x la distancia en kilómetros desde el punto de salida hasta el lugar donde pinchó.

Tiempo invertido en la ida: $\frac{x}{12}$. Tiempo invertido en la vuelta: $\frac{x}{4}$.

$\frac{x}{12}+\frac{x}{4}=2,5 \Rightarrow \frac{4x}{12}=2,5 \Rightarrow x=7,5$ km. Se le pinchó la rueda a 7, 5 km del punto de partida.

126. Una fábrica de perfumes dispone de 600 L de un producto *A* y de 400 L de un producto *B.* Mezclando ambos productos se obtienen esencias diferentes.

Se quieren preparar dos clases de perfume, la primera, más barata, debe llevar tres partes de *A* y una de *B*, y la segunda clase, de mayor calidad, debe llevar los productos A y B al 50 % .

a) ¿Cuántos litros de cada clase de perfume se podrán preparar?

b) ¿Qué ingresos totales se obtendrán por la venta de la totalidad de los productos fabricados?

En el dibujo del enunciado se observa que el perfume más barato se vende a 50 €/L y el otro a 60 €/L.

a) Sean x= litros que se prepararán de la primera clase, y= litros que se prepararán de la segunda.

$\begin{cases} \frac{3x}{4}+\frac{y}{2}=600 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=400 \end{cases} \Rightarrow x=400,\ y=600$. Se podrán preparar 400 litros de la primera clase de perfume y 600 litros de la segunda clase de perfume.

b) Se obtendrá un ingreso total de $400 \cdot 50 + 600 \cdot 60 = 56\,000$ €.

127. Se quiere construir un marco rectangular para adornar una fotografía. Para ello se dispone de un listón de madera de 50 cm de longitud.

a) Escribe la expresión algebraica que relaciona el área encerrada por el marco con la longitud de uno de sus lados.

b) Determina las dimensiones del marco si se quiere que el área sea de 156 cm^2.

a) Sean a y $25-a$ las medidas de los dos lados del rectángulo. Área: $S=25a-a^2$.

b) $25a-a^2=156$, de soluciones $a=13$, $a=12$.Luego las dimensiones serán 12 y 13 cm.

128. En un hotel turístico tienen un total de 36 habitaciones con 60 camas. Sólo existen habitaciones individuales y dobles. Calcula el número de habitaciones de cada tipo que hay.

Sea x el número de habitaciones individuales e y el de dobles.

$\begin{cases} x+y=36 \\ x+2y=60 \end{cases} \Rightarrow x=12, y=24$. Hay 12 habitaciones individuales y 24 habitaciones dobles.

129. Un joyero compra dos anillos de oro por un total de 825 € y los vende por 863,75 € Calcula cuánto pagó por cada anillo si en la venta del primero ganó un 15% y en la del segundo perdió un 5%.

Sea x el precio en euros del primer anillo e y el precio en euros del segundo anillo.

$\begin{cases} x+y=825 \\ 1,15x+0,95y=863,75 \end{cases} \Rightarrow x=400, y=425$.Pagó por el primer anillo 400 € y 425 € por el segundo anillo.

130. En una tienda de regalos se adquiere un libro y una pulsera. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 35 €, pero el dependiente informa al cliente de que a los libros se les aplica una rebaja del 6 %, y a las pulseras, una rebaja del 12 %, por lo que en realidad debe pagar 31,40 €. ¿Qué precio marcaban el libro y la pulsera? ¿Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de estos dos productos?

Sea x el precio inicial del libro e y el de la pulsera.

$$\begin{cases} 0,94x + 0,88y = 31,4 \\ x + y = 35 \end{cases} \Rightarrow x = 10, y = 25 .$$

Los productos marcaban 10 € el libro y 25 € la pulsera. Finalmente, 9,40 € y 22 €,respectivamente.

131. Un coche sale de un punto *A* a una velocidad de 90 km/h. En el mismo instante, otro coche sale a su encuentro desde un punto *B* situado a 10 km detrás de *A* y a una velocidad de 115 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en darle alcance?

El primer coche recorre x km a una velocidad de 90 km/h. El segundo coche recorre x+10 km a 115 km/h.

El tiempo que están circulando es el mismo: $\frac{x}{90} = \frac{x+10}{115}$, luego x=36 km.

El tiempo que tarda en dar alcance el segundo coche al primero es $\frac{36}{90} = 0,4\,\text{h} = 24\,\text{min}$.

132. Un coche sale de *A* en dirección a *B* a una velocidad de 80 km/h. Tres minutos después, otro coche sale de *B* en dirección a *A* a una velocidad de 100 km/h. Calcula en qué punto se encontrarán los dos coches si *A* y *B* distan 22 km.

El primer coche está circulando durante $\frac{x}{80}$. El segundo coche está circulando durante $\frac{22-x}{100}$.

El segundo sale 3 minutos después: $\frac{x}{80} = \frac{22-x}{100} + \frac{3}{60} \Rightarrow x$= 12. Se encuentran a 12 km de *A*.

133. El área de un rectángulo es de 35 unidades cuadradas. Si se aumenta un lado en2 unidades y se disminuye el otro en 3 unidades, el área disminuye en 17 unidades cuadradas. Halla las dimensiones del rectángulo inicial.

Sean x, y las dimensiones iniciales.

$$\begin{cases} xy = 35 \\ (x+2)(y-3) = 35-17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 35 \\ -3x + 2y = -11 \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{-11+3x}{2}\right) = 35 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 70 = 0 \Rightarrow x = 7 \text{, (solución válida)}$$

$x = \frac{-10}{3}$ solución no válida. Si $x = 7$, entonces $y = 5$.Luego las dimensiones son 7 y 5 cm.

134. Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20% del total y Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas.

Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 CENT por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

Sea x el número de panfletos repartidos por Julia; y, los repartidos por Clara, y z, por Miguel.

$$\begin{cases} y = 0,20(x+y+z) \\ x + y = 850 \\ z = 100 + x \end{cases} \Rightarrow x = 550, y = 300, z = 650$$

El dinero que recibe cada uno es: Julia: 550 · 0,01 = 5,50 €; Clara, 300 · 0,01 = 3 €; Miguel, 650 · 0,01 = 6,50 €.

135. Un técnico informático espera obtener 360 € por la reparación de varios equipos. El técnico se da cuenta de que cuatro ordenadores no tienen posible reparación y, para obtener el mismo beneficio, aumenta en 4,50 € el precio que va a cobrar por un equipo reparado. ¿Cuántos ordenadores tenía al principio? ¿A qué precio cobrará finalmente cada reparación?

Sea $x$el número de ordenadores que, en principio, debe reparar. Por cada uno cobrará $\frac{360}{x}$ €.

$$\left(\frac{360}{x}+4,5\right)(x-4)=360 \Rightarrow 360-\frac{1440}{x}+4,5x-18=360 \Rightarrow 4,5x^2-18x-1440=0 \Rightarrow$$

$x=20$, $x=-16$ (solución no válida).

Al principio, tenía 20 ordenadores para reparar y cobraba $\frac{360}{20}=18$ € por cada reparación, ahora cobrará 22,50 €.

136. A primera hora de la mañana, en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10 €, 20 € y 50 €) con un valor total de 16 000 €. Sabiendo que por cada 3 billetes de 50 € son necesarios 4 billetes de 20 €:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber.

b) Resuélvelo por el método de Gauss.

Sea x el número de billetes de 10 €, y el de 20 € y z el de 50 €.

$$\begin{cases} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=16000 \\ 4z=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\quad y+\quad z=800 \\ \quad 3y-\quad 4z=0 \\ 10x+20y+50z=16\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+\quad z=800 \\ \quad 3y-\quad 4z=0 \\ \quad 10y+40z=8000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+\quad z=800 \\ \quad 3y-4z=0 \\ \quad 160z=24\,000 \end{cases}$$

Luego $z=150$, $y=200$, $x=450$. Se necesitan 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 50 €.

137. Un comercio tiene un total de 270 unidades de productos de tres tipos: *A*, *B* y *C*. Del tipo *A* tiene 30 unidades menos que de la totalidad de *B* más *C*, y del tipo *C* tiene el 35% de la suma de *A* más *B*. ¿Cuántos productos de cada tipo hay en el comercio?

$$\begin{cases} A+B+C=270 \\ A=B+C-30 \\ C=0,35(A+B) \end{cases} \Rightarrow A=120, B=80, C=70$$

Hay 120 productos del tipo A, 80 productos del tipo B y 70 productos del tipo C.

138. La oferta y la demanda del mercado de un conjunto de ropa para practicar judo en cierto momento vienen dadas por las expresiones:

$$\boldsymbol{f_0=0,45p^2-20p+500}$$

$$\boldsymbol{f_d=0,1p^2-18,5p+1000}$$

Siendo $30 \le p \le 50$, en euros, calcula el punto de equilibrio de este mercado.

$$\begin{cases} f_o=0,45p^2-20p+500 \\ f_d=0,1p^2-18,5p+1000 \end{cases} \Rightarrow 0,35p^2-1,5p-500=0 \Rightarrow p=40$$

El punto de equilibrio es 40 € y $f_o=f_d=420$.

139. La tabla muestra la oferta y la demanda del mercado de teléfonos móviles de cierto modelo para algunos valores del precio.

p	Unidades ofertadas	Unidades demandadas
150	725	1400
175	800	1100
200	1200	650

a) Calcula las expresiones de las funciones de oferta y demanda sabiendo que son polinomios de segundo grado con la indeterminada p variando entre 150 y 200 euros.

b) Calcula el punto de equilibrio del mercado.

a) Función de oferta: $f_o = ap^2 + bp + c$

$$\begin{cases} 150^2 a + 150b + c = 725 \\ 175^2 a + 175b + c = 800 \\ 200^2 a + 200b + c = 1200 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{13}{50}, b = -\frac{163}{2}, c = 7100 \Rightarrow f_o = \frac{13}{50}p^2 - \frac{163}{2}p + 7100$$

Función de demanda: $f_d = ap^2 + bp + c$

$$\begin{cases} 150^2 a + 150b + c = 1400 \\ 175^2 a + 175b + c = 1100 \\ 200^2 a + 200b + c = 650 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{25}, b = 27, c = 50 \Rightarrow f_d = -\frac{3}{25}p^2 + 27p + 50$$

b) Punto de equilibrio: $f_o = f_d \Rightarrow p = 100$ (solución no válida), $p = \dfrac{3525}{19} \simeq 186$ (solución válida). $f_o = f_d \simeq 929$

140. Una población pasa de 20 250 a 21 520 habitantes en los años 2010 y 2015. Utilizando el modelo de crecimiento exponencial de las poblaciones, calcula:

a) La tasa de crecimiento exponencial para ese periodo

b) La población que se estima para el año 2020 suponiendo que no varía la tasa de crecimiento

c) La población que había en 2003 considerando la tasa de crecimiento constante.

a) $21\,520 = 20\,250e^{(2015-2010)\cdot r} \Rightarrow e^{5r} = \dfrac{21\,520}{20\,250} \Rightarrow 5r = \ln\left(\dfrac{21\,520}{20\,250}\right) \Rightarrow r = 0{,}012 \Rightarrow r\ \% = 1{,}2\ \%$

b) $P_F = 20\,250e^{(2020-2010)\cdot 0{,}012} = 22\,832$ habitantes

c) $20\,250 = P_{2003}e^{(2010-2003)\cdot 0{,}012} \Rightarrow P_{2003} = \dfrac{20\,250}{e^{7\cdot 0{,}012}} = 18\,618$ habitantes

141. Calcula el tiempo necesario para que una población verifique las siguientes variaciones:

a) Que se doble, suponiendo que la tasa de crecimiento exponencial es del 1,25 %.

b) Que se triplique, suponiendo que la tasa de crecimiento exponencial es $r = 0{,}025$.

a) Utilizando la ecuación $P_f = P_i e^{rt}$ y suponiendo que $P_f = 2P_i$, se obtiene t:

$$2P_i = P_i e^{0{,}0125t} \Rightarrow e^{0{,}0125t} = 2 \Rightarrow \ln\left(e^{0{,}0125t}\right) = \ln 2 \Rightarrow 0{,}0125t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}0125} = 55{,}45$$

Han de pasar 55,45 años para doblar la población.

b) Utilizando la ecuación $P_f = P_i e^{rt}$ y suponiendo que $P_f = 3P_i$, se obtiene t:

$3P_i = P_i e^{0{,}025t} \Rightarrow e^{0{,}025t} = 3 \Rightarrow t = 43{,}94$. Han de pasar 43,94 años para triplicar la población.

142. Un campo de labranza cuya área es de 192 m^2 tiene forma rectangular y su perímetro mide 56 m.

a) Calcula las dimensiones de dicho campo de labranza. **b)** Calcula la medida de sus diagonales.

Sean x, y las dimensiones del campo de labranza.

$$\begin{cases} 2x+2y=56 \\ xy=192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=28 \\ y=\dfrac{192}{x} \end{cases} \Rightarrow x^2-28x+192 \Rightarrow x=12, x=16$$. Si $x=12 \Rightarrow y=16$, si $x=16 \Rightarrow y=12$

a) Las medidas son 12 m y 16 m. **b)** Las diagonales miden $\sqrt{12^2+16^2}=20$ m.

143. La siguiente tabla muestra la población en algunos países europeos (en millones de personas) en los años 2005 y 2013:

	Alemania	Francia	Italia	Portugal	Finlandia
2005	82,5	62,8	57,9	10,5	5,2
2013	80,5	65,6	59,7	10,5	5,4

a) Calcula la tasa de crecimiento exponencial de la población para todos estos países en el periodo de 2005 a 2013.

b) Ordena de mayor a menor estos países, según su crecimiento relativo de la población.

a) Utilizando la ecuación $P_f=P_ie^{rt}$ y despejando, en cada caso, el valor de t, se obtiene:

	Alemania	Francia	Italia	Portugal	Finlandia
TCE [2005 , 2013]	–0,0031	0,0055	0,0038	0,0000	0,0047

b) Francia – Finlandia – Italia – Portugal – Alemania

144. En una pequeña envasadora se han comprado 35 L de aceite de oliva virgen extra y aceite puro de oliva para realizar una mezcla. El precio por litro de aceite virgen extra es de 4 €, mientras que por el litro de aceite puro se han pagado 3,25 €.

a) ¿Cuántos litros de aceite de la segunda clase se tienen que tomar para que la mezcla tenga un precio de 3,50 € el litro si no se quiere obtener ningún beneficio?

b) Si se quiere obtener un beneficio del 10 %, ¿a cuánto deberá cobrarse el litro de la mezcla anterior?

a) Se mezcla 35 L de aceite virgen extra de 4 € el litro y x kg de aceite puro de 3,25 € el litro

Se obtiene $35+x$ litros de mezcla de aceites a 3,5 € el litro. Por tanto:

$$35\cdot 4+3,25x=(35+x)3,5 \Rightarrow 140+3,25x=122,5+3,5x \Rightarrow 0,25x=17,5 \Rightarrow x=\frac{17,5}{0,25}=70$$

Luego se deben tomar70 litros de aceite puros de oliva.

b) Para obtener un beneficio del 10 % se debe cobrar el litro de la mezcla a $1,1\cdot 3,5=3,85$ €

145. Se cuenta con un presupuesto de 7550 € para fabricar tres tipos de contenedores para reciclar basura. El volumen y peso máximo que pueden tener dichos contenedores para su almacenaje es de 43 m^3 y 3750 kg, respectivamente. La tabla siguiente muestra el volumen y peso de los contenedores de los tres tipos, así como su precio. Calcula cuántos de ellos se pueden fabricar de cada tipo si se quiere agotar el presupuesto y la capacidad de almacenaje.

	Volumen (m^3)	Peso (kg)	Precio (€)
TIPO I	1	100	250
TIPO II	2	175	300
TIPO III	1,5	125	275

Sean:x,y,z el número de contenedores de tipo I, de tipo II y de tipo III, respectivamente.

$$\begin{cases} x+2y+1,5z=43 \\ 100x+175y+125z=3750 \\ 250x+300y+275z=7550 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=10, z=12$$

Se deben fabricar 5 contenedores de tipo I, 10 de tipo II y 12 de tipo III

146. En una clase de primero de bachillerato hay tantos alumnos que estudian Tecnologías de la Información y Comunicación como alumnos que estudian Literatura Universal; sin embargo, el número de alumnos que estudian Francés como segunda lengua extranjera es inferior en una unidad al de los que estudian Tecnologías de la Información y la Comunicación. A partir de estos datos, calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas

Sean:

x: número de alumnos de Tecnologías de la Información y Comunicación

y: número de alumnos de Literatura Universal

z:número de alumnos de Francés

$$\begin{cases} x = y \\ z = x - 1 \\ x + y + z = 35 \end{cases} \Rightarrow x + x + x - 1 = 35 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12 \text{ Luego, } \quad y = 12 \;,\; z = 11 .$$

Por tanto 12 alumnos cursan Tecnologías de la Información y Comunicación y 12 alumnos cursan Literatura Universal y 11 alumnos cursan Francés.

147. Para construir una caja sin tapa se recortan cuatro cuadrados iguales en cada una de las esquinas de una cartulina de 30cm ×20 cm. Calcula el lado de los cuadrados para que el volumen de la caja sea de 832 cm^3.

Medidas de la caja: *x*, 30 – 2*x*, 20 – 2*x*. $V = x(30-2x)(20-2x) = 832 \Rightarrow x = 2$.Los cuadrados son de lado 2 cm.

148. Un ciclista realiza un recorrido de ida y vuelta de 70 km en total. El primer tramo del recorrido es de subida, luego hay uno de bajada y un tercero llano. Tarda 1 h 47 min 37 s al ir y 1 h 25 min al volver, haciendo el recorrido a la inversa. Si la velocidad de subida es de 10 km/h, la de bajada, 40 km/h y en llano avanza a 30 km/h. ¿Qué distancia tiene cada tramo del recorrido?

	Subida	Bajada	Llano
Ida	*x*	*y*	35 –*x*–*y*
Vuelta	*y*	*x*	35 –*x*–*y*

$$\begin{cases} 1{,}794 = \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{40} + \dfrac{35 - x - y}{30} \\ 1{,}417 = \dfrac{35 - x - y}{30} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{x}{40} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5269}{525}, y = \frac{526}{105}$$

Aproximadamente, el primer tramo tiene 10 km, el segundo tramo tiene 5 km y el tercer tramo 20 km.

149. Un globo que posee un pequeño motor realiza un viaje desde el punto *A* hasta el punto *B*, ida y vuelta. Gracias al motor, el globo adquiere una velocidad de 38 km/h. Supongamos, sin embargo, que el viento sopla de forma constante, y siempre en la dirección de *A* hacia *B*, y que, por tanto, la velocidad se modifica. La distancia que separa los puntos es de50 km.

a) Calcula la duración total del viaje en función de la velocidad con la que sopla el viento en la dirección indicada.

b) Calcula la velocidad del viento sabiendo que la duración total del viaje ha sido de 195 minutos.

Sea *x* la velocidad del viento en km/h.

a) Tiempo invertido en la ida: $T_1 = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \dfrac{50}{38 + x}$, y en la vuelta: $T_2 = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \dfrac{50}{38 - x}$.

$$T = \frac{50}{38 + x} + \frac{50}{38 - x} = \frac{3800}{1444 - x^2}.$$

Luego la duración total del viaje en función de la velocidad es: $\dfrac{3800}{1444 - x^2}$ horas.

b) Duración del viaje: 195 min = 3,25 h. Luego: $3{,}25 = \dfrac{3800}{1444 - x^2} \Rightarrow x = \sqrt{1444 - \dfrac{3800}{3{,}25}} \simeq 16{,}6$ km/h.

150. Dos ciclistas corren por un velódromo a velocidades constantes. Cuando corren en sentido opuesto se encuentran cada 10 s, mientras que cuando van en el mismo sentido, un ciclista alcanza a otro cada 170 s. Sabiendo que la pista tiene una longitud de 170 m, ¿cuál es la velocidad de cada ciclista?

Sea x la velocidad del primer ciclista e y la del segundo ciclista.

$$\begin{cases} 10(x+y)=170 \\ 170(x-y)=170 \end{cases} \Rightarrow x=9, y=8.$$

Luego las velocidades son de 9 m/s el primer ciclista y 8 m/s el segundo ciclista.

151. Las funciones de demanda y de oferta correspondientes al mercado del último juego de estrategia, en cierto momento, son:

$$f_d=-\frac{1}{20}p^2+\frac{1}{2}p+180 \qquad\qquad f_o=\frac{13}{120}p^2-12p+A$$

donde A es un parámetro desconocido y $40 \le p \le 100$ €.Calcula el valor de A para que el equilibrio del mercado se alcance para 100 unidades demandadas. En este caso, halla la cantidad ofertada y el precio.

$f_d=-\frac{1}{20}p^2+\frac{1}{2}p+180=100 \Rightarrow -\frac{1}{20}p^2+\frac{1}{2}p+80=0 \Rightarrow p=45{,}31$, única solución válida y precio del producto.

$$f_o=\frac{13}{120}p^2-12p+A \Rightarrow A=100-\frac{13}{120}\cdot 45{,}31^2+12\cdot 45{,}31=421{,}31.$$

152. Dada la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, cuyas soluciones son x_1 y x_2, calcula, en función de a, b y c, el valor de la suma de las inversas de sus raíces.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$$

ENTORNO MATEMÁTICO

A vueltas con la *pizza*

Miguel y Liliana tienen un pequeño restaurante italiano donde, además de las comidas que sirven en el local, sirven *pizzas*.

Miguel lleva la contabilidad de la empresa y observa que, de media, consigue vender 150 raciones de *pizzas* a un precio de 3 € cada ración.

Liliana acaba de terminar sus estudios de ciencias empresariales y, llena de energía y optimismo ha decidido aplicar sus conocimientos para intentar dar un nuevo impulso al negocio, ya que está convencida de que, pese al entusiasmo y buena voluntad que pone Miguel los resultados son manifiestamente mejorables.

Con gran minuciosidad realiza un estudio de mercado entre los vecinos del barrio y los barrios colindantes al suyo. Además observa a la competencia de la zona, y una vez segura de que nadie supera la calidad de sus *pizzas*, decide centrarse en el factor económico. Ha observado que por cada 15 CENT que se baje en el precio de la ración, la demanda de la misma aumenta en 30 unidades. Es decir, si baja el precio a 2,85 € la ración, conseguirá vender 180 raciones.

Liliana supone que la regla obtenida es cierta, al menos así lo dice la teoría, y se cumple siempre que el precio esté comprendido entre 1,50 € y 3 €.

a) Calcula el ingreso total que obtendrán Liliana y Miguel si no cambian los precios de las raciones.

b) Calcula el ingreso total que obtienen si venden cada ración a 2,70 €.

c) Si rebajan el precio a 0,15*x €,* calcula, en función de *x*, el ingreso total que obtienen.

d) Miguel ha calculado que para que les sea rentable el negocio, de la parte de la venta de pizzas deberían obtener unos ingresos de 702 € en total. ¿A qué precio deben vender las porciones?

a) $I = 150 \cdot 3 = 450$ €.

b) Si fijan el precio en 2,70 euros, venderán 150 + 2 · 30 = 210 raciones. Por tanto: $I = 210 \cdot 2{,}70 = 567$ €.

c) Si rebajan el precio 0,15x euros, se venderán 150 +30 *x* raciones. Por tanto:

$$I = (150 + 30x) \times (3 - 0{,}15x) = -4{,}5x^2 + 67{,}5x + 450 \text{ €}$$

d) $I = -4{,}5x^2 + 67{,}5x + 450 = 702 \Rightarrow 4{,}5x^2 - 67{,}5x + 252 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 7 \end{cases}$

Hay dos soluciones:

$x = 7$. Se venderán 150 + 7 · 30 = 360 raciones a 3 − 7 · 0,15 = 1,95 € la ración.

$x = 8$. Se venderán 150 + 8 ·v30 = 390 raciones a 3 − 8 · 0,15 = 1,80 € la ración.

Se deberá elegir la primera ya que los costes serían, evidentemente, inferiores.

Fabricando papel

Una fábrica de productos de papelería elabora tres tipos de cuadernos:

- **Tipo 1: Cuaderno de 100 folios de 80 gramos (80 gramos por metro cuadrado).**
- **Tipo 2: Cuaderno de 80 folios de 90 gramos.**
- **Tipo 3: Cuaderno de 120 folios de 100 gramos.**

Para su elaboración, cada cuaderno debe pasar por tres departamentos diferentes: departamento de tratamiento de la pasta de papel, departamento de encuadernación y departamento de supervisión del producto.

La tabla de la derecha muestra los minutos que debe estar cada tipo de cuaderno en cada uno de los departamentos así como el total de minutos diarios

con los que cuenta cada departamento para realizar su trabajo.

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	
Tratamiento	6	5	8	780 min
Encuadernación	5	4	6	610 min
Supervisión	1	1	2	170 min

a) Plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en el que las incógnitas sean el número de cuadernos de cada tipo que se pueden fabricar al día para agotar exactamente la disponibilidad de tiempo de los departamentos.

Con ayuda de un programa de cálculo:

b) Resuelve el anterior sistema e interpreta los resultados.

c) Sin variar las condiciones, ¿cuántos cuadernos de tipo 1 y tipo 2 se deberán fabricar si se quieren fabricar 35 cuadernos de tipo 3 y agotar la disponibilidad de tiempo?

d) Si la empresa decide aumentar en un 10 % el tiempo disponible de los departamentos de tratamiento y encuadernación y en un 15 % el del departamento de supervisión, ¿cómo variará la solución del problema?

a) Sean:

x el número de cuadernos de Tipo 1, y el número de cuadernos de Tipo 2 y z el número de cuadernos de Tipo 3.

$$\begin{cases} 6x+5y+8z=780 \\ 5x+4y+6z=610 \\ x+y+2z=170 \end{cases}$$

b) El sistema es compatible indeterminado y sus infinitas soluciones pueden expresarse de la forma:

$$\begin{cases} x=-70+2t \\ y=240-4t \\ z=t \end{cases}$$

c) $z=t=35 \Rightarrow x=0 \quad y=100$

Se fabricarán 100 cuadernos de Tipo 2 y 35 de Tipo 3

d) Aplicando las variaciones se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 6x+5y+8z=780\cdot 1{,}1=858 \\ 5x+4y+6z=610\cdot 1{,}1=671 \\ x+y+2z=170\cdot 1{,}15=195{,}5 \end{cases} \Rightarrow E_2 \to E_1-E_2 \Rightarrow \begin{cases} 6x+5y+8z=858 \\ x+y+2z=187 \\ x+y+2z=195{,}5 \end{cases}$$

En este caso, el sistema no tiene solución.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Resuelve las ecuaciones

a) $-2\cdot\frac{3x-1}{25}-\frac{4x-1}{5}=x+\frac{7}{25}$ **b)** $\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{12}+\frac{x+3}{2}=2x-\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{2x-1}{x+7}-\frac{2x+1}{x-7}=\frac{5}{8}$ **d)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{7}{6}$

a) $x=0$ **b)** $x=2$ **c)** $x=-49, x=1$ **d)** $x=-3, x=2$

2. Halla una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces sea –4 y el producto de las mismas sea –221.

Respuesta abierta, por ejemplo: $x^2+4x-221=0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de grado superior a dos.

a) $6x^5+11x^4+3x^3-3x^2-x=0$ **b)** $\frac{1}{x^2}-\frac{3x^2}{4}=-\frac{11}{4}$

a) $x(x+1)^2(2x-1)(3x+1)=0\Rightarrow x=0, x=-1, x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{3}$

b) $4-3x^4=-11x^2\Rightarrow 3x^4-11x^2-4=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}$

4. Halla la solución de las siguientes ecuaciones irracionales.

a) $\sqrt{x+\sqrt{4x+40}}=5$ **b)** $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=7$

a) $\sqrt{x+\sqrt{4x+40}}=5\Rightarrow x+\sqrt{4x+40}=25\Rightarrow x^2-54x+585=0\Rightarrow x=39$ (no válida) $x=15$ (válida).

b) $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=7\Rightarrow\sqrt{x+1}=7-\sqrt{2x}\Rightarrow x+1=49+2x-14\sqrt{2x}\Rightarrow 14\sqrt{2x}=x+48\Rightarrow$

$\Rightarrow 392x=x^2+2304+96x\Rightarrow x^2-296x+2304=0\Rightarrow x=8$ (válida) $x=288$ (no válida).

5. Resuelve las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

a) $6^{-2x^2+x+8}=36$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x+2^{x-1}+2^x=\frac{11}{4}$ **c)** $\log(100x)+2\log x=-1$ **d)** $2\log x-\frac{2}{5}\log x^5+\log x^2=4$

a) $6^{-2x^2+x+8}=36\Rightarrow -2x^2+x+8=2\Rightarrow 2x^2-x-6=0\Rightarrow x=2, x=-\frac{3}{2}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x+2^{x-1}+2^x=\frac{11}{4}\Rightarrow\frac{1}{2^x}+\frac{2^x}{2}+2^x=\frac{11}{4}$. Haciendo el cambio: $z=2^x$, $x=\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$ y $x=-1$.

c) $\log(100x)+2\log x=-1\Rightarrow\log\left(100x^3\right)=\log\left(\frac{1}{10}\right)\Rightarrow 1000x^3=1\Rightarrow x=\frac{1}{10}$

d) $2\log x-\frac{2}{5}\log x^5+\log x^2=4\Rightarrow\log\left(\frac{x^2x^2}{\left(x^5\right)^{\frac{2}{5}}}\right)=\log 10000\Rightarrow\frac{x^4}{x^2}=10000\Rightarrow x=100$

6. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 5x-3y=4 \\ -2x-7y=-\dfrac{13}{3} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x-5y=10 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{5y}{6}=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$

a) $x=1,\ y=\frac{1}{3}$ **b)** $x=-5-5t, y=2t$

7. Resuelve aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y-z=3 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x-2y+z=1 \\ 4x-y+2z=-1 \end{cases}$

a) Sistema compatible indeterminado. Soluciones de la forma: $x=t, y=2-t, z=1$.

b) No tiene solución

8. Resuelve los siguientes sistemas de segundo grado.

a) $\begin{cases} 2x^2+y^2=18 \\ -2x^2+3y^2=46 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x^2+3xy=-8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x^2+y^2=18 \\ -2x^2+3y^2=46 \end{cases} \Rightarrow 4y^2=64 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow \begin{cases} y=4 \quad x^2=1 \Rightarrow x=1, y=4; x=-1, y=4 \\ y=-4 \quad x^2=1 \Rightarrow x=1, y=-4; x=-1, y=-4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x^2+3xy=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{5-x}{2} \\ x^2+3xy=-8 \end{cases} \Rightarrow x^2+3x\dfrac{5-x}{2}=-8 \Rightarrow 2x^2+15x-3x^2+16=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=16, y=-\dfrac{11}{2}; x=-1, y=3$

9. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2^x+3^y=\dfrac{19}{2} \\ 2^{x+1}+3^{y-1}=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ 2+\log y-\log x=\log 250 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x+3^y=\dfrac{19}{2} \\ 2^{x+1}+3^{y-1}=4 \end{cases} \quad 2^x=A, 3^y=B \Rightarrow \begin{cases} A+B=\dfrac{19}{2} \\ 2A+\dfrac{B}{3}=4 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{5}{3}B=-15 \Rightarrow B=9 \quad A=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=-1, y=2$

b) $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ 2+\log y-\log x=\log 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=10 \\ \dfrac{100y}{x}=250 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{10}{x}=\dfrac{250x}{100} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2, y=5$; $x=-2$ (no válida)

10. Calcula tres números pares consecutivos tales que la suma del primero más la media aritmética de los otros dos valga 271.

Sean los números pares consecutivos $2x$, $2x+2$, $2x+4$. $2x+\dfrac{(2x+2)+(2x+4)}{2}=271 \Rightarrow x=67$.

Los tres números pares son 134, 136 y 138.

Relaciona y contesta

Elige una única respuesta correcta en cada caso

1. El número de soluciones de la ecuación $x^3 + \frac{2}{x} = -3x$ es:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Solución: D.

2. Las soluciones de la ecuación $\sqrt{-x+2} - 2 = 2x$ son:

A. $x = -\frac{1}{4}$ y $x = -2$ **B.** $x = -\frac{1}{4}$ **C.** $x = -2$ **D.** La ecuación no tiene solución.

Solución: B

3. Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

A. Tiene seguro una solución.
B. Tiene seguro dos soluciones.
C. Seguro que no tiene solución.
D. Ninguna de las anteriores.

Solución: D

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Una ecuación polinómica con el término independiente nulo:

A. Tiene por lo menos una solución real.
B. El número de soluciones reales coincide con su grado.
C. El número de soluciones reales coincide con su grado menos 1.
D. Una de sus soluciones es $x = 0$.

Solución: A y D

5. Se considera el sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

A. Si se añade la ecuación $2x + 2y + 2z = 6$, el sistema tiene infinitas soluciones.
B. Si se añade la ecuación $z = -4$, el sistema no tiene solución.
C. Si se añade la ecuación $2x + y + z = 4$ el sistema tiene como única solución $x = 1$ $y = 1$ $z = 1$.
D. Si se añade la ecuación $-x - z = -2$, el sistema tiene infinitas soluciones entre las que se encuentra la $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Solución A, B y C

6. **Se considera que un número *x* verifica las expresiones:**

1. $A(x) = B(x)$ **2.** $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes

Solución: B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se quiere saber si existe equilibrio de mercado de un cierto producto. Para ello se aportan, referidas al producto:**

1. La función demanda **2. La función oferta**

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Pueden eliminarse los dos datos.

D. No puede eliminarse ninguno.

Solución: D