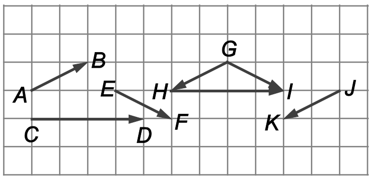
4 Vectores

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.



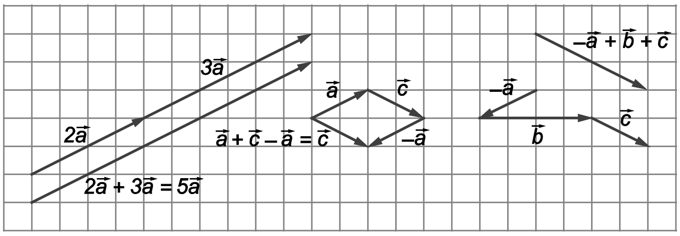
2. a) Indica tres parejas de vectores equipolentes.

b) Representa: $-2\overrightarrow{JK}+3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{JK}$ y $\overrightarrow{JK}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$

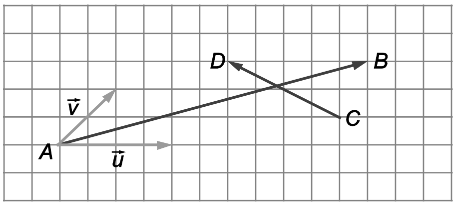
a) Son equipolentes las parejas: $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{HI}$

b) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los vectores libres cuyos representantes son $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ respectivamente. Tenemos

$-2\overrightarrow{JK}+3\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+3\vec{a}=5\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{JK}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}=\vec{c}$ y $\overrightarrow{JK}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

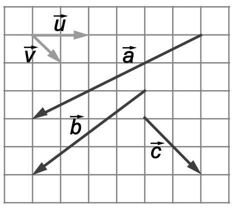


3. Expresa $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



$\overrightarrow{AB}=2\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{2}\vec{u}+\vec{v}$

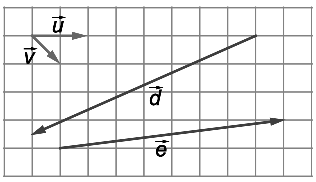
4. Ejercicio resuelto.



5. a) Halla las coordenadas de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.

b) Representa y calcula las coordenadas de los vectores $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{e}=\vec{c}-\vec{a}$.

a) $\vec{a}=-\frac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{b}=-\frac{7}{2}\vec{u}+3\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{c}=2\vec{v}$



b) $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)+\left(-\frac{7}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)=-\frac{23}{4}\vec{u}+\frac{7}{2}\vec{v}=\left(-\frac{23}{4},\frac{9}{2}\right)$

$\vec{e}=\vec{c}-\vec{a}=2\vec{v}-\left(-\frac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)=\frac{9}{2}\vec{u}-\vec{v}=\left(\frac{9}{2},-1\right)$

6. **a)** Comprueba que los vectores $\vec{u}=(2,-3)$ y $\vec{v}=(3,6)$ forman una base de V^2.

b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w}=\left(6,-\dfrac{11}{2}\right)$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.

a) $\dfrac{2}{3}\neq\dfrac{-3}{6}\Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de V^2.

b) $\left(6,-\dfrac{11}{2}\right)=a\cdot(2,-3)+b\cdot(3,6)\Rightarrow\begin{cases}2a+3b=6\\ -3a+6b=-\dfrac{11}{2}\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{1}{3}$

Las coordenadas de $\vec{w}$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ son $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{3}\right)$

7 a 10. **Ejercicios resueltos.**

11. **Halla el punto medio del segmento comprendido entre los puntos *A*(7, 12) y *B*(33, –10).**

$$M\left(\frac{7+33}{2},\frac{12-10}{2}\right)=M(20,1)$$

12. **Comprueba si los puntos *P*, *Q* y *R* están alineados o forman triángulo en los siguientes casos:**

a) $P(0,3)$, $Q(1,1)$ y $R(2,-1)$ **b)** $P(-3,0)$, $Q(2,1)$ y $R(6,2)$ **c)** $P(-1,0)$, $Q\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ y $R\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$

a) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(1,1)-(0,3)=(1,-2)\\ \overrightarrow{PR}=(2,-1)-(0,3)=(2,-4)\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{-4}\Rightarrow P, Q$ y R están alineados.

b) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(2,1)-(-3,0)=(5,1)\\ \overrightarrow{PR}=(6,2)-(-3,0)=(9,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{5}{9}\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow P, Q$ y R no están alineados, forman un triángulo.

c) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}\right)-(-1,0)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)\\ \overrightarrow{PR}=\left(0,\dfrac{3}{2}\right)-(-1,0)=\left(1,\dfrac{3}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\Rightarrow P, Q$ y R están alineados.

13. **Calcula los valores de *a* y *b* para que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ sean equipolentes sabiendo que: *P*(*a* + 4, –*b*), Q(*a* + 1, *b*), *R*(4, –1) y *S*(*a*, *b*).**

$$\overrightarrow{PQ}\approx\overrightarrow{RS}\Rightarrow(a+1-a-4,\ b+b)=(a-4,\ b+1)\Rightarrow\begin{cases}-3=a-4\\ 2b=b+1\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=1$$

14. **Calcula el valor de *k* para que los puntos *A*(4, –1), *B*(–1, 2) y *C*(*k*, *k* + 1) estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1-4,\ 2+1)=(-5,3)\\ \overrightarrow{AC}=(k-4,\ k+1+1)=(k-4,\ k+2)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-5}{k-4}=\frac{3}{k+2}\Rightarrow-5k-10=3k-12\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

15. Halla el vértice *D* del paralelogramo *ABCD* si *A*(2, 3), *B*(1, –1) y *C*(–3, 0).

Para que *ABCD* sea un paralelogramo basta con que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ sean equipolentes, por tanto, si $D(d_1, d_2)$ tenemos:

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC} \Rightarrow (-1, -4) = (-3 - d_1, -d_2) \Rightarrow \begin{cases} -1 = -3 - d_1 \\ -4 = -d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 = -2,\ d_2 = 4 \Rightarrow D(-2, 4)$$

16. Ejercicio resuelto.

17. Si $\vec{u} = (-4, 3)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, halla: $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = -4 \cdot 2 + 3(-1) = -11$$

18. Calcula, en función de *k*, el módulo de $\vec{v} = (k, -k)$ y $\vec{w} = (k+1, k-1)$ y su producto escalar.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{k^2 + (-k)^2} = \sqrt{2k^2} = |k|\sqrt{2} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{2k^2 + 2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = k(k+1) - k(k-1) = 2k$$

19. Calcula los valores de *k* para que el ángulo formado por $\vec{v} = (k, -k)$ y $\vec{w} = (k+1, k-1)$ sea de 45º.

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2k}{|k|\sqrt{2} \cdot \sqrt{2k^2 + 2}} = \frac{2k}{|2k|\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{k^2 + 1}} \Rightarrow \sqrt{2k^2 + 2} = \pm 2 \Rightarrow 2k^2 + 2 = 4 \Rightarrow k = 1,\ k = -1$$

Si $k = 1$, $\alpha = 45^\circ$; si $k = -1$, $\alpha = 135^\circ$

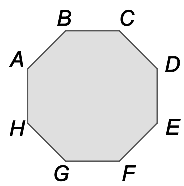
20. Ejercicio interactivo.

21 a 34. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Vectores fijos y vectores libres en el plano

35. La siguiente figura representa un octógono regular.



a) Indica dos vectores equipolentes cuyos orígenes y extremos sean vértices diferentes del octógono.

b) Indica dos vectores equipolentes cuyos orígenes y extremos sean vértices no consecutivos del octógono.

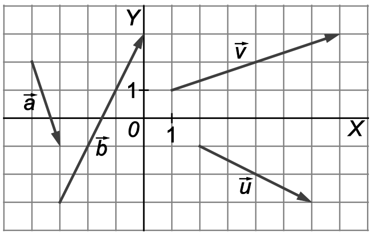
c) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices diferentes del octógono y tales que tengan el mismo módulo y la misma dirección pero diferente sentido.

d) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices del octógono y tales que tengan el mismo módulo y diferente dirección.

e) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices del octógono y tales que tengan diferente módulo igual dirección y diferente sentido.

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{FE}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{GE}$ **c)** $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{EH}$ **d)** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ **e)** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DG}$

36. Expresa los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

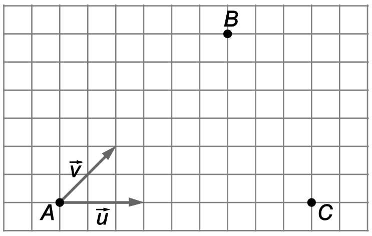


Respecto de la base canónica tenemos: $\vec{a}=(1,-3)$, $\vec{b}=(3,6)$, $\vec{u}=(4,-2)$ y $\vec{v}=(6,2)$

$$\vec{a}=a_1\cdot\vec{u}+a_2\cdot\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}1=4a_1+6a_2\\-3=-2a_1+2a_2\end{cases}\Rightarrow a_1=1,\ a_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow\vec{a}=\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{b}=b_1\cdot\vec{u}+b_2\cdot\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}3=4b_1+6b_2\\6=-2b_1+2b_2\end{cases}\Rightarrow b_1=-\frac{3}{2},\ b_2=\frac{3}{2}\Rightarrow\vec{b}=-\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}$$

37. Halla las coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CB}$ en la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=3\vec{u}-3\vec{v}\ \text{ y }\ \overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=-3\vec{u}+3\vec{v}$$

Dependencia lineal

38. Decide si las siguientes parejas de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes. ¿En qué casos los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base de V^2?

a) $\vec{u}=(-4,2)$ y $\vec{v}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ **b)** $\vec{u}=(16,32)$ y $\vec{v}=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ **c)** $\vec{u}=(2,-16)$ y $\vec{v}=(-1,-8)$

a) $\dfrac{-4}{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{-\frac{1}{3}}=-6\Rightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de V^2.

b) $\dfrac{16}{-\frac{1}{4}}=\dfrac{32}{-\frac{1}{2}}=-64\Rightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de V^2.

c) $\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{-16}{-8}\Rightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de V^2.

39. Expresa, en cada caso, el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{a}=(-12,-2)$, $\vec{u}=(4,-3)$ y $\vec{v}=(-1,-2)$

b) $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},-5\right)$, $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},-3\right)$ y $\vec{v}=(1,-2)$

c) $\vec{a}=\left(\frac{3}{4},-\frac{7}{6}\right)$, $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{1}{4},-\frac{5}{6}\right)$

a) $\vec{a}=a_1\vec{u}+a_2\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}-12=4a_1-a_2\\-2=-3a_1-2a_2\end{cases}\Rightarrow a_1=-2,\ a_2=4\Rightarrow\vec{a}=-2\vec{u}+4\vec{v}$

b) $\vec{a}=a_1\vec{u}+a_2\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a_1+a_2\\-5=-3a_1-2a_2\end{cases}\Rightarrow a_1=3,\ a_2=-2\Rightarrow\vec{a}=3\vec{u}-2\vec{v}$

c) $\vec{a}=a_1\vec{u}+a_2\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}a_2\\-\frac{7}{6}=-\frac{1}{3}a_1-\frac{5}{6}a_2\end{cases}\Rightarrow a_1=1,\ a_2=1\Rightarrow\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$

Operaciones con coordenadas

40. Realiza las siguientes operaciones con coordenadas de vectores.

a) $2[2(-1, 3)-3[(-2, 0)-3(4, -3)]]-3(1, -2)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right)$

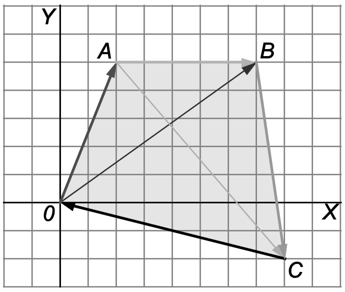
c) $2\left(2-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}\right)-2(2, -3)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$

a) $2[2(-1, 3)-3[(-2, 0)-3(4, -3)]]-3(1, -2)=2(40, -21)-(3, -6)=(77, -36)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right)=\left(0, -\frac{11}{20}\right)$

c) $2\left(2-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}\right)-2(2, -3)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)=\left(\frac{10}{3}, \frac{3}{2}\right)-(4, -6)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{7}{6}, \frac{69}{10}\right)$

41. En la siguiente figura:



a) Calcula las coordenadas de los vectores libres de representantes: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Comprueba que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}$ es el vector nulo.

c) Calcula las coordenadas de $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$.

$A(2, 5)$, $B(7, 5)$, $C(8, -2)$ y $O(0, 0)$, por tanto:

a) $\overrightarrow{OA}=(2, 5)$, $\overrightarrow{AB}=(5, 0)$, $\overrightarrow{BC}=(1, -7)$, $\overrightarrow{CO}=(-8, 2)$, $\overrightarrow{OB}=(7, 5)$ y $\overrightarrow{AC}=(6, -7)$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=(2, 5)+(5, 0)+(1, -7)+(-8, 2)=(0, 0)$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(2, 5)+(5, 0)=(7, 5)$ y $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}=(2, 5)+2(5, 0)-3(1, -7)=(9, 26)$

42. Calcula las coordenadas del origen *A* de un vector cuyo extremo es *B*(–2, 4) y que es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, siendo *C*(5, –1) y *D*(–2, –2).

$\overrightarrow{CD}=(-7, -1)$, si $A(a_1, a_2)$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow(-2-a_1, 4-a_2)=(-7, -1)\Rightarrow\begin{cases}-2-a_1=-7\\4-a_2=-1\end{cases}\Rightarrow a_1=5, a_2=5\Rightarrow A(5, 5)$

43. Dados los puntos *A*(–1, 4), *B*(2, 2) y *C*(–3, 5), calcula:

a) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

b) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}$

c) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$

d) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}$

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow(3, -2)=(d_1+3, d_2-5)\Rightarrow\begin{cases}d_1+3=3\\d_2-5=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=0\\d_2=3\end{cases}\Rightarrow D(0, 3)$

b) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow(2-d_1, 2-d_2)=(-2, 1)\Rightarrow\begin{cases}2-d_1=-2\\2-d_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=4\\d_2=1\end{cases}\Rightarrow D(4, 1)$

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}\Rightarrow(3, -2)=(3d_1+9, 3d_2-15)\Rightarrow\begin{cases}3d_1+9=3\\3d_2-15=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=-2\\d_2=\frac{13}{3}\end{cases}\Rightarrow D\left(-2, \frac{13}{3}\right)$

d) $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}\Rightarrow(2-d_1, 2-d_2)=(4, -2)\Rightarrow\begin{cases}2-d_1=4\\2-d_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=-2\\d_2=4\end{cases}\Rightarrow D(-2, 4)$

44. Dados los puntos *A*(2, –3), *B*(1, –4) y *C*(–1, –2), calcula las coordenadas de los vectores:

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$

c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

d) $\vec{x} = 3\left(\vec{u} - \vec{v}\right) + 5\vec{v}$

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = (-2, -2) + (-9, 3) + (-2, 2) = (-13, 3)$

b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} = \left(2, -\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = (4, -2)$

c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (-26, 6) + (2, -1) = (-24, 5)$

d) $\vec{x} = 3\left(\vec{u} - \vec{v}\right) + 5\vec{v} = 3\vec{u} + 2\vec{v} = (-39, 9) + (8, -4) = (-31, 5)$

45. Calcula, si es que existe, el valor de *k* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(2, -3+k) = 3(3, -1) + 7(-1, -3)$

b) $(1, -6) = 4(k, 2) - 3(1, 3-k)$

c) $\left(\frac{2}{3}+k, \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}, k\right) + k(2, -3)$

a) $(2, -3+k) = 3(3, -1) + 7(-1, -3) \Rightarrow (2, -3+k) = (2, -24) \Rightarrow -3+k = -24 \Rightarrow k = -21$

b) $(1, -6) = 4(k, 2) - 3(1, 3-k) \Rightarrow (1, -6) = (4k-3, -1+3k) \Rightarrow \begin{cases} 4k-3 = 1 \Rightarrow k = 1 \\ -1+3k = -6 \Rightarrow k = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow$ No existe ningún valor de *k* para el que se cumpla la igualdad.

c) $\left(\frac{2}{3}+k, \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}, k\right) + k(2, -3) \Rightarrow \left(\frac{2}{3}+k, \frac{k}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}+2k, 2k-3k\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}+k = \frac{2}{3}+2k \\ \frac{k}{2} = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 0$

46. Calcula los valores de *x* y de *y* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(13, -8) = 5(x, -1) + 3(1, y)$

b) $(x, y) = -2(-1, -1-x) + 4(-y, 3)$

c) $\left(x, \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2, -\frac{1}{2}\right) + 3(x, y)$

a) $(13, -8) = 5(x, -1) + 3(1, y) \Rightarrow \begin{cases} 13 = 5x+3 \\ -8 = -5+3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

b) $(x, y) = -2(-1, -1-x) + 4(-y, 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 2-4y \\ y = 2+2x+12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y = 2 \\ -2x+y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\left(x, \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2, -\frac{1}{2}\right) + 3(x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = x+3x \\ \frac{y}{4} = -\frac{x}{4}+3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

47. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores.

a) $\vec{u}=(3,\ 3)$ **c)** $\vec{u}=(-20,\ -21)$ **e)** $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\ -4\right)$

b) $\vec{u}=(12,\ -5)$ **d)** $\vec{u}=\left(3,\ -\sqrt{3}\right)$ **f)** $\vec{u}=\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$

a) $\vec{u}=(3,\ 3)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al primer cuadrante.

b) $\vec{u}=(12,\ -5)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{5}{12}\right)=5{,}89\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

c) $\vec{u}=(-20,\ -21)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(-20)^2+(-21)^2}=\sqrt{841}=29\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{21}{20}\right)=3{,}95\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al tercer cuadrante.

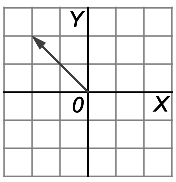
d) $\vec{u}=\left(3,\ -\sqrt{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{11\pi}{6}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

e) $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2},\ -4\right)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+(-4)^2}=\sqrt{\dfrac{65}{4}}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}(-8)=4{,}84\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

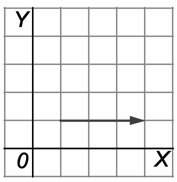
f) $\vec{u}=\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}1=\dfrac{5\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al tercer cuadrante.

48. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores.

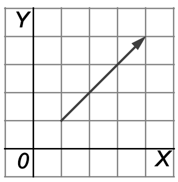
a)



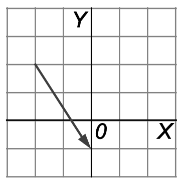
b)



c)



d)



a) $\vec{a}=(-2,\ 2)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\\ \arg(\vec{a})=\operatorname{arctg}(-1)=\dfrac{3\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

b) $\vec{b}=(3,\ 0)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+0^2}=\sqrt{9}=3\\ \arg(\vec{b})=\operatorname{arctg}0=0\text{ rad}\end{cases}$

c) $\vec{c}=(3,\ 3)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\\ \arg(\vec{c})=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

d) $\vec{d}=(2,\ -3)\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{d}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}\\ \arg(\vec{d})=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{2}\right)=5{,}3\text{ rad}\end{cases}$

49. Calcula los lados de los triángulos *ABC* en cada caso.

a) $A(2, -1)$, $B(-1, 5)$ y $C(-1, -1)$ **b)** $A(3, -1)$, $B(-2, 3)$ y $C(5, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0)$ y $\overrightarrow{BC} = (0, -6)$

$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$, $b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ y $c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

b) $\overrightarrow{AB} = (-5, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 6)$ y $\overrightarrow{BC} = (7, 2)$

$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$, $b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ y $c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

50. Clasifica los siguientes triángulos, de los que conocemos sus vértices, según sus lados.

a) $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(1, -2)$ **b)** $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$ **c)** $A(0, 0)$, $B(3, -1)$ y $C\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (4, -2)$ y $\overrightarrow{BC} = (1, -3)$

$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$, $b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ y $c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Es un triángulo isósceles.

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, -3)$

$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, $b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$ y $c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

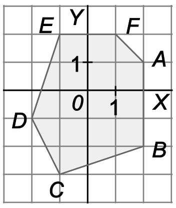
Es un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$ y $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)$

$$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)^2} = \sqrt{10},\ b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{10} \text{ y } c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$$

Es un triángulo equilátero.

51. Calcula la medida de los lados del hexágono de la figura.



$A(2, 1)$, $B(2, -2)$, $C(-1, -3)$, $D(-2, -1)$, $E(-1, 2)$ y $F(1, 2)$, por tanto:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0+9} = 3$ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{4+0} = 2$ $|\overrightarrow{FA}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Producto escalar

52. Calcula el producto escalar de:

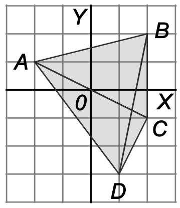
a) $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (2, 5)$ **b)** $\vec{u} = (-2, 4)$ y $\vec{v} = (2, -1)$ **c)** $\vec{u} = (-3, -4)$ y $\vec{v} = (2, 0)$ **d)** $\vec{u} = (-1, -3)$ y $\vec{v} = (1, 3)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 20 = 26$ **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 - 4 = -8$ **c)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 0 = -6$ **d)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 - 9 = -10$

53. Halla el módulo de la proyección ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (1, -4)$.

$$|\text{proy}_{\vec{v}}\, \vec{u}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

54. Calcula los productos escalares que se indican, si los vectores vienen determinados por la figura.



a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ **c)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}$

b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA}$ **d)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(4,\,1)\cdot(0,\,-3)=0-3=-3$

b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA}=(-1,\,-2)\cdot(-4,\,-1)=4+2=6$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}=(4,\,-2)\cdot(-3,\,4)=-12-8=-20$

d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(4,\,-2)\cdot(1,\,5)=4-10=-6$

55. Calcula el valor o los valores de *k* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

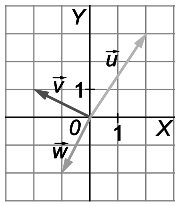
a) $(2,\,k)\cdot(-1,\,3)=-2$ **b)** $(3,\,-k)\cdot(2,\,-1)=4k$ **c)** $\left(5,\,-\frac{k}{2}\right)\cdot(k,\,-k)=6k$

a) $(2,\,k)\cdot(-1,\,3)=-2\Rightarrow -2+3k=-2\Rightarrow k=0$

b) $(3,\,-k)\cdot(2,\,-1)=4k\Rightarrow 6+k=4k\Rightarrow k=2$

c) $\left(5,\,-\frac{k}{2}\right)\cdot(k,\,-k)=6k\Rightarrow 5k+\frac{k^2}{2}=6k\Rightarrow k^2-2k=0\Rightarrow k(k-2)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\k=2\end{cases}$

56. Dados los vectores de la figura, resuelve las operaciones que se indican.



a) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

b) $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)+\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}$

c) $\vec{v}\cdot\left(2\vec{u}-3\vec{w}\right)+\left(-3\vec{w}+2\vec{u}\right)\cdot\vec{v}$

$\vec{u}=(2,\,3)$, $\vec{v}=(-2,\,1)$ y $\vec{w}=(-1,\,-2)$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=-1-8=-9$

b) $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)+\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=(2,\,3)\cdot(-3,\,-1)+(0,\,4)\cdot(-1,\,-2)=-9-8=-17$

c) $\vec{v}\cdot\left(2\vec{u}-3\vec{w}\right)+\left(-3\vec{w}+2\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=(-2,\,1)\cdot(7,\,12)+(7,\,12)\cdot(-2,\,1)=-2-2=-4$

Vectores paralelos y vectores perpendiculares

57. **a)** Escribe todos los vectores paralelos al vector libre de coordenadas $\vec{u}=(2,\,-3)$.

b) Escribe todos los vectores perpendiculares al vector libre de coordenadas $\vec{u}=(2,\,-3)$.

c) Halla un vector paralelo a $\vec{u}=(2,\,-3)$ y unitario.

d) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}=(2,\,-3)$ y unitario.

a) $(2t,\,-3t)$ con $t\in\mathbb{R}$

b) $(3t,\,2t)$ con $t\in\mathbb{R}$

c) $\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\,\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)=\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\,\frac{-3\sqrt{13}}{13}\right)$

d) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\,\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=\left(\frac{3\sqrt{13}}{13},\,\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

58. Para cada caso, calcula todos los vectores unitarios que tienen la misma dirección que el vector $\vec{u}$. ¿Cuáles de ellos tienen también el mismo sentido?

a) $\vec{u} = (10, -24)$ **b)** $\vec{u} = (-2,7; -3,6)$ **c)** $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$

a) $\vec{u} = (10, -24) \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{10}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}, \dfrac{-24}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}\right) = \left(\dfrac{10}{26}, \dfrac{-24}{26}\right) = \left(\dfrac{5}{13}, \dfrac{-12}{13}\right) \\ \left(\dfrac{-10}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}, \dfrac{24}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}\right) = \left(\dfrac{-10}{26}, \dfrac{24}{26}\right) = \left(\dfrac{-5}{13}, \dfrac{12}{13}\right) \end{cases}$

El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

b) $\vec{u} = (-2,7; -3,6) \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{-2,7}{4,5}; \dfrac{-3,6}{4,5}\right) = (-0,6; -0,8) \\ \left(\dfrac{2,7}{4,5}; \dfrac{3,6}{4,5}\right) = (0,6; 0,8) \end{cases}$. El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}, \dfrac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{65}}, \dfrac{8}{\sqrt{65}}\right) \\ \left(-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}, -\dfrac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{65}}, -\dfrac{8}{\sqrt{65}}\right) \end{cases}$. El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

59. Calcula las coordenadas de un vector paralelo al $\overrightarrow{AF}$ y de módulo 10, siendo *A*(–1, 3) y *F*(–4, 7).

$\overrightarrow{AF} = (-3, 4)$, los vectores paralelos a $\overrightarrow{AF}$ son de la forma $(-3t, 4t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Así: $|(-3t, 4t)| = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{9t^2 + 16t^2} = 10 \Rightarrow 5|t| = 10 \Rightarrow t = \pm 2$. Por tanto, existen dos posibles soluciones: $(-6, 8)$ y $(6, -8)$.

60. Determina un vector perpendicular a $\vec{u} = (-5, 12)$ y que tenga el mismo módulo que $\vec{u}$. ¿Cuántas soluciones hay?

Hay dos vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y con su mismo módulo: $(12, 5)$ y $(-12, -5)$.

Ángulo de dos vectores

61. Calcula el ángulo que forman en cada caso los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=(3,\ 4)$ y $\vec{v}=(5,\ 12)$ **c)** $\vec{u}=(-1,\ 2)$ y $\vec{v}=(1,\ -2)$ **e)** $\vec{u}=(2,\ -1)$ y $\vec{v}=(1,\ 2)$

b) $\vec{u}=(20,\ -21)$ y $\vec{v}=(-1,\ 1)$ **d)** $\vec{u}=(1,\ -1)$ y $\vec{v}=(2,\ 2)$ **f)** $\vec{u}=(0,\ 2)$ y $\vec{v}=(3,\ -1)$

a) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{63}{\sqrt{25}\sqrt{169}}=\dfrac{63}{65}\Rightarrow\alpha=14,25^{\circ}$

b) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-41}{\sqrt{841}\sqrt{2}}=-\dfrac{41}{29\sqrt{2}}=-\dfrac{41\sqrt{2}}{58}\Rightarrow\alpha=178,6^{\circ}$

c) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=-1\Rightarrow\alpha=180^{\circ}$

d) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{8}}=0\Rightarrow\alpha=90^{\circ}$

e) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=0\Rightarrow\alpha=90^{\circ}$

f) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{10}}=-\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\alpha=108,43^{\circ}$

62. Halla el valor de *m* para que los vectores $\vec{u}=(m,\ 1)$ y $\vec{v}=(-2,\ 3)$ forman un ángulo de:

a) 30º **b)** 135º **c)** 90º **d)** 0º

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{-2m+3}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{13}}=\frac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}$$

a) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow -4m+6=\sqrt{39m+39}\Rightarrow 16m^2+36-48m=39m+39\Rightarrow 16m^2-87m-3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{87+\sqrt{7761}}{32}$ (Falsa), $m=\dfrac{87-\sqrt{7761}}{32}$

b) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 4m-6=\sqrt{26m+26}\Rightarrow 16m^2+36-48m=26m+26\Rightarrow 16m^2-74m+10=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{37+\sqrt{1209}}{16}$, $m=\dfrac{37-\sqrt{1209}}{16}$ (Falsa)

c) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=0\Rightarrow -2m+3=0\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=1\Rightarrow -2m+3=\sqrt{13m+13}\Rightarrow 4m^2+9-12m=13m+13\Rightarrow 4m^2-25m-4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{25+\sqrt{689}}{8}$ (Falsa), $m=\dfrac{25-\sqrt{689}}{8}$

63. Calcula los ángulos del triángulo de vértices *ABC*.

a) *A*(1, 3), *B*(2, 1) y *C*(4, 1) **b)** *A*(3, 1), *B*(0, 5) y *C*(4, 3)

a) $\overrightarrow{AB}=(1,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,-2)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{7}{\sqrt{65}}=\dfrac{7\sqrt{65}}{65}\Rightarrow \hat{A}=29{,}74º$

$\overrightarrow{BA}=(-1,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(2,0)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{B}=116{,}57º$

$\overrightarrow{CA}=(-3,2)$ y $\overrightarrow{CB}=(-2,0)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{6}{2\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow \hat{C}=33{,}69º$

b) $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,2)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{5}{5\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{A}=63{,}43º$

$\overrightarrow{BA}=(3,-4)$ y $\overrightarrow{BC}=(4,-2)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{20}{10\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{B}=26{,}57º$

$\overrightarrow{CA}=(-1,-2)$ y $\overrightarrow{CB}=(-4,2)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=0\Rightarrow \hat{C}=90º$

64. Clasifica los siguientes triángulos según los ángulos.

a) *A*(1, 3), *B*(3, 0) y *C*(–2, 1) **b)** *A*(1, 3), *B*(–2, 1) y *C*(2, –1) **c)** *A*(1, 3), *B*(–2, 1) y *C*(4, 0)

a) $\overrightarrow{AB}=(2,-3)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3,-2)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=0\Rightarrow \hat{A}=90º$. Triángulo rectángulo en *A*.

b) $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,-4)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{5}{\sqrt{221}}=\dfrac{5\sqrt{221}}{221}\Rightarrow \hat{A}=70{,}35º$

$\overrightarrow{BA}=(3,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(4,-2)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{8}{2\sqrt{65}}=\dfrac{4\sqrt{65}}{65}\Rightarrow \hat{B}=60{,}26º$

$\overrightarrow{CA}=(-1,4)$ y $\overrightarrow{CB}=(-4,2)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{12}{2\sqrt{85}}=\dfrac{6\sqrt{85}}{85}\Rightarrow \hat{C}=49{,}4º$

Triángulo acutángulo.

c) $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,-3)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-3}{3\sqrt{26}}=-\dfrac{\sqrt{26}}{26}\Rightarrow \hat{A}=101{,}31º$. Triángulo obtusángulo.

65. Calcula los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son *A*(2, 2), *B*(2, 4), *C*(–1, 1) y *D*(–1, –1).

Observemos que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0,2)$, por lo que se trata de un paralelogramo, con lo que $\hat{A}=\hat{C}$ y $\hat{B}=\hat{D}=180º-\hat{A}$.

Por tanto: $\cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{-6}{6\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}=135º$ y $\hat{B}=\hat{D}=45º$.

Síntesis

66. Dados los vectores $\vec{u} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ y $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, calcula:

a) Los módulos de ambos vectores.

b) El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

c) El ángulo que forman los dos vectores.

d) Halla el módulo de la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y la de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

e) Compara los cocientes $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ y $\frac{|proy_{\vec{u}}\vec{v}|}{|proy_{\vec{v}}\vec{u}|}$.

f) Halla el ángulo que forman $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}$.

g) Halla las coordenadas de $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ y $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 6 \cdot (-4) + (-8) \cdot 3 = -48$

c) $\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = -\frac{24}{25} \Rightarrow \alpha = 163{,}74°$

d) $|proy_{\vec{v}}\vec{u}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{48}{5} = 9{,}6$ $\quad |proy_{\vec{u}}\vec{v}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{48}{10} = 4{,}8$

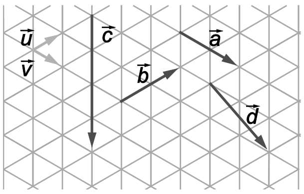
e) Son iguales: $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{proy_{\vec{u}}\vec{v}}{proy_{\vec{v}}\vec{u}} = 0{,}5$

f) $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \cos\beta = \frac{52}{10\sqrt{29}} = \frac{26\sqrt{29}}{145} \Rightarrow \beta = 15{,}07°$

g) Como α es obtuso, $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{v}$ y $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{u}$. Así:

$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = |\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}| \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{192}{25}, -\frac{144}{25}\right)$ $\quad \text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = |\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}| \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(-\frac{288}{100}, \frac{384}{100}\right)$

67. Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.



$\vec{a} = 2\vec{v}$ $\quad \vec{b} = 2\vec{u}$ $\quad \vec{c} = -4\vec{u} + 4\vec{v}$ $\quad \vec{d} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

68. Halla un vector $\vec{v}$ de módulo 5 sabiendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -14$, siendo $\vec{u} = (6, 8)$.

Si $\vec{v} = (a, b)$, tenemos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ 6a + 8b = -14 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-7-4b}{3} \Rightarrow \left(\frac{-7-4b}{3}\right)^2 + b^2 = 25 \Rightarrow 25b^2 + 56b - 176 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{44}{25},\ a = -\frac{117}{25} \\ b = -4,\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \left(-\frac{117}{25}, \frac{44}{25}\right) \\ \vec{v} = (3, -4) \end{cases}$$

69. Calcula el vértice *D* del paralelogramo *ABCD*, siendo *A*(–3, 4), *B*(–2, –4) y *C*(3, –2). Calcula el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo.

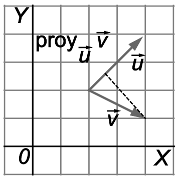
Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Este punto de corte será, por tanto, el punto medio del segmento *AC*:

$$M\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = M(0, 1)$$

Si $D(d_1, d_2)$ es el cuarto vértice del paralelogramo, se deberá verificar que el punto medio del segmento *BD* es *M*:

$$\left(\frac{-2+d_1}{2}, \frac{-4+d_2}{2}\right) = (0, 1) \Rightarrow d_1 = 2,\ d_2 = 6 \Rightarrow D(2, 6)$$

70. Dados los vectores de la figura:



a) Calcula las coordenadas del vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

b) Descompón $\vec{v}$ como suma de dos vectores: uno de igual dirección que $\vec{u}$ y otro perpendicular a $\vec{u}$.

$\vec{u} = (2, 2)$ y $\vec{u} = (2, -1)$

a) $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, por tanto:

$$\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \left|\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}\right| \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|^2}\vec{u} = \frac{2}{8}\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) Todos los vectores que llevan la dirección de $\vec{u}$ son de la forma (t, t) con $t \in \mathbb{R}$ y todos los vectores que llevan la dirección perpendicular a $\vec{u}$ son de la forma $(-s, s)$ con $s \in \mathbb{R}$, por tanto, tenemos:

$$\vec{v} = (t, t) + (-s, s) \Rightarrow \begin{cases} t - s = 2 \\ t + s = -1 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{3}{2} \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

71. Calcula el valor de *m* para que los puntos del plano *A*(1, 2), *B*(–2, m – 2) y *C*(3, –m) estén alineados.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, m-4) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (2, -m-2) \Rightarrow \frac{2}{-3} = \frac{-m-2}{m-4} \Rightarrow 2m - 8 = 3m + 6 \Rightarrow m = -14$$

72. Calcula las coordenadas del extremo *B* de un vector cuyo origen es *A*(2, 3) y que es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, siendo *C*(–2, 3) y *D*(0, –4).

Si $B(b_1, b_2)$ tenemos: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (b_1 - 2, b_2 - 3) = (2, -7) \Rightarrow b_1 = 4,\ b_2 = -4 \Rightarrow B(4, -4)$

73. El baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan sus tres medianas y está situado a doble distancia del vértice que del punto medio del lado opuesto. Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo *A*(–3, 3), *B*(2, 1), *C*(–2, –1).

El punto medio del lado *CB* es el origen: $\left(\frac{2-2}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = O(0, 0)$, por tanto, si el baricentro es $G(g_1, g_2)$, tenemos:

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GO} \Rightarrow (g_1 + 3, g_2 - 3) = 2\cdot(-g_1, -g_2) \Rightarrow \begin{cases} g_1 + 3 = -2g_1 \\ g_2 - 3 = -2g_2 \end{cases} \Rightarrow g_1 = -1,\ g_2 = 1 \Rightarrow G(-1, 1)$$

74. De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se sabe que $|\vec{u}|^2 = 13$, $|\vec{v}| = 10$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = -9$.

a) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **b)** Halla el ángulo que forman $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-9}{10\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = 104{,}45^\circ$

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - |\vec{v}|^2 = -105$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 95$ $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 131$

$\cos\beta = \dfrac{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}{|\vec{u}+\vec{v}||\vec{u}-\vec{v}|} = \dfrac{-105}{\sqrt{12445}} \Rightarrow \beta = 160{,}26^\circ$

75. Sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} = 31$ y $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 37$. Halla el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} = 31 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v} = 31 \Rightarrow |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2 = 31$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 37 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 37$. Por tanto, $31 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 37 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

CUESTIONES

76. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El vector nulo es linealmente dependiente con cualquier otro vector del plano.

b) Si dos vectores no nulos tienen la misma dirección entonces su producto escalar coincide con el producto de sus módulos.

c) $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}|+|\vec{v}|$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \vec{0}$

a) Verdadero. El vector nulo se puede escribir como el producto de cualquier vector por el número 0.

b) Falso. Solo es verdadero si tienen también el mismo sentido; si tienen diferente sentido el producto escalar es el producto de los módulos multiplicado por –1.

c) Falso. Si $\vec{u} = (1, 0)$ y $\vec{v} = (0,1)$ entonces $|\vec{u}+\vec{v}| = |(1, 1)| = \sqrt{2}$ y $|\vec{u}|+|\vec{v}| = 1+1 = 2$

d) Verdadero. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

77. Da un ejemplo de tres vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tales que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean linealmente independientes, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean también linealmente independientes, pero $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

$\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2)$

78. Demuestra que si $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$ entonces los puntos *A* y *D* son el mismo.

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow A \equiv D$

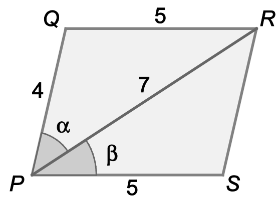
PROBLEMAS

79. El paralelogramo *PQRS* verifica que *PQ* = 4 cm, *PR* = 7 cm y *PS* = 5 cm.

a) Calcula $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{SP}$ y $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PR}$.

b) Calcula los ángulos del paralelogramo.

Aplicando el teorema del coseno en los triángulos *PQR* y *PRS*:



$$\cos\alpha = \frac{16+49-25}{56} = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = 44{,}42^\circ$$

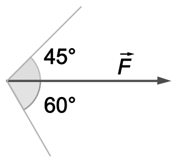
$$\cos\beta = \frac{25+49-16}{70} = \frac{29}{35} \Rightarrow \alpha = 34{,}05^\circ$$

a) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = 4\cdot 7\cdot\cos\alpha = 4\cdot 7\cdot\dfrac{5}{7} = 20$ $\qquad$ $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{SP} = 7\cdot 4\cdot\cos(\alpha+\beta) = 5{,}6$

$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot 7\cdot\cos\beta = 5\cdot 7\cdot\dfrac{29}{35} = 29$ $\qquad$ $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot 7\cdot\cos\beta = 29$

b) $\alpha+\beta = 78{,}47^\circ$ y $180^\circ-(\alpha+\beta) = 101{,}53^\circ$

80. Descompón una fuerza $\vec{F}$ de 15 Newton en otras dos que formen con ella ángulos de 45º y 60º.



$$\begin{cases} \left|\vec{F}_2\right|^2 = \left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{F}_1\right|\cdot\left|\vec{F}\right|\cdot\cos 45^\circ \\ \left|\vec{F}_1\right|^2 = \left|\vec{F}_2\right|^2 + \left|\vec{F}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{F}_2\right|\cdot\left|\vec{F}\right|\cdot\cos 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{F}_2\right|^2 = \left|\vec{F}_1\right|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F}_1\right| \\ \left|\vec{F}_1\right|^2 = \left|\vec{F}_2\right|^2 + 225 - 15\cdot\left|\vec{F}_2\right| \end{cases}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

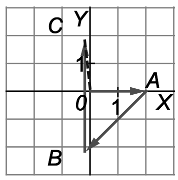
$$\left|\vec{F}_2\right|^2 = \left|\vec{F}_2\right|^2 + 225 - 15\cdot\left|\vec{F}_2\right| + 225 - 15\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F}_1\right| \Rightarrow 15\left|\vec{F}_2\right| + 15\sqrt{2}\left|\vec{F}_1\right| = 450 \Rightarrow \left|\vec{F}_2\right| + \sqrt{2}\left|\vec{F}_1\right| = 30 \Rightarrow \left|\vec{F}_2\right| = 30 - \sqrt{2}\left|\vec{F}_1\right|$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\left(30-\sqrt{2}\left|\vec{F}_1\right|\right)^2 = \left|\vec{F}_1\right|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F}_1\right| \Rightarrow 900 + 2\left|\vec{F}_1\right|^2 - 60\sqrt{2}\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_1\right|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F}_1\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_1\right|^2 - 45\sqrt{2}\left|\vec{F}_1\right| + 675 = 0 \Rightarrow \left|\vec{F}_1\right| = \frac{45\sqrt{2}-15\sqrt{6}}{2} = 13{,}45\text{ N},\ \left|\vec{F}_2\right| = 30-\sqrt{2}\left|\vec{F}_1\right| = 10{,}98\text{ N}$$

81. Jorge realiza una excursión en tres etapas. En la primera se dirige hacia el Este y anda 2 km. En la segunda sigue andando 3 km pero esta vez en dirección Sudoeste. Finalmente, anda 4 km en dirección Norte. ¿Qué distancia le separa del punto de partida al finalizar la excursión? Realiza, usando vectores, un esquema del trayecto seguido.

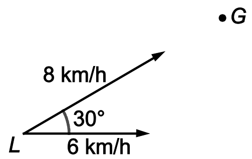


Si se considera el sistema de referencia de la figura, el trayecto de Jorge es $O \to A \to B \to C$:

$$O(0,\,0),\ A(2,\,0),\ B(2+3\cos 225^\circ,\ +3\,\text{sen}\,225^\circ) = \left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } C\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)$$

La distancia del punto de salida es, por tanto: $\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{29-18\sqrt{2}} = 1{,}88$ km

82. Lola está paseando a su perra Lúa. En un momento dado, en el que se encuentran en el punto *L*, la perra ve un gato situado en *G* y tira hacia él con una velocidad de 8 km/h y con una dirección de 30º sobre la dirección de paseo, tal y como muestra la figura. Por su parte Lola tira con una velocidad de 6 km/h en la dirección de su paseo.



Calcula el vector velocidad resultante dando su módulo y dirección.

Tomando el sistema de referencia centrado en *L* y con ejes la dirección del paseo y su perpendicular, se pueden escribir vectorialmente las velocidades de Lola y Lúa como $\vec{a} = (6,\ 0)$ y $\vec{b} = (8\cos 30º,\ 8\,\text{sen}\,30º) = \left(4\sqrt{3},\ 4\right)$, respectivamente.

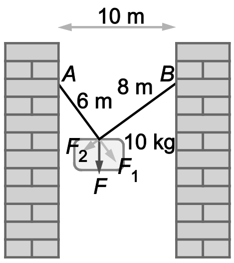
Por tanto, la velocidad resultante es $\vec{a} + \vec{b} = \left(6 + 4\sqrt{3},\ 4\right)$, con módulo $\sqrt{\left(6 + 4\sqrt{3}\right)^2 + 16} = 13{,}53$ km/h y dirección 17,19º respecto de la horizontal.

83. Los módulos de dos vectores valen 15 y 12 unidades de longitud respectivamente. El módulo de la suma de dichos vectores es 8 unidades de longitud. Calcula el producto escalar de los vectores y el ángulo que forman.

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left|\vec{v}\right|^2 \Rightarrow 64 = 225 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 144 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = -152{,}5$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|} = \frac{-152{,}5}{15\cdot 12} = -0{,}8472 \Rightarrow \alpha = 147{,}91º$$

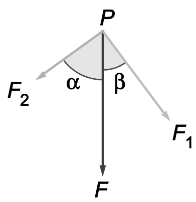
84. Una pesa está suspendida en una cuerda sujeta a dos puntos *A* y *B* de igual altura y ubicados en dos paredes que distan 10 m, tal y como muestra la figura.



La cuerda tiene una longitud de 14 m y la pesa está situada a 6 m de *A* y 8 m de *B*.

La masa de la pesa es de 10 kg y, por tanto, la fuerza que ejerce es *F* =98 N.

Calcula los valores de las fuerzas F_1 y F_2 en los que se descompone la fuerza *F*. ¿Qué interpretación puedes dar a estas fuerzas? Calcula los ángulos que forman con la fuerza *F*.



El triángulo *ABP* es rectángulo en *P* ya que $10^2 = 6^2 + 8^2$, por tanto:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},\ \text{tg}\,\beta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},\ \text{sen}\,\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}\ \text{y}\ \cos\alpha = \text{sen}\,\beta = \frac{3}{5}$$

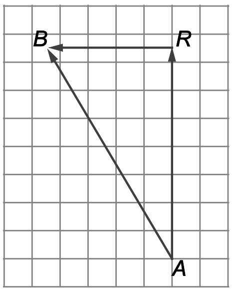
$$\left|\vec{F_1}\right| = 98\cdot\cos\beta = 98\cdot\frac{4}{5} = 78{,}4\ \text{N},\ \left|\vec{F_2}\right| = 98\cdot\cos\alpha = 98\cdot\frac{3}{5} = 58{,}8\ \text{N},\ \alpha = 53{,}13º\ \text{y}\ \beta = 36{,}87º$$

85. Un coche viaja a 100 km/h durante 45 minutos en dirección Norte hasta llegar a una rotonda donde realiza un giro de 270º. En la nueva carretera, circula durante 30 minutos a una velocidad de 90 km/h.

a) Usando vectores, dibuja un esquema de la situación.

b) Indica cuál es el módulo, dirección y sentido del vector desplazamiento total, siendo su origen el punto donde se inicia el recorrido y su extremo el punto donde se acaba.

a)

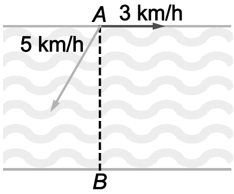


b) $AR = 100\cdot 0{,}75 = 75$ km, $RB = 90\cdot 0{,}5 = 45$ km

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{75^2 + 45^2} = 87{,}46 \text{ km}$$

$$\widehat{BAR} = \text{arctg}\frac{45}{75} = 30{,}96^{\circ}$$

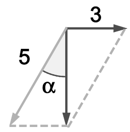
86. Daniel quiere cruzar un río de una orilla a otra y de forma perpendicular a ambas. Daniel consigue nadar con una velocidad de 5 km/h pero la corriente del río lleva una velocidad de 3 km/h.



a) ¿En qué dirección debe nadar para conseguir llegar al punto *B* situado justo enfrente del punto de salida *A*?

b) ¿Cuál será la velocidad resultante?

c) ¿Qué pasaría si la velocidad que consigue Daniel fuese menor que la velocidad de la corriente?

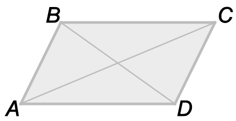


a) $\alpha = \text{arcsen}\frac{3}{5} \simeq 36{,}87^{\circ}$, Daniel debe nadar con 36,87º respecto de la perpendicular al río.

b) La velocidad resultante será $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ km/h

c) No existiría ninguna dirección con la que Daniel consiguiese llegar al punto *B* situado justo enfrente del punto de salida *A*, ya que el arcsen no estaría definido en este caso.

87. Dado el paralelogramo *ABCD* demuestra que la suma de los cuadrados de las dos diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de dos lados consecutivos del paralelogramo. Para ello, ayúdate del cálculo vectorial y demuestra que $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$.

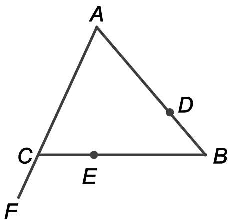


Aplicando las fórmulas de ejercicio resuelto 27:

$$\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$$

PARA PROFUNDIZAR

88. En la figura adjunta, del triangulo *ABC* se consideran los puntos *D*, *E* y *F* sobre las rectas que contienen sus lados, de forma que: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$ y $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.



Demuestra que *D*, *E* y *F* están alineados. Para ello:

a) Escoge una base conveniente y escribe los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$ como combinación lineal de los vectores de la base.

b) Con ayuda del apartado anterior, relaciona los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$.

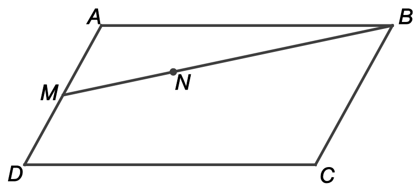
a) Se toma la base $\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\}$, así:

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{EC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) Los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$ son iguales por lo que *D*, *E* y *F* están alineados

89. En la figura:



- ***ABCD* es un paralelogramo.**
- ***M* es el punto medio del segmento *AD*.**
- $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM}$

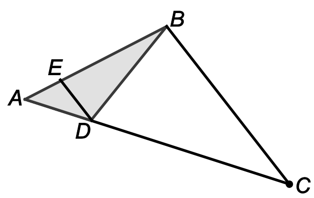
Demuestra que los puntos *C*, *N* y *A* están alineados.

En la base $\{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\}$ tenemos: *A*(0, 1), *B*(1, 1), *C*(1, 0), *D*(0, 0) y $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Por tanto, si $N(n_1, n_2)$: $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM} \Rightarrow (n_1 - 1, n_2 - 1) = (-2n_1, 1 - 2n_2) \Rightarrow n_1 = \frac{1}{3}, n_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow N\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

De este modo, $\overrightarrow{CN} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $\overrightarrow{CA} = (-1, 1)$ son proporcionales, por lo que *C*, *N* y *A* están alineados.

90. En la figura:



- ***ABC* es un triángulo cualquiera.**
- $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$

Demuestra que las rectas *BC* y *ED* son paralelas.

En la base $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\}$ tenemos *A*(0, 0), *B*(0, 1), *C*(4, 0), *D*(1, 0) y $E\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Por tanto, $\overrightarrow{BC} = (4, -1)$ y $\overrightarrow{ED} = \left(1, -\frac{1}{4}\right)$ son proporcionales, es decir, las rectas *BC* y *ED* son paralelas.

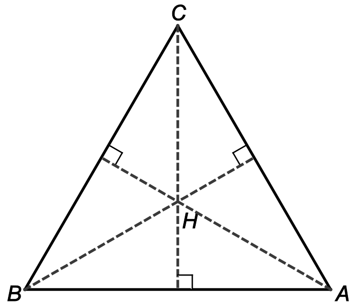
91. Con la ayuda del cálculo vectorial, demuestra el teorema del coseno en un triángulo ABC. Para ello, utiliza el producto escalar.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}}\right) + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 \Rightarrow c^2 = b^2 + 2ba\cos\left(180º - \hat{C}\right) + a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos\hat{C}$$

92. Con la ayuda del cálculo vectorial, demuestra que las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

Consideremos un triángulo *ABC* y sus alturas trazadas desde *A* y *B*, que se cortarán en un punto *H*. Queremos probar que *H* también pertenece a la altura trazada desde *C*.



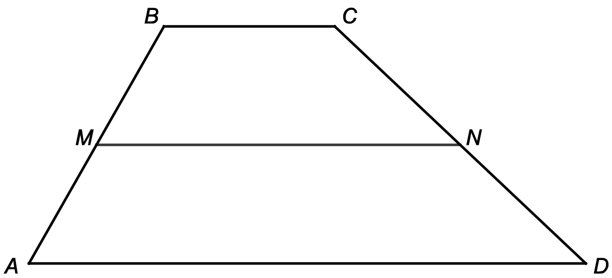
Para ello observemos que $\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares, igual que lo son $\overrightarrow{BH}$ y $\overrightarrow{AC}$, y basta demostrar que también lo son $\overrightarrow{CH}$ y $\overrightarrow{AB}$, es decir, que $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BH}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+0=$$

$$=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HB}\right)=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HA}=0$$

93. Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralela a las bases.

Consideremos un trapecio *ABCD* con lados no paralelos *AB* y *CD*, y sean *M* y *N* los respectivos puntos medios de estos lados.



Tenemos:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

Y, como $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son paralelos, se concluye que $\overrightarrow{MN}$ también es paralelo a estos dos vectores.