

5 Geometría analítica

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Comprueba si los puntos $A(-2, 3)$, $B(2, -3)$ y $C(-2, 5)$ pertenecen o no a la recta que pasa por $P(-2, 6)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (0, -3)$. Calcula dos puntos más de esta recta.

La recta que pasa por $P(-2, 6)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (0, -3)$, que es paralelo al eje Y , es la recta vertical $r: x = -2$, por lo que únicamente los puntos cuya abscisa sea -2 pertenecen a la recta, es decir, A y C pertenecen a r pero B no.

4. Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes que pasan por el punto $A(-3, 5)$.

La recta paralela al eje X que pasa por A es $y = 5$, y la recta paralela al eje Y que pasa por A es $x = -3$.

5. Indica dos puntos y el vector director de la recta $r: 8x + y = 7$.

Dos puntos de la recta son, por ejemplo, $A(1, -1)$ y $B(0, 7)$, el vector director es $\overline{AB} = (-1, 8)$.

6. En cada caso, calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(2, -5)$ y $B(1, -3)$

b) $A(-2, -4)$ y $B(3, -2)$

- a) El vector director es $\overline{AB} = (-1, 2)$ y la recta pasa por $A(2, -5)$. Por tanto:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow 2x-4 = -y-5 \Rightarrow 2x+y+1=0$$

- b) El vector director es $\overline{AB} = (5, 2)$ y la recta pasa por $A(-2, -4)$. Por tanto:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow 2x+4 = 5y+20 \Rightarrow 2x-5y-16=0$$

7. Halla el valor de k para que la recta que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(3, k)$ pase por el punto $C(0, -4)$.

C pertenece a la recta que pasa por A y B si y sólo si los vectores $\overline{AB} = (1, k+1)$ y $\overline{AC} = (-2, -3)$ son proporcionales. Por tanto:

$$\frac{1}{-2} = \frac{k+1}{-3} \Rightarrow -2k-2 = -3 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

8. Halla k para que: $r: (k+5)x - (3+k)y = 1 - k$ pase por $P(2, 3)$.

Sustituyendo las coordenadas de P en la ecuación de la recta tenemos $2(k+5) - 3(3+k) = 1 - k \Rightarrow 0 = 0$, por tanto, el punto P pertenece a r para cualquier valor real de k .

9 a 11. Ejercicios resueltos.

12. Indica un vector director y otro normal de la recta de ecuación $-3x + 2y - 4 = 0$.

Un vector normal es $\vec{n} = (-3, 2)$ y un vector director es $\vec{u} = (2, 3)$.

13. Halla un vector director y otro normal de la recta que pasa por el punto $A\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ y por el origen de coordenadas.

Vector director: $\vec{OA} = \left(-2, \frac{1}{3}\right) \approx (-6, 1)$

Vector normal: $\vec{n} = (1, 6)$

14. Una recta tiene como vector normal a $\vec{n} = (2, -3)$ y pasa por el punto $A(-1, 2)$. Escribe su ecuación general.

La ecuación general es de la forma $2x - 3y + k = 0$. Como la recta pasa por A , ha de ser $-2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 8$.

Por tanto, la ecuación general de la recta es $2x - 3y + 8 = 0$.

15. Halla la ecuación normal de la recta que pasa por $P(1, -3)$ y es perpendicular a la que pasa por $A(0, 2)$ y $B(-1, 0)$.

La recta tiene vector director $\vec{AB} = (-1, -2) \approx (1, 2)$ y pasa por el punto P , por tanto, su ecuación normal es:

$$(x - 1) + 2(y + 3) = 0 \text{ o } x + 2y + 5 = 0.$$

16. Escribe la ecuación de la recta perpendicular a $3x - 6y = 1$ y que pasa por el punto $A(-3, 2)$

Todas las perpendiculares a $3x - 6y = 1$ son de la forma $6x + 3y + k = 0$. Obligando a que A pertenezca a la perpendicular tenemos $-18 + 6 + k = 0 \Rightarrow k = 12$ y, por tanto, la ecuación de la recta perpendicular es

$$6x + 3y + 12 = 0 \Rightarrow 2x + y + 4 = 0.$$

17. Halla la ecuación de la recta perpendicular a $5x + 4y - 3 = 0$ que corta a la recta $6(x - 1) - (y - 1) = 0$ en $x = 1$.

Todas las rectas perpendiculares a $5x + 4y - 3 = 0$ son de la forma $4x - 5y + k = 0$. Obligando a que corte a $6(x - 1) - (y - 1) = 0$ en $x = 1$, es decir, a que pase por el punto $(1, 1)$ tenemos $4 - 5 + k = 0 \Rightarrow k = 1$. Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular es $4x - 5y + 1 = 0$.

18. Halla la ecuación de la recta perpendicular al segmento de extremos $A(0, -2)$ y $B(1, 4)$ y que pasa por el punto $C(3, 0)$.

La recta tiene vector normal $\vec{AB} = (1, 6)$ y pasa por el punto C , por tanto, su ecuación es:

$$1(x - 3) + 6(y - 0) = 0 \Rightarrow x + 6y - 3 = 0$$

19. Considera el triángulo de vértices $A(5, 3)$, $B(7, -1)$ y $C(1, -1)$. Halla la altura correspondiente al vértice A .

La altura correspondiente al vértice A pasa por este punto y es perpendicular a $\vec{BC} = (-6, 0) \approx (1, 0)$, por tanto su ecuación es $(x - 5) + 0(y - 3) = 0 \Rightarrow x = 5$.

20. Ejercicio resuelto.

21. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y tiene de pendiente $m = \frac{1}{2}$.

La ecuación de la recta es de la forma $y = \frac{1}{2}x + n$. Como pasa por A : $4 = -1 + n \Rightarrow n = 5$. Por tanto, la ecuación es $y = \frac{x}{2} + 5 \Rightarrow x - 2y + 10 = 0$.

22. Indica el vector director y la pendiente de las siguientes rectas:

a) $-2x + y + 7 = 0$ b) $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ c) $y = 5x - 3$ d) $x + 4 = \frac{y-1}{2}$

a) Vector director: $\vec{u} = (1, 2)$. Pendiente: $m = \frac{2}{1} = 2$.

b) Vector director: $\vec{u} = (3, -1)$. Pendiente: $m = -\frac{1}{3}$.

c) Vector director: $\vec{u} = (1, 5)$. Pendiente: $m = 5$.

d) Vector director: $\vec{u} = (1, 2)$. Pendiente: $m = \frac{2}{1} = 2$.

23. Calcula la ecuación de la recta que tiene doble pendiente que la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y que pasa por el origen de coordenadas.

La pendiente es $m = 2$ y pasa por $O(0, 0)$, por tanto, la ecuación es $y = 2x$.

24. Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(-2, 5)$ y forma un ángulo de 120° con la parte positiva del eje X .

La pendiente es $m = -\sqrt{3}$ y pasa por A , por tanto, la ecuación es $y - 5 = -\sqrt{3}(x + 2)$.

25. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(-1, 5)$ y $B(2, -2)$ b) $A(1, 2)$ y $B(2, -1)$ c) $A(0, -5)$ y $B(5, 0)$ d) $A(-1, -4)$ y $B(2, -4)$

Sea $y = mx + n$ la ecuación explícita de la recta, donde m es la pendiente y n es la ordenada en el origen. Los puntos dados han de verificar la ecuación, por lo que se tiene:

a) $\begin{cases} -m + n = 5 \\ 2m + n = -2 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{7}{3}, n = \frac{8}{3}$

c) $\begin{cases} n = -5 \\ 5m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = -5$

b) $\begin{cases} m + n = 2 \\ 2m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -3, n = 5$

d) $\begin{cases} -m + n = -4 \\ 2m + n = -4 \end{cases} \Rightarrow m = 0, n = -4$

26. Halla la ecuación explícita y la punto-pendiente de la recta que pasa por $A(0, 5)$ y es perpendicular a $3x + 5y + 2 = 0$.

La recta buscada tiene vector director $\vec{u} = (3, 5)$, por tanto, tiene pendiente $m = \frac{5}{3}$, además pasa por A , con lo que su ecuación punto-pendiente es $y - 5 = \frac{5}{3}x$ y su ecuación explícita es $y = \frac{5}{3}x + 5$.



27. Ejercicio interactivo.

28 a 30. Ejercicios resueltos.

31. Indica, en cada caso, si las rectas r y s son paralelas o secantes y, en este último caso, obtén el punto de intersección:

a) $r: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2s \\ y = -s \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: 2x + 5y - 5 = 0 \\ s: 3x - 5y + 5 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2 - 4t = 2s \\ 3 + 2t = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t + s = 1 \\ 2t + s = -3 \end{cases}$ Como el sistema es incompatible, las dos rectas son paralelas.

b) $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{-5} \Rightarrow$ Son rectas secantes. Calculamos el punto de corte: $\begin{cases} 2x + 5y - 5 = 0 \\ 3x - 5y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1 \Rightarrow P(0, 1)$

32. Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta $r: 2x + y + 1 = 0$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $s: x - y + 5 = 0$ y $t: x + y + 1 = 0$.

Se calcula el punto de intersección de s y t :

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3, y = 2 \Rightarrow P(-3, 2)$$

El haz de rectas paralelas a r tiene ecuación $2x + y + K = 0$. Como la recta buscada pasa por P , se tiene:

$$-6 + 2 + K = 0 \Rightarrow K = 4. \text{ Por tanto, la ecuación de la recta buscada es } 2x + y + 4 = 0.$$

33. Halla la ecuación del haz cuyo vértice es $P(-5, 4)$.

$$\{y - 4 = m(x + 5), m \in \mathbb{R}\} \cup \{x = -5\}$$

34 y 35. Ejercicios resueltos.

36. Calcula k para que la distancia entre las rectas $5x + 12y - k = 0$ y $5x + 12y + 15 = 0$ sea 2.

Observemos que las rectas dadas son paralelas. Tenemos:

$$d(r, s) = 2 \Rightarrow \frac{|-k - 15|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 2 \Rightarrow |-k - 15| = 26 \Rightarrow \begin{cases} -15 - k = 26 \\ -15 - k = -26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -41 \\ k = 11 \end{cases}$$

37. Comprueba si los siguientes triángulos son equiláteros, isósceles o escalenos:

a) $A(-2, 1), B(0, 3)$ y $C(3, 7)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $C\left(1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u, $d(B, C) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ u y $d(C, A) = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$ u

Por tanto, se trata de un triángulo escaleno.

b) $d(A, B) = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ u, $d(B, C) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ u y $d(C, A) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ u

Por tanto, se trata de un triángulo equilátero.

38. Calcula el área del triángulo determinado por $O(0, 0)$ y las intersecciones de la recta $x + 2y = 4$ con los ejes.

El triángulo tiene por vértices $O(0, 0)$, $A(0, 2)$ y $B(4, 0)$.

El área del triángulo es $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$ con: base = $d(O, B) = 4$ u, altura = $d(O, A) = 2$ u

$$\text{Por tanto, } A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ u}^2$$

39. Calcula la medida de las alturas del triángulo de vértices $A(4, 1)$, $B(-1, 3)$ y $C(0, 4)$.

$AB: 2x + 5y - 13 = 0$, $BC: x - y + 4 = 0$ y $AC: 3x + 4y - 16 = 0$, por tanto, las alturas miden:

$$h_{AB} = d(C, AB) = \frac{|20 - 13|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{7}{\sqrt{29}} = \frac{7\sqrt{29}}{29} \text{ u} \quad h_{BC} = d(A, BC) = \frac{|4 - 1 + 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ u}$$

$$h_{AC} = d(B, AC) = \frac{|-3 + 12 - 16|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{7}{5} \text{ u}$$

40. Halla la distancia del punto $C(10, 0)$ a la recta que pasa por $A(-2, 3)$ y $B(2, 2)$. ¿Cuál es la posición relativa de A , B y C ?

La recta AB tiene vector director $\overline{AB} = (4, -1)$ y pasa por A , su ecuación es: $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow x + 4y - 10 = 0$.

$$d(C, AB) = \frac{|10 - 10|}{\sqrt{1 + 16}} = 0 \text{ u}, \text{ lo que significa que } C \text{ pertenece a la recta } AB, \text{ es decir, } A, B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

41. Ejercicio resuelto.

42. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) $r: 3x - 4y = 0$ y $s: 2x + 2y + 3 = 0$

b) $r: y = x - 5$ y $s: y = 2x + 2$

a) Vectores normales: $\overline{n}_r = (3, -4)$ y $\overline{n}_s = (2, 2)$. Luego: $\cos \alpha = \cos(\widehat{r, s}) = \frac{|\overline{n}_r \cdot \overline{n}_s|}{|\overline{n}_r| \cdot |\overline{n}_s|} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \alpha = 81,87^\circ$

b) Las pendientes son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$, por tanto, $\text{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{1 - 2}{1 + 2} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18,43^\circ$.

43. Calcula el ángulo formado por $r: 4x + 2y - 7 = 0$ y el eje Y .

Los vectores normales son $\overline{n}_1 = (4, 2)$ y $\overline{n}_2 = (1, 0)$, luego $\cos \alpha = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1| |\overline{n}_2|} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26,57^\circ$

44. Calcula la recta perpendicular a $r: x + y - 3 = 0$ y que pasa por el punto $P(-3, 3)$.

La pendiente de la recta r es $m = -1$, por tanto, la pendiente de una recta perpendicular a ella es $m' = 1$.

Así, la ecuación de la recta buscada es $y - 3 = x + 3 \Rightarrow y = x + 6$

45 y 46. Ejercicios resueltos.

47. Calcula el simétrico de $P(-2, 3)$ respecto del punto $M(1, -4)$.

Sea $P'(a, b)$ el punto buscado, M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Por tanto:

$$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right) = (1, -4) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2+a}{2} = 1 \\ \frac{3+b}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = -11 \Rightarrow P'(4, -11)$$

48. Halla la recta simétrica del eje de ordenadas respecto de $y = x + 1$.

Calculamos el punto Q de intersección de ambas rectas ya que es el único invariante por la simetría: $Q(0, 1)$

Para calcular la recta simétrica indicada basta con determinar el simétrico P' de otro punto cualquiera, P , del eje de ordenadas, ya que la recta buscada quedará determinada por los puntos Q y P' .

Tomando $P(0, -1)$, la recta perpendicular a $y = x + 1$ que pasa por P es $y = -x - 1$.

Ambas rectas se cortan en $M(-1, 0)$ y M debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, por lo que $P'(-2, 1)$.

Por lo tanto, la recta simétrica buscada es la que pasa por Q y P' , cuya ecuación es $y = 1$.

49. Determina el triángulo simétrico del $k(4, 0)$, $B(-1, 6)$ y $C(-1, -1)$ respecto de la simetría central con centro el origen de coordenadas.

El simétrico de un punto $P(a, b)$ respecto de la simetría central con centro $O(0, 0)$ es $P'(-a, -b)$.

Por tanto, los vértices del triángulo simétrico son $A'(-4, 0)$, $B'(1, -6)$ y $C'(1, 1)$.

50. Encuentra el triángulo simétrico del $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ y $P(-2, -2)$ respecto de la simetría axial con eje la recta $y = x$.

El simétrico de un punto $P(a, b)$ respecto de la simetría axial con eje la recta $y = x$ es $P'(b, a)$.

Por tanto, los vértices del triángulo simétrico son $A'(0, 3)$, $B'(3, 0)$ y $C'(-2, -2)$.

51. Halla el extremo B del segmento \overline{AB} siendo $A(2, 1)$ y sabiendo que la mediatriz del segmento es $r: x + 2y - 9 = 0$.

Sea $B(a, b)$, como la mediatriz es perpendicular a $\overline{AB} = (a-2, b-1)$, este vector debe ser proporcional a $\vec{n}_r = (1, 2)$. Además, el punto medio del segmento \overline{AB} debe pertenecer a r , por tanto:

$$\begin{cases} \frac{a-2}{1} = \frac{b-1}{2} \\ \frac{2+a}{2} + 2\frac{1+b}{2} - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ a + 2b = 14 \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = 5 \Rightarrow B(4, 5)$$

52. Ejercicio interactivo.

53. Halla la mediatriz del segmento de extremos $A(-1, 3)$ y $B(5, -3)$.

Los puntos $P(x, y)$ de la mediatriz verifican: $d(A, X) = d(B, X) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

54. Halla el punto de la recta $r: x - 3y - 11 = 0$ que equidista de los puntos $A(-2, 3)$ y $B(6, -1)$.

Los puntos que equidistan de A y B pertenecen a la mediatriz del segmento \overline{AB} , de ecuación:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 2y + 1 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

Por tanto, el punto P buscado es la intersección de la mediatriz con r : $\begin{cases} x - 3y - 11 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{2}{5}, -\frac{19}{5}\right)$

55. Dadas las rectas $r: x - 3y + 4 = 0$ y $s: x + y = 0$, obtén sus bisectrices, comprueba que se cortan en el punto de intersección de r y s y que son perpendiculares.

Los puntos $P(x, y)$ de las bisectrices verifican:

$$d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|x - 3y + 4|}{\sqrt{10}} = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{x - 3y + 4}{\sqrt{10}} = \pm \frac{x + y}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} b_1: (\sqrt{5} - 1)x + (\sqrt{5} + 3)y - 4 = 0 \\ b_2: (\sqrt{5} + 1)x + (\sqrt{5} - 3)y + 4 = 0 \end{cases}$$

El punto de corte de las rectas es: $\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 1 \Rightarrow P(-1, 1)$

P verifica la ecuación de cada una de las bisectrices: $\begin{cases} (\sqrt{5} - 1)(-1) + (\sqrt{5} + 3) \cdot 1 - 4 = -\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} + 3 - 4 = 0 \\ (\sqrt{5} + 1)(-1) + (\sqrt{5} - 3) \cdot 1 + 4 = -\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} - 3 + 4 = 0 \end{cases}$

Los vectores normales a b_1 y b_2 son, respectivamente, $\vec{n}_1 = (\sqrt{5} - 1, \sqrt{5} + 3)$ y $\vec{n}_2 = (\sqrt{5} + 1, \sqrt{5} - 3)$, que verifican $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 5 - 1 + 5 - 9 = 0$, por lo que ambas bisectrices son perpendiculares.

56. Halla los puntos de la recta $r: y = -x + 6$ que equidistan de las rectas $s: 3x - y = 1$ y $t: 3x + y = 5$.

Los puntos que equidistan de s y t son los pertenecientes a sus bisectrices, de ecuaciones:

$$\frac{|3x - y - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x + y - 5|}{\sqrt{10}} \Rightarrow 3x - y - 1 = \pm(3x + y - 5) \Rightarrow \begin{cases} b_1: y = 2 \\ b_2: x = 1 \end{cases}$$

Los puntos buscados son, por tanto, los puntos de corte de r con cada una de las bisectrices: $P_1(4, 2)$ y $P_2(1, 5)$.

57. Dado el triángulo de vértices $A(5, 1)$, $B(3, 7)$ y $C(-2, 3)$:

a) Calcula el circuncentro. b) Calcula el incentro. c) Calcula el baricentro.

a) El circuncentro, T , es el punto de corte de las mediatrices del triángulo. Por tanto:

$$\begin{cases} \sqrt{(5-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (7-y)^2} \\ \sqrt{(5-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(-2-x)^2 + (3-y)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 12y = 32 \\ -14x + 4y = -13 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{71}{38}, y = \frac{125}{38} \Rightarrow T\left(\frac{71}{38}, \frac{125}{38}\right)$$

b) El incentro, I , es el punto de corte de las bisectrices interiores del triángulo. Por tanto:

$$\text{Recta } AB: 3x + y - 16 = 0 \quad \text{Recta } BC: 4x - 5y + 23 = 0 \quad \text{Recta } AC: 2x + 7y - 17 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{|3x + y - 16|}{\sqrt{10}} = \frac{|4x - 5y + 23|}{\sqrt{41}} \\ \frac{|3x + y - 16|}{\sqrt{10}} = \frac{|2x + 7y - 17|}{\sqrt{53}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3\sqrt{53} + 2\sqrt{10})x + (\sqrt{53} + 7\sqrt{10})y = 17\sqrt{10} + 16\sqrt{53} \\ (3\sqrt{41} + 4\sqrt{10})x + (\sqrt{41} - 5\sqrt{10})y = 16\sqrt{41} - 23\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow I(2,06; 3,82)$$

c) El baricentro, G , es el punto de corte de las mediatrices del triángulo. Por tanto:

$$\text{Punto medio de } AB: M_1(4, 4) \quad \text{Punto medio de } BC: M_2\left(\frac{1}{2}, 5\right)$$

$$\begin{cases} CM_1: x - 6y + 20 = 0 \\ AM_2: 8 + 9y - 49 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = \frac{11}{3} \Rightarrow T\left(2, \frac{11}{3}\right)$$

58 a 65. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Ecuaciones de la recta

66. Para cada una de las siguientes rectas, indica si los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(3, -1)$ pertenecen o no a ellas y calcula un punto más de cada una:

a) $r_1: (x, y) = (7, -2) + \lambda(4, -1)$ b) $r_2: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$ c) $r_3: 2x + 5y = 1$ d) $r_4: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5}$

a) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$(-2, 1) = (7, -2) + \lambda(4, -1) \Rightarrow \begin{cases} -2 = 7 + 4\lambda \\ 1 = -2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{9}{4} \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow P \notin r_1$$

$$(3, -1) = (7, -2) + \lambda(4, -1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = 7 + 4\lambda \\ -1 = -2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Q \in r_1$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ , por ejemplo, tomando $\lambda = 0$ obtenemos el punto $R(7, -2)$

b) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en las ecuaciones, se tiene:

$$\begin{cases} -2 = -2 + \lambda \\ 1 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow P \in r_2$$

$$\begin{cases} 3 = -2 + \lambda \\ -1 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Q \notin r_2$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ , por ejemplo, tomando $\lambda = 1$ obtenemos el punto $R(-1, 3)$

c) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$2(-2) + 5 \cdot 1 = 1 \Rightarrow P \in r_3 \quad 2 \cdot 3 + 5(-1) = 1 \Rightarrow Q \in r_3 \quad \text{Otro punto de la recta es, por ejemplo, } R(-7, 3)$$

d) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$\frac{-2+1}{2} \neq \frac{1-2}{5} \Rightarrow P \notin r_4 \quad \frac{3+1}{2} \neq \frac{-1-2}{5} \Rightarrow Q \notin r_4$$

67. Obtén la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas.

a) La recta que pasa por el punto $P(-3, 1)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-1, -2)$.

b) La recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(1, 4)$.

c) La recta que tiene como uno de sus vectores de dirección el $\vec{u} = (-3, 3)$ y corta a la parte positiva del eje de abscisas en un punto que dista 3 unidades del origen de coordenadas.

d) La recta que tiene como vector director el $\vec{u} = (2, -5)$ y corta a la parte negativa del eje de abscisas en un punto que dista 2 unidades del origen de coordenadas.

e) La recta que tiene por dirección la del vector $\vec{u} = (3, 7)$ y corta a la parte negativa del de abcisas en un punto que dista 2 unidades a la izquierda del origen de coordenadas.

a) E. vectorial: $r: (x, y) = (-3, 1) + \lambda(-1, -2)$ E. paramétricas: $r: \begin{cases} x = -3 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$

b) Vector director: $\overline{AB} = (-1, 7)$ E. vectorial: $r: (x, y) = (2, -3) + \lambda(-1, 7)$ E. paramétricas: $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -3 + 7\lambda \end{cases}$

c) E. vectorial: $r: (x, y) = (3, 0) + \lambda(-3, 3)$ E. paramétricas: $r: \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$

d) E. vectorial: $r: (x, y) = (-2, 0) + \lambda(2, -5)$ E. paramétricas: $r: \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = -5\lambda \end{cases}$

e) E. vectorial: $r: (x, y) = (-2, 0) + \lambda(3, 7)$ E. paramétricas: $r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 7\lambda \end{cases}$

68. Para cada una de las siguientes rectas, determina la ecuación continua y la ecuación general.

- a) Pasa por el punto $A(-3, -4)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (1, -2)$.
- b) Pasa por los puntos $P(2, -5)$ y $Q(5, 1)$.
- c) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto $B(-3, 4)$.
- d) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento de extremos $M(1, -3)$ y $N(5, 2)$.
- e) Pasa por el punto $P(-2, 7)$ y es perpendicular al segmento de extremos $M(-1, -3)$ y $N(0, 4)$.

a) Ecuación continua: $\frac{x+3}{1} = \frac{y+4}{-2}$ Ecuación general: $-2x - 6 = y + 4 \Rightarrow 2x + y + 10 = 0$

b) Ecuación continua: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{6}$ Ecuación general: $6x - 12 = 3y + 15 \Rightarrow 2x - y - 9 = 0$

c) Ecuación continua: $\frac{x}{-3} = \frac{y}{4}$ Ecuación general: $4x + 3y = 0$

d) El punto medio del segmento \overline{MN} es $P\left(3, -\frac{1}{2}\right)$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-\frac{1}{2}}$ Ecuación general: $-\frac{1}{2}x = 3y \Rightarrow x + 6y = 0$

e) Vector normal: $\vec{n} = \overline{MN} = (1, 7)$ Vector director: $\vec{u} = (7, -1)$

Ecuación continua: $\frac{x+2}{7} = \frac{y-7}{-1}$ Ecuación general: $-x - 2 = 7y - 49 \Rightarrow x + 7y - 47 = 0$

69. Halla un vector director y otro normal a cada una de las siguientes rectas.

a) $r: -2x + 3y = 5$

b) $s: x - \frac{3}{2}y + 1 = 0$

c) Pasa por los puntos $A(2, -5)$ y $B(-5, -1)$.

d) Pasa por $O(0, 0)$ y por el punto medio del segmento \overline{AB} con $A(2, 6)$ y $B(-2, -4)$.

e) Mediatriz del segmento de extremos $P(3, 5)$ y $Q(5, 2)$.

a) Vector normal: $\vec{n} = (-2, 3)$ Vector director: $\vec{u} = (3, 2)$

b) Vector normal: $\vec{n} = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$ Vector director: $\vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

c) Vector director: $\vec{u} = \overline{AB} = (-7, 4)$ Vector normal: $\vec{n} = (4, 7)$

d) El punto medio del segmento es $M(0, 1)$

Vector director: $\vec{u} = \overline{MO} = (0, -1)$ Vector normal: $\vec{n} = (1, 0)$

e) Vector normal: $\vec{n} = \overline{PQ} = (2, -3)$ Vector director: $\vec{u} = (3, 2)$

70. Obténlas ecuaciones de los lados del triángulo de vértices $P(1, 3)$, $Q(-4, 0)$ y $R(-2, -1)$. Para cada lado, halla un vector de dirección y otro normal.

Lado PQ . Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{PQ} = (-5, -3)$. Un vector normal es $\vec{n} = (3, -5)$.

La ecuación es $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow -3x+3 = -5y+15 \Rightarrow 3x-5y+12=0$

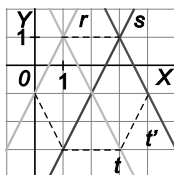
Lado QR . Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{QR} = (2, -1)$. Un vector normal es $\vec{n} = (1, 2)$.

La ecuación es $\frac{x+4}{2} = \frac{y-0}{-1} \Rightarrow -x-4 = 2y \Rightarrow x+2y+4=0$

Lado PR . Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{PR} = (-3, -4)$. Un vector normal es $\vec{n} = (4, -3)$.

La ecuación es $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-4} \Rightarrow -4x+4 = -3y+9 \Rightarrow 4x-3y+5=0$

71. Halla las ecuaciones punto-pendiente de las rectas r , s , t y t' de la figura.



La recta r pasa por $P_1(1, 1)$ y tiene pendiente $m_1 = 2$, así, su ecuación punto-pendiente es $y-1 = 2(x-1)$.

La recta s pasa por $P_2(3, 1)$ y tiene pendiente $m_2 = 2$, así, su ecuación punto-pendiente es $y-1 = 2(x-3)$.

La recta t pasa por $P_3(1, 1)$ y tiene pendiente $m_3 = -2$, así, su ecuación punto-pendiente es $y-1 = -2(x-1)$.

La recta t' pasa por $P_4(3, 1)$ y tiene pendiente $m_4 = -2$, así, su ecuación punto-pendiente es $y-1 = -2(x-3)$.

72. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) $r: y = -2x + 3$ b) $s: 4x + 3y - 6 = 0$ c) $t: \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 1 = 0$ d) $w: \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{3}$

e) La recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = -2$.

f) La recta que pasa por $P(-4, 3)$ y es paralela a $r: x - y + 3 = 0$.

a) La recta pasa por $P(0, 3)$, vector director $\vec{u} = (1, -2)$. Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$

b) La recta pasa por $P(0, 2)$, vector normal $\vec{n} = (4, 3)$ y director $\vec{u} = (-3, 4)$. Las ecuaciones son: $s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}$

c) La recta pasa por $P(2, 0)$, vector normal $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = (2, 3)$ y director $\vec{u} = (-3, 2)$. Ecuaciones: $t: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) La recta pasa por $P(4, -5)$, vector director $\vec{u} = (2, 3)$. Las ecuaciones son: $w: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \end{cases}$

e) La recta pasa por $O(0, 0)$, vector director $\vec{u} = (1, -2)$. Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$

f) La recta pasa por $P(-4, 3)$, vector normal $\vec{n} = (1, -1)$ y director $\vec{u} = (1, 1)$. Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$

73. Determina la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n} = (-1, 3)$ como vector normal y pasa por el origen de coordenadas.

La ecuación normal es $-1(x-0) + 3(y+0) = 0$.

La ecuación general es $-x + 3y = 0$.

74. Encuentra la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n} = (2, 4)$ como vector normal y pasa por el punto medio del segmento \overline{AB} siendo $A(0, -2)$ y $B(-3, 0)$.

El punto medio del segmento AB es $M\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

La ecuación normal es $2\left(x + \frac{3}{2}\right) + 4(y + 1) = 0$

La ecuación general es $2x + 4y + 7 = 0$

75. Calcula la pendiente de las siguientes rectas:

a) $r : y = -2x + 3$

b) $r : 2x - 3y + 5 = 0$

c) $r : -\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y - 5 = 0$

d) Recta que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(1, 3)$.

e) Recta que pasa por los puntos $P(1, a)$ y $Q(1, 3a)$.

f) Recta cuyo vector director es $\vec{u} = (-3, 5)$.

g) Recta cuyo vector normal es $\vec{n} = (2, -7)$.

h) $r : \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

a) $m = -2$

b) $2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{15}{2}x + 25 \Rightarrow m = \frac{15}{2}$

d) El vector director es $\vec{u} = \overline{PQ} = (2, 1)$, por tanto, la pendiente es $m = \frac{1}{2}$

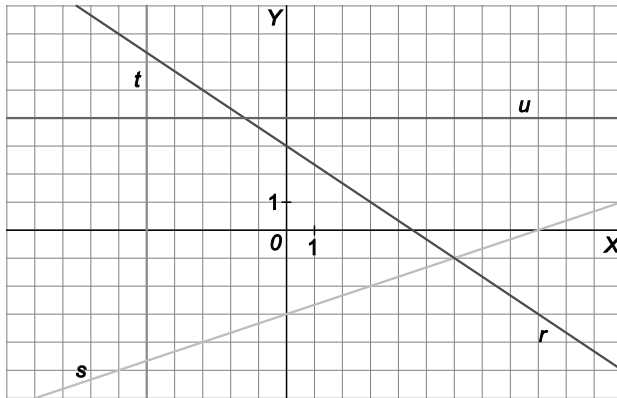
e) El vector director es $\vec{u} = \overline{PQ} = (0, 2a)$, la recta es vertical si $a \neq 0$ (si $a = 0$ no hay recta) y por tanto, como $m = \frac{2a}{0}$ tiene pendiente infinita.

f) $m = -\frac{5}{3}$

g) El vector director es $\vec{u} = (7, 2)$, por tanto, la pendiente es $m = \frac{2}{7}$

h) El vector director es $\vec{u} = (5, 2)$, por tanto, la pendiente es $m = \frac{2}{5}$

76. Indica el valor de las pendientes y de las ordenadas en el origen de las rectas de la figura y determina, para cada una de ellas, su ecuación general.



Recta r :

$$m = -\frac{2}{3}, n = 3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 3 \Rightarrow 2x + 3y - 9 = 0$$

Recta s :

$$m = \frac{1}{3}, n = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 3 \Rightarrow x - 3y - 9 = 0$$

Recta t :

$$m = \infty, \text{ no tiene ordenada en el origen} \Rightarrow x + 5 = 0$$

Recta u : $m = 0, n = 4 \Rightarrow y - 4 = 0$

77. Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $P(-2, -5)$ y forma con la parte positiva del eje de ordenadas un ángulo de 60° .

La recta forma un ángulo de 30° con la parte positiva del eje de abscisas, por lo que su pendiente es

$$m = \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La ecuación explícita es: $y + 5 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3} - 15}{3}$

78. Determina la ecuación de la recta paralela a la bisectriz del primer cuadrante que pasa por el punto $P(-6, -7)$.

La pendiente es $m = 1$, por tanto, la ecuación es: $y + 7 = x + 6 \Rightarrow y = x - 1$

79. Obtén la ecuación normal de la recta que pasa por el punto $P(3, -1)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-2, 3)$.

La recta tiene vector normal $\vec{n} = (3, 2)$, por tanto, su ecuación normal es: $3(x - 3) + 2(y + 1) = 0$

80. Obtén las ecuaciones explícitas de las rectas siguientes.

a) Pasa por $A(-1, 2)$ y tiene pendiente $m = 2$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, 4)$.

c) Pasa por $A(2, 3)$ y forma con la parte derecha del eje de abscisas un ángulo de 30° .

d) Pasa por $A(-2, 5)$ y forma con la parte izquierda del eje de abscisas un ángulo de 120° .

a) $y - 2 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 4$

b) El vector director es $\vec{u} = \overline{AB} = (3, 1)$, la ecuación explícita es: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x+1 = 3y-9 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

c) La pendiente es $m = \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, la ecuación explícita es: $y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{9 - 2\sqrt{3}}{3}$

d) La recta forma un ángulo de 60° con la parte derecha del eje de abscisas, por lo que tiene pendiente $m = \operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$, por tanto, la ecuación explícita es: $y - 5 = \sqrt{3}(x + 2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + (2\sqrt{3} + 5)$.

81. Determina las ecuaciones paramétricas, la ecuación general y la ecuación explícita de la recta r en los siguientes casos.

- a) Pasa por el punto $P(-3, 6)$ y es paralela a la recta de ecuación $-2x + 3y - 5 = 0$.
 b) Corta a los ejes coordenados en los puntos $P(0, -3)$ y $Q(-1, 0)$.
 c) Corta al eje de abscisas en el punto $P(2, 0)$ y pasa por el punto $Q(-2, 2)$.

a) La recta tiene vector director $\vec{u} = (3, 2)$, por tanto:

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 6 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\text{Ecuación general: } \frac{x+3}{3} = \frac{y-6}{2} \Rightarrow 2x+6 = 3y-18 \Rightarrow 2x-3y+24 = 0$$

$$\text{Ecuación explícita: } y = \frac{2}{3}x + 8$$

b) La recta tiene vector director $\vec{u} = \overline{PQ} = (-1, 3)$, por tanto:

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \end{cases}$$

$$\text{Ecuación general: } \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{3} \Rightarrow 3x + y + 3 = 0$$

$$\text{Ecuación explícita: } y = -3x - 3$$

c) La recta tiene vector director $\vec{u} = \overline{PQ} = (-4, 2)$, por tanto:

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$$

$$\text{Ecuación general: } \frac{x-2}{-4} = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x + 4y - 4 = 0$$

$$\text{Ecuación explícita: } y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Posiciones relativas de rectas

82. Indica la pendiente de todas las rectas paralelas a la recta que pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-1, -7)$.

Las rectas tienen vector director $\vec{u} = \overline{PQ} = (-2, -9)$, por tanto, tienen pendiente $m = \frac{9}{2}$.

83. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 6)$ y es paralela a $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

La recta buscada tiene vector director $\vec{u} = (2, -1)$, por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-1} \Rightarrow -x+2 = 2y-12 \Rightarrow x+2y-14 = 0$$

84. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas.

a) $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x=\frac{3+t}{2} \\ y=\frac{1-t}{2} \end{cases} \quad \text{d)}$

$r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2-2\lambda \end{cases} \quad s: 4x+y-8=0$

b) $r: 3x-2y=7 \quad s: 2x-3y=8$

e) $r: y=-2x+3 \quad s: y=\frac{x}{2}$

c) $r: x+y=7 \quad s: -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}=0$

f) $r: 2x-y-5=0 \quad s: -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-5=0$

a) Los vectores directores son $\vec{u}_r=(1, -1)$ y $\vec{u}_s=(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Como son proporcionales y el punto $P(1, 1)$ pertenece a ambas rectas, las rectas son coincidentes.

b) $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

c) La ecuación de s se puede escribir como $x+y-7=0$, que es la misma ecuación de r , por lo que las rectas son coincidentes.

d) Los vectores directores son $\vec{u}_r=(1, -2)$ y $\vec{u}_s=(-1, 4)$. Como no son proporcionales, las rectas son secantes.

e) Las pendientes son $m_r=-2$ y $m_s=\frac{1}{2}$. Como son distintas, las rectas son secantes, y como $m_r \cdot m_s = -1$ son perpendiculares.

f) $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-5}{-5} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

85. Calcula el punto de intersección de los siguientes pares de rectas secantes.

a) $r: \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x=1-4\mu \\ y=2+2\mu \end{cases}$

c) $r: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \quad s: -\frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0$

b) $r: 2x-5y=-\frac{23}{2} \quad s: 3x-4y=-12$

d) $r: \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=-2+2\lambda \end{cases} \quad s: 2x-y-6=0$

a) $\begin{cases} 2-3\lambda=1-4\mu \\ 1+\lambda=2+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda+4\mu=-1 \\ \lambda-2\mu=1 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-1, \mu=-1 \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(5, 0)$

b) $\begin{cases} 2x-5y=-\frac{23}{2} \\ 3x-4y=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-10y=-23 \\ 3x-4y=-12 \end{cases} \Rightarrow x=-2, y=\frac{3}{2} \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(-2, \frac{3}{2})$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ -\frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=6 \\ -3x+16y=-36 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{28}{9}, y=-\frac{5}{3} \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(\frac{28}{9}, -\frac{5}{3})$

d) $2(2-3\lambda)+2-2\lambda-6=0 \Rightarrow -8\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(2, -2)$

86. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r: 2x-3y+1=0$ y $s: 4x+y-3=0$ y corta al eje de abscisas en el punto $P(4, 0)$.

$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{4}{7}, y=\frac{5}{7} \Rightarrow r$ y s se cortan en el punto $Q(\frac{4}{7}, \frac{5}{7})$. El vector director de la recta buscada es

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (\frac{4}{7} - 4, \frac{5}{7} - 0) = (-\frac{24}{7}, \frac{5}{7}) = (-24, 5)$, por tanto, su ecuación es: $\frac{x-4}{-24} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow 5x-20 = -24y \Rightarrow 5x+24y-20=0$

87. Encuentra la ecuación de las siguientes rectas paralelas a una dada.

- a) Paralela a $2x + 5y - 5 = 0$ y que pasa por el punto $A(-2, 6)$.
- b) Paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.
- c) Paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.
- d) Paralela a $r: 2x - y + 12 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.
- e) Paralela a $r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, 4)$.
- f) Paralela a $r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, -2)$.
- g) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que tiene ordenada en el origen igual a 5.
- a) La recta es de la forma $2x + 5y + k = 0$. Como pasa por A , ha de ser $-4 + 30 + k = 0 \Rightarrow k = -26$. Por tanto, la ecuación buscada es $2x + 5y - 26 = 0$.
- b) La recta es $y = 4$.
- c) La recta es $x = -1$.
- d) La recta es de la forma $2x - y + k = 0$. Como pasa por $(0, 0)$ tenemos $k = 0$. Luego la ecuación es $2x - y = 0$.
- e) La recta tiene vector director $\vec{u} = (3, 1)$, así, su ecuación es: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow x+2 = 3y-12 \Rightarrow x-3y+14 = 0$.
- f) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$.
- g) La pendiente de la recta es $m = 1$ y la ordenada en el origen $n = 5$. Luego la recta es $y = x + 5$.

88. Obtén la ecuación de las siguientes rectas.

- a) Perpendicular a $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por el punto $A(2, -1)$.
- b) Perpendicular al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-4, 8)$.
- c) Perpendicular al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 3)$.
- d) Perpendicular a $r: 3x - 3y + 1 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.
- e) Perpendicular a $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-1, 0)$.
- f) Perpendicular al segmento \overline{AB} con $A(-1, -3)$ y $B(2, -5)$ y que pasa por $P(-3, 2)$.
- a) La recta tiene vector director $\vec{u} = (1, -2)$, así, su ecuación es: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x+4 = y+1 \Rightarrow 2x+y-3 = 0$.
- b) La recta es vertical y pasa por A , por tanto, su ecuación es: $x = -4$.
- c) La recta es horizontal y pasa por A , por tanto, su ecuación es: $y = 3$.
- d) La recta tiene vector director $\vec{u} = (3, -3)$, así, su ecuación es: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-3} \Rightarrow 3x+3y = 0 \Rightarrow x+y = 0$.
- e) La recta tiene vector normal $\vec{n} = (2, 1)$, así, su ecuación es: $2(x+1) + 1(y-0) \Rightarrow 2x+y+2 = 0$.
- f) La recta tiene vector normal $\vec{n} = \overline{AB} = (3, -2)$, así, su ecuación es: $3(x+3) - 2(y-2) \Rightarrow 3x-2y+13 = 0$.

89. En cada caso, calcula el valor del parámetro k para que las rectas tengan la posición relativa indicada.

a) $r: x - ky + 1 = 0$; $s: kx - 4y - 3 = 0$, paralelas.

b) $r: kx - 2y - 4k = 0$; $s: x - 3y - 4 = 0$, coincidentes.

c) $r: 2kx + 5y - 1 = 0$; $s: 3x - ky + 2 = 0$, paralelas.

a) Ha de verificarse que $\frac{1}{k} = \frac{-k}{-4} \neq \frac{1}{-3} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$.

b) Ha de verificarse que $\frac{k}{1} = \frac{-2}{-3} = \frac{-4k}{-4} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$.

c) Ha de verificarse que $\frac{2k}{3} = \frac{5}{-k} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow 2k^2 = -15 \Rightarrow$ Imposible, luego no pueden ser paralelas.

90. Halla para qué valor de b , la recta $x - by = -4b - 1$ es coincidente con la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(2, 3)$.

La recta dada debe pasar por P y Q , luego $\begin{cases} -1 - 4b = -4b - 1 \\ 2 - 3b = -4b - 1 \end{cases} \Rightarrow b = -3$, así, la recta es $x + 3y - 11 = 0$.

91. Halla el valor de k para que sean paralelas las rectas $r: (2k - 2)x - y + 2k = 0$ y $s: (k - 1)x + (k + 1)y - 17 = 0$. Para los valores hallados, obtén la ecuación de la recta paralela a r y s que pasa por el origen de coordenadas.

Para que sean paralelas tiene que suceder que $\frac{2k-2}{k-1} = \frac{-1}{k+1} \Rightarrow 2k^2 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1, k = -\frac{3}{2}$.

En el primer caso la recta paralela que pasa por el origen es $y = 0$, en el segundo caso es $5x + y = 0$.

92. Dadas las rectas:

$r: (k - 1)x - 2y + 2k = 0$ $s: (3k - 4)x + y + k^2 = 0$

Encuentra los valores de k para que sean perpendiculares. Para los valores hallados, calcula el punto de intersección de las rectas.

Los vectores directores de las rectas son $\vec{u}_r = (2, k - 1)$ y $\vec{u}_s = (1, 4 - 3k)$, que han de ser perpendiculares. Así:

$2 + (k - 1)(4 - 3k) = 0 \Rightarrow -3k^2 + 7k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3}, k = 2$

Para $k = \frac{1}{3}$, $\begin{cases} r: \frac{-2}{3}x - 2y + \frac{2}{3} = 0 \\ s: -3x + y + \frac{1}{9} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 27x - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{15}, y = \frac{13}{45}$. El punto de intersección es $P\left(\frac{2}{15}, \frac{13}{45}\right)$.

Para $k = 2$, $\begin{cases} r: x - 2y + 4 = 0 \\ s: 2x + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x + 2y = -8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-12}{5}, y = \frac{4}{5}$. El punto de intersección es $P\left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

93. Halla los valores de m y n para que sean perpendiculares las rectas $r: x - my + 2n = 0$ y $s: 2mx + ny + 1 = 0$, sabiendo que el punto $P(0, 2)$ pertenece a la recta r . Para los valores hallados, encuentra el punto de intersección de r y s .

Los vectores directores de las rectas son $\vec{u}_r = (m, 1)$ y $\vec{u}_s = (-n, 2m)$, que han de ser perpendiculares. Así:

$\begin{cases} -mn + 2m = 0 \\ -2m + 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = n = 0 \text{ Imposible} \\ m = n = 2 \end{cases}$

El punto P de intersección es: $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 4x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = \frac{3}{2} \Rightarrow P\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Haz de rectas

94. Calcula la ecuación del haz de rectas secantes de vértice el punto $P(-2, 3)$. Encuentra la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$.

La ecuación del haz es $y - 3 = m(x + 2)$. Si $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow 2y - 6 = -x - 2 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$.

95. Determina la ecuación del haz determinado por las rectas secantes $r: y = 2x - 3$ y $s: y = 3x - 5$ y halla su vértice y la recta de este haz que pasa por el punto $P(-2, 2)$.

La ecuación del haz es: $2x - y - 3 + \lambda(3x - y - 5) = 0$. Vértice: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1 \Rightarrow V(2, 1)$

Si la recta pasa por P , se tiene que $-4 - 2 - 3 + \lambda(-6 - 2 - 5) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{13}$. Por tanto, la recta buscada es:

$$2x - y - 3 - \frac{9}{13}(3x - y - 5) = 0 \Rightarrow 26x - 13y - 39 - 27x + 9y + 45 = 0 \Rightarrow x + 4y - 6 = 0$$

96. Halla la ecuación del haz determinado por las rectas secantes $r: 2x + y = 0$ y $s: 3x - 2y = 0$ y calcula su vértice y la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$.

La ecuación del haz es: $2x + y + \lambda(3x - 2y) = 0$. Vértice: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow V(0, 0)$

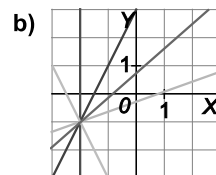
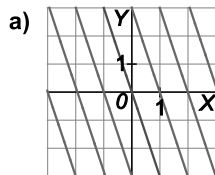
La recta buscada tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$ y pasa por V , por tanto, su ecuación es: $y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow 2x + 3y = 0$.

97. Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas las rectas paralelas a la recta de ecuación $r: -2x + 3y - 5 = 0$ y elige, de entre ellas, la que pasa por $P(-1, 3)$.

Todas las rectas paralelas a la dada son de la forma $-2x + 3y + K = 0$.

De ellas, la que pasa por P verifica $2 + 9 + K = 0 \Rightarrow K = -11$, por tanto, su ecuación es: $-2x + 3y - 11 = 0$.

98. Determina las ecuaciones de los haces de las siguientes figuras.



Halla en cada uno de los haces anteriores la recta que pasa por el punto $P(-1, -2)$

- a) Es un haz de rectas paralelas de pendiente $m = -3$, por tanto, su ecuación es: $3x + y + K = 0$.

De ellas, la que pasa por P verifica $-3 - 2 + K = 0 \Rightarrow K = 5$, por tanto, su ecuación es: $3x + y + 5 = 0$.

- b) Es un haz de rectas secantes de vértice $V(-2, -1)$, por tanto, su ecuación es: $y + 1 = m(x + 2)$.

De ellas, la que pasa por P verifica $-2 + 1 = m(-1 + 2) \Rightarrow m = -1$, por tanto, su ecuación es:

$$y + 1 = -(x + 2) \Rightarrow x + y + 3 = 0$$

104. Halla la distancia del punto $P(-4, 3)$ al punto medio del segmento de extremos $A(1, -3)$ y $B(-1, 2)$.

El punto medio del segmento es $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, por tanto, $d(P, M) = \sqrt{16 + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{113}}{2}$ u

105. Calcula la distancia del punto P a la recta r en los siguientes casos.

a) $P(-3, 4)$ $r: 2x + 3y - 5 = 0$ c) $P\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ $r: 2x - 2y = -3$

b) $P(0, -2)$ $r: y = -2x + 5$ d) $P(1, -2)$ $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

e) $P(-1, 0)$ y r es la recta que pasa por los puntos $A\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ y $B\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

f) $P(3, -2)$ y r es la recta que forma un ángulo de 45° con el eje positivo de abscisas y que tiene ordenada en el origen igual a -2 .

a) $d(P, r) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ u

b) $d(P, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$ u

c) $d(P, r) = \frac{\left|2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot (-3) + 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ u

d) $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} \Rightarrow -x+1 = y+2 \Rightarrow x+y+1=0 \Rightarrow d(P, r) = \frac{|1-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 0$

e) $\frac{x-\frac{1}{2}}{-2-\frac{1}{2}} = \frac{y+3}{\frac{1}{2}+3} \Rightarrow 14x+10y+23=0 \Rightarrow d(P, r) = \frac{|14 \cdot (-1) + 10 \cdot 0 + 23|}{\sqrt{14^2+10^2}} = \frac{9}{\sqrt{296}} = \frac{9\sqrt{74}}{148}$ u

f) La pendiente de r es $m = 1$, y la ordenada en el origen es $n = -2$, por tanto, su ecuación es $y = x - 2 \Rightarrow x - y - 2 = 0$ y $d(P, r) = \frac{|3+2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ u

106. Comprueba que los siguientes pares de rectas son paralelas y calcula, en cada caso, la distancia que las separa.

a) $r: 2x - y = 7$ $s: 2x - y = 8$ b) $r: 2x - 3y - 2 = 0$ $s: -\frac{2}{3}x + y - 2 = 0$ c) $r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3-t}{2} \end{cases}$

a) $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-7}{-8} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r, s) = \frac{|-7+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ u

b) $s: -\frac{2}{3}x + y - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0$. $\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-2}{6} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r, s) = \frac{|-2-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$ u

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow x+2y-8=0$ $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3-t}{2} \end{cases} \Rightarrow x-3 = 3-2y \Rightarrow x+2y-6=0$

$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} \neq \frac{-8}{-6} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r, s) = \frac{|-8+6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ u

107. Calcula las medidas de sus tres lados y clasifica los siguientes triángulos.

a) $A(3, 2), B(5, -4)$ y $C(1, -2)$ b) $A(3, 5), B(-1, -1)$ y $C(5, -3)$ c) $A(0, 1), B(0, 2)$ y $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u

$d(B, C) = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u

$d(A, C) = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u

Es un triángulo isósceles.

b) $d(A, B) = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ u

$d(B, C) = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u

$d(A, C) = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ u

Es un triángulo escaleno.

c) $d(A, B) = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ u

$d(B, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ u

$d(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ u

Es un triángulo equilátero.

108. Calcula el perímetro y el área del triángulo de vértices: $A(-2, 2), B(5, -1)$ y $C(3, 4)$

$d(A, B) = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}$ u, $d(B, C) = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ u y $d(A, C) = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ u.

Por tanto, el perímetro es $P = \sqrt{58} + 2\sqrt{29}$ u.

La altura del triángulo es la distancia del vértice C a la recta determinada por el segmento AB, de ecuación:

$$\frac{x+2}{7} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow -3x-6 = 7y-14 \Rightarrow 3x+7y-8=0$$

Por tanto, la altura es $d(C, AB) = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-7) + 8|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{29}{\sqrt{58}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$ u y el área es $S = \frac{\sqrt{58} \cdot \sqrt{58}}{2} = \frac{58}{4} = \frac{29}{2}$ u²

109. Calcula las coordenadas de los vértices y el perímetro del triángulo determinado por las rectas:

$r: x - 3y + 1 = 0$

$s: 3x - 2y - 4 = 0$

$t: 2x + y + 2 = 0$

Los vértices del triángulo son:

$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1 \Rightarrow A(2, 1)$

$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 0 \Rightarrow B(-1, 0)$

$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = -2 \Rightarrow C(0, -2)$

Por tanto, el perímetro es $P = d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = \sqrt{9+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{4+9} = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13}$ u

110. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) $r: 3x + y = 1$ y $s: x - y = 3$

d) $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$

b) $r: x - 2y - 2 = 0$ y $s: -x - y - 2 = 0$

e) $r: 2x - y - 7 = 0$ y $s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

c) $r: y = -x + 2$ y $s: y = -\frac{1}{2} - 3x$

a) Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (3, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, -1)$, luego $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{10} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ$

b) Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (1, -2)$ y $\vec{n}_2 = (-1, -1)$, luego $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 71,57^\circ$

c) Las pendientes son $m_1 = -1$ y $m_2 = -3$, luego $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|m_1 - m_2|}{|1 + m_1 m_2|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26,57^\circ$

d) Los vectores directores son $\vec{u}_1 = (2, -2)$ y $\vec{u}_2 = (-2, 1)$. Luego $\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{6}{\sqrt{8} \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 18,43^\circ$

e) Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (2, -1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 0)$. Luego $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26,57^\circ$

111. Calcula el área y el perímetro del cuadrilátero que forman las rectas $r: 3x + 4y = 12$ y $s: 5x + 6y = 30$ con los ejes coordenados.

Los vértices del cuadrilátero son $A(4, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 5)$ y $D(0, 3)$.

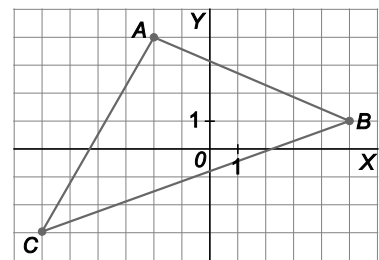
El perímetro es $P = d(A, B) + d(B, C) + d(C, D) + d(D, A) = \sqrt{4 + 0} + \sqrt{36 + 25} + \sqrt{0 + 4} + \sqrt{16 + 9} = 9 + \sqrt{61}$ u.

El área se calcula restando las áreas de los triángulos rectángulos OBC y OAD : $S = 15 - 6 = 9$ u².

112. Halla el perímetro del triángulo formado por los puntos medios de los lados del triángulo de la figura.

$A(-2, 4)$, $B(5, 1)$ y $C(-6, -3)$, de modo que los puntos medios de los lados son

$M_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ y $M_3\left(-4, \frac{1}{2}\right)$, y, por tanto, el perímetro pedido es:



$$P = d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3) + d(M_3, M_1) = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{121}{4} + 4} = \frac{\sqrt{65} + \sqrt{58} + \sqrt{137}}{2}$$
 u

Otra forma de hacerlo sería:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Perímetro}(ABC) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{7^2 + (-3)^2} + \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} + \sqrt{(-11)^2 + (-4)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\sqrt{58} + \sqrt{65} + \sqrt{137} \right]$$

113. Calculando las medidas de sus tres ángulos, clasifica los siguientes triángulos.

- a) $A(5, 3)$, $B(1, 2)$ y $C(7, 0)$ b) $A(1, 2)$, $B(-4, -3)$ y $C(2, -1)$ c) $A(-2, 8)$, $B(-6, 1)$ y $C(0, 4)$

a) $\overline{AB} = (-4, -1)$ y $\overline{AC} = (2, -3) \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{-5}{\sqrt{17} \sqrt{13}} = -\frac{5\sqrt{221}}{221} \Rightarrow \hat{A} = 109,65^\circ$

$\overline{BA} = (4, 1)$ y $\overline{BC} = (6, -2) \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{22}{\sqrt{17} \sqrt{40}} = \frac{11\sqrt{170}}{170} \Rightarrow \hat{B} = 32,47^\circ$

$\overline{CA} = (-2, 3)$ y $\overline{CB} = (-6, 2) \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| |\overline{CB}|} = \frac{18}{\sqrt{13} \sqrt{40}} = \frac{9\sqrt{130}}{130} \Rightarrow \hat{C} = 37,87^\circ$

Es un triángulo obtusángulo.

b) $\overline{AB} = (-5, -5)$ y $\overline{AC} = (1, -3) \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{10}{\sqrt{50} \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{A} = 63,43^\circ$

$\overline{BA} = (5, 5)$ y $\overline{BC} = (6, 2) \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{40}{\sqrt{50} \sqrt{40}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{B} = 26,57^\circ$

$\overline{CA} = (-1, 3)$ y $\overline{CB} = (-6, -2) \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| |\overline{CB}|} = \frac{0}{\sqrt{10} \sqrt{40}} = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$

Es un triángulo rectángulo.

c) $\overline{AB} = (-4, -7)$ y $\overline{AC} = (2, -4) \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{20}{\sqrt{65} \sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \hat{A} = 56,31^\circ$

$\overline{BA} = (4, 7)$ y $\overline{BC} = (6, 3) \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{45}{\sqrt{65} \sqrt{45}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \hat{B} = 33,69^\circ$

$\overline{CA} = (-2, 4)$ y $\overline{CB} = (-6, -3) \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| |\overline{CB}|} = \frac{0}{\sqrt{20} \sqrt{45}} = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$

Es un triángulo rectángulo.

114. Calcula las coordenadas de los vértices y la medida de los ángulos del triángulo determinado por las siguientes rectas. Clasifícalo según sus lados y según sus ángulos.

$r: 3x + 2y - 3 = 0$

$s: 2x - y - 2 = 0$

$t: x + 2y + 9 = 0$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, 0) \qquad \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ x + 2y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -\frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(6, -\frac{15}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + 2y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(-1, -4)$$

Los vectores normales son: $\vec{n}_r = (3, 2)$, $\vec{n}_s = (2, -1)$, $\vec{n}_t = (1, 2)$

Las rectas s y t son perpendiculares pues: $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$

Los otros ángulos son: $\cos \hat{A} = \frac{\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s}{|\vec{n}_r| |\vec{n}_s|} = \frac{4}{\sqrt{13} \sqrt{5}} \Rightarrow \hat{A} = 60,26^\circ$ $\cos \hat{B} = \frac{\vec{n}_r \cdot \vec{n}_t}{|\vec{n}_r| |\vec{n}_t|} = \frac{7}{\sqrt{13} \sqrt{5}} \Rightarrow \hat{B} = 29,74^\circ$

Por tener los ángulos distintos es escaleno, además, es un triángulo rectángulo.

Puntos y rectas simétricos

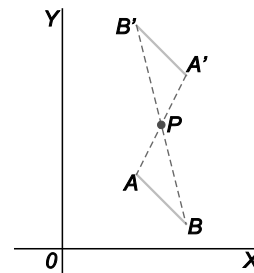
115. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del \overline{AB} respecto de la simetría central de centro P siendo: $A(2, 3)$, $B(4, 1)$ y $P(3, 5)$.

P ha de ser el punto medio de A y A' , luego, si $A'(a_1, a_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{2+a_1}{2} = 3 \Rightarrow a_1 = 4 \\ \frac{3+a_2}{2} = 5 \Rightarrow a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(4, 7)$$

Análogamente, P ha de ser el punto medio de B y B' , luego si $B'(b_1, b_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{4+b_1}{2} = 3 \Rightarrow b_1 = 2 \\ \frac{1+b_2}{2} = 5 \Rightarrow b_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow B'(2, 9)$$



116. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del \overline{AB} respecto de la simetría axial de eje r siendo: $A(1, 3)$, $B\left(3, \frac{5}{2}\right)$ y $r: x + y = 3$.

La recta que pasa por A y A' es perpendicular a r , por tanto, es de la forma $x - y + k = 0$ y, como pasa por A , se tiene $1 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 2$, con lo que la ecuación de la recta AA' es $x - y + 2 = 0$.

El punto de intersección de esta recta y r es: $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

M es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, luego, si $A'(a_1, a_2)$, tenemos:

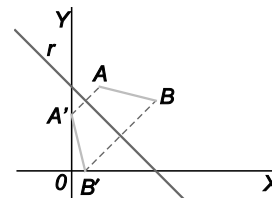
$$\begin{cases} \frac{1+a_1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 0 \\ \frac{3+a_2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(0, 2)$$

Siguiendo un proceso análogo para el punto B se tiene:

$$BB': x - y + k = 0 \Rightarrow 3 - \frac{5}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow x - y - \frac{1}{2} = 0$$

Punto de intersección: $\begin{cases} x - y - \frac{1}{2} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{4}, y = \frac{5}{4} \Rightarrow N\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$

Calculo de $B'(b_1, b_2)$: $\begin{cases} \frac{3+b_1}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{5+b_2}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$



117. Dada las rectas $r : x - 4y + 2 = 0$ y $s : 2x - 3y = -4$:

- Calcula su punto de corte.
- Demuestra que el punto $P(1, 2)$ pertenece a s y calcula su simétrico respecto de la recta r .
- Calcula la ecuación de la simétrica de la recta s respecto de la recta r .

a) El punto de corte es: $\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(-2, 0)$

b) P verifica la ecuación de s . En efecto: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow P \in s$.

La recta perpendicular a r que pasa por P es: $4x + y + k = 0 \Rightarrow 4 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -6 \Rightarrow 4x + y - 6 = 0$.

Dicha recta corta a r en el punto: $\begin{cases} 4x + y - 6 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{22}{17}, \frac{14}{17} \right)$

M es el punto medio de P y su simétrico $P'(a, b)$, luego: $\begin{cases} \frac{1+a}{2} = \frac{22}{17} \Rightarrow a = \frac{27}{17} \\ \frac{2+b}{2} = \frac{14}{17} \Rightarrow b = -\frac{6}{17} \end{cases} \Rightarrow P' \left(\frac{27}{17}, -\frac{6}{17} \right)$

c) La recta pasa por Q y P' , por tanto su ecuación es: $\frac{x+2}{61} = \frac{y}{-6} \Rightarrow -6x - 12 = 61y \Rightarrow 6x + 61y + 12 = 0$.

Lugares geométricos

118. Dados los puntos $A(1, 4)$, $B(-3, 0)$ y $C(3, -2)$:

- Determina las mediatrices de los segmentos \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} .
- Halla las coordenadas del punto que equidista de A , B y C .

a) Mediatriz del segmento \overline{AB} :

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 6x + 9 + y^2 \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

Mediatriz del segmento \overline{AC} :

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$$

Mediatriz del segmento \overline{BC} :

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

b) El punto que equidista de A , B y C , el circuncentro, se obtiene como punto de intersección de las mediatrices:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \Rightarrow T \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

119. Halla las bisectrices de las rectas $r : 3x - 2y = -2$ y $s : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ y comprueba que son perpendiculares.

Ecuación general de la recta s : $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = y - 1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$

Ecuaciones de las bisectrices:

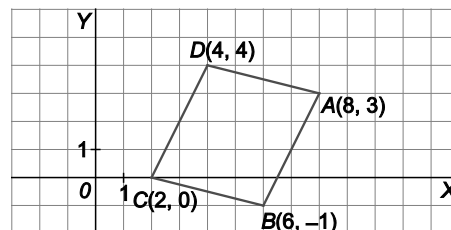
$$\frac{|3x - 2y + 2|}{\sqrt{13}} = \frac{|x - 2y + 2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{3x - 2y + 2}{\sqrt{13}} = \pm \frac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} b_1 : (3\sqrt{5} - \sqrt{13})x + (2\sqrt{13} - 2\sqrt{5})y + (2\sqrt{5} - 2\sqrt{13}) = 0 \\ b_2 : (3\sqrt{5} + \sqrt{13})x - (2\sqrt{13} + 2\sqrt{5})y + (2\sqrt{5} + 2\sqrt{13}) = 0 \end{cases}$$

Los vectores normales y , por tanto, las bisectrices, son perpendiculares, ya que:

$$(3\sqrt{5} - \sqrt{13}, 2\sqrt{13} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{5} + \sqrt{13}, -2\sqrt{13} - 2\sqrt{5}) = 45 - 13 - 52 + 20 = 0$$

Síntesis

120. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Calcula las ecuaciones de las diagonales de la figura, y comprueba si se trata o no de un rombo.



La diagonal AC tiene vector director $\overline{AC} = (-6, -3) \simeq (2, 1)$ y pasa por A , por lo que su ecuación es:

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x-8 = 2y-6 \Rightarrow x-2y-2 = 0$$

La diagonal BD tiene vector director $\overline{BD} = (-2, 5)$ y pasa por B , por lo que su ecuación es:

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y+1}{5} \Rightarrow 5x-30 = -2y-2 \Rightarrow 5x+2y-28 = 0$$

No se trata de un rombo, ya que las diagonales no son perpendiculares. En efecto, $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 12 - 15 = -3 \neq 0$

121. Dado el triángulo de vértices: $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$ y $C(0, -3)$

- Calcula las coordenadas del baricentro.
- Halla las ecuaciones de dos alturas y las coordenadas del ortocentro.
- Obtén las ecuaciones de dos mediatrices y las coordenadas del circuncentro.
- Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.
- Encuentra la ecuación de la recta de Euler y comprueba que el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados.

a) El baricentro es $G\left(0, \frac{2}{3}\right)$

b) La altura por A es perpendicular a $\overline{BC} = (1, -5)$, así, su ecuación es: $1(x-1) - 5(y-3) \Rightarrow x - 5y + 14 = 0$.

La altura por B es perpendicular a $\overline{AC} = (-1, -6)$, así, su ecuación es: $-1(x+1) - 6(y-2) \Rightarrow x + 6y - 11 = 0$.

El ortocentro es el punto de intersección de estas alturas: $H\left(-\frac{29}{11}, \frac{25}{11}\right)$

c) Mediatriz del lado AB : $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} \Rightarrow 4x + 2y - 5 = 0$

Mediatriz del lado AC : $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} \Rightarrow 2x + 12y - 1 = 0$

El circuncentro es el punto de intersección de estas mediatrices: $T\left(\frac{29}{22}, -\frac{3}{22}\right)$

d) El radio de la circunferencia circunscrita es $d(T, A) = \sqrt{\left(\frac{29}{22}-1\right)^2 + \left(-\frac{3}{22}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{2405}{242}} \approx 3,15$ u

e) $\overline{GH} = \left(-\frac{29}{11}, \frac{53}{33}\right)$ y $\overline{GT} = \left(\frac{29}{22}, -\frac{53}{66}\right)$ son proporcionales, por tanto, el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. La recta que pasa por ellos es la recta de Euler, de ecuación:

$$\frac{x-0}{-\frac{29}{11}} = \frac{y-\frac{2}{3}}{\frac{53}{33}} \Rightarrow 53x + 87y - 58 = 0$$

122. Halla las bisectrices interiores del triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ y $C(3, 0)$. Calcula las coordenadas del incentro y el radio de la circunferencia inscrita.

Bisectriz interior por A : $2x - y - 1 = 0$

Bisectriz interior por B : $(\sqrt{2} - 1)x + (2\sqrt{2} + 3)y - (7 + 3\sqrt{2}) = 0$

Bisectriz interior por C : $(3 + \sqrt{2})x + (1 + 2\sqrt{2})y - (9 + 3\sqrt{2}) = 0$

El incentro es el punto de intersección de dos bisectrices: $I(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 1)$

El radio de la circunferencia inscrita es $d(I, AB) = \frac{|\sqrt{2} - 3(2\sqrt{2} - 1) + 7|}{\sqrt{10}} = \frac{10 - 5\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \approx 0,93$ u (La recta AB tiene ecuación $x - 3y + 7 = 0$)

123. Dado el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(3, -4)$ y $C(3, 5)$, y los puntos exteriores $D(5, -3)$ y $E(5, 3)$,

- a) Demuestra que el segmento \overline{BD} es paralelo al lado \overline{AC} y mide la tercera parte de éste.
- b) Demuestra que el segmento \overline{CE} es paralelo al lado \overline{AB} y mide la tercera parte de éste.
- c) Si M es el punto medio de D y E y G es el baricentro del triángulo, demuestra que A , G y M están alineados.
- d) Comprueba que G es el punto medio de A y M .

a) $\overline{BD} = (2, 1)$ y $\overline{AC} = (6, 3)$ verifican que $\overline{AC} = 3\overline{BD}$, por lo que el segmento \overline{BD} es paralelo al lado \overline{AC} y mide la tercera parte de éste.

b) $\overline{CE} = (2, -2)$ y $\overline{AB} = (6, -6)$ verifican que $\overline{AB} = 3\overline{CE}$, por lo que el segmento \overline{CE} es paralelo al lado \overline{AB} y mide la tercera parte de éste.

c) $M(5, 0)$ y $G(1, 1) \Rightarrow \overline{AG} = (4, -1)$ y $\overline{AM} = (8, -2)$ son proporcionales, por lo que A , G y M están alineados.

d) Como $\overline{AM} = 2\overline{AG}$, G es el punto medio de A y M .

124. Dado el cuadrilátero de vértices $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(3, 3)$ y $D(1, \frac{5}{2})$:

- a) Demuestra que se trata de un trapecio.
- b) Calcula el punto donde se cortan las diagonales.
- c) Comprueba que la recta que une los puntos medios de los dos lados no paralelos es paralela a las bases del trapecio.

a) Los lados AB y DC son paralelos, ya que los vectores $\overline{AB} = (4, 1)$ y $\overline{DC} = (2, \frac{1}{2})$ son proporcionales.

Los lados AD y BC no son paralelos, ya que los vectores $\overline{AD} = (0, \frac{3}{2})$ y $\overline{BC} = (-2, 1)$ no son proporcionales.

Por tanto, el cuadrilátero es un trapecio de bases AB y DC .

b) La diagonal AC tiene ecuación: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x - y = 0$ y la BD : $\frac{x-5}{-4} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x + 8y - 21 = 0$.

Punto de corte: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 8y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{3}, y = \frac{7}{3} \Rightarrow P(\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$

c) $R(1, \frac{7}{4})$ y $S(4, \frac{5}{2})$ son los puntos medios de AD y BC , respectivamente. La recta RS es paralela a los lados AB y DC , ya que los vectores $\overline{AB} = (4, 1)$, $\overline{DC} = (2, \frac{1}{2})$ y $\overline{RS} = (3, \frac{3}{4})$ son proporcionales.

125. Se considera el cuadrilátero de vértices: $A(-5, 0)$, $B(3, 2)$, $C(5, -8)$ y $D(-7, -6)$

- Calcula la medida de las dos diagonales.
- Comprueba que los puntos medios de los lados forman un paralelogramo.
- Calcula el perímetro del paralelogramo.
- Comprueba que el perímetro hallado coincide con la suma de las dos diagonales del cuadrilátero inicial.

$$a) \quad d(A,C) = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41} \text{ u}$$

$$d(B,D) = \sqrt{(-10)^2 + (-8)^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41} \text{ u}$$

$$b) \quad \text{Punto medio del lado } AB: M_1(-1, 1)$$

$$\text{Punto medio del lado } BC: M_2(4, -3)$$

$$\text{Punto medio del lado } CD: M_3(-1, -7)$$

$$\text{Punto medio del lado } DA: M_4(-6, -3)$$

Como $\overline{M_1M_4} = \overline{M_2M_3} = (-5, -4)$, $M_1M_2M_3M_4$ es un paralelogramo.

$$c) \quad \text{El perímetro es } 2d(M_1, M_2) + 2d(M_2, M_3) = 2\sqrt{5^2 + (-4)^2} + 2\sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{41} \text{ u}$$

d) La suma de las diagonales es $d(A,C) + d(B,D) = 4\sqrt{41}$, que coincide con el perímetro del paralelogramo.

126. Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo ABC sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $M(-2, 2)$, $N(5, 3)$ y $P(2, -2)$.

Sean $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$. Se debe verificar que:

$$\begin{cases} \frac{a_1 + b_1}{2} = -2 \\ \frac{a_1 + c_1}{2} = 5 \\ \frac{b_1 + c_1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 = -4 \\ a_1 + c_1 = 10 \\ b_1 + c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1, b_1 = -5, c_1 = 9$$

$$\begin{cases} \frac{a_2 + b_2}{2} = 2 \\ \frac{a_2 + c_2}{2} = 3 \\ \frac{b_2 + c_2}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 = 4 \\ a_2 + c_2 = 6 \\ b_2 + c_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 7, b_2 = -3, c_2 = -1$$

Por tanto, $A(1, 7)$, $B(-5, -3)$ y $C(9, -1)$.

127. Halla el punto de la recta $r: 2x + y + 1 = 0$ que equidista de los puntos $A(2, 2)$ y $B(-2, 4)$.

El punto buscado será la intersección de la recta r con la mediatriz del segmento AB .

$$\text{La mediatriz del segmento } AB \text{ es: } \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow 2x - y + 3 = 0.$$

$$\text{El punto de intersección es: } \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 1 \Rightarrow P(-1, 1)$$

128. Calcula los puntos de la recta $r: x + y - 3 = 0$ que están a distancia 1 del punto $P(1, 1)$.

Los puntos de la recta son de la forma $(t, 3-t)$, para que estén a distancia 1 de P se debe verificar:

$$\sqrt{(t-1)^2 + (2-t)^2} = 1 \Rightarrow 2t^2 - 6t + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases} \text{ Se obtienen así dos soluciones, } A(2, 1) \text{ y } B(1, 2).$$

129. Determina las rectas que pasan por el punto $P(1, 2)$ y que forman con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes un ángulo de 45° .

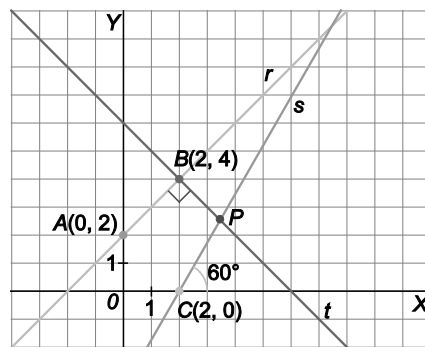
Las rectas no verticales buscadas son del tipo $y - 2 = m(x - 1)$.

Como la pendiente de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes es 1, tenemos:

$$\text{tg } 45^\circ = \left| \frac{m-1}{1+m} \right| \Rightarrow \frac{m-1}{m+1} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = m+1 \Rightarrow 0 = 2 \text{ Imposible} \\ m-1 = -m-1 \Rightarrow m = 0 \end{cases} \text{ . Por tanto, la recta buscada es } y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2.$$

Además, la recta vertical $x = 1$ también forma un ángulo de 45° con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

130. A partir de la información de la figura, calcula:



- a) Las ecuaciones de las rectas r , s y t .
- b) El punto P de intersección entre s y t .
- c) El punto P' simétrico de P respecto de la recta r .
- d) El punto C' simétrico de C respecto de la recta r .
- e) El perímetro del cuadrilátero $PCC'P'$.
- f) La ecuación de la recta s' simétrica de s respecto de la recta r .
- g) El ángulo que forman s y t .
- h) La recta paralela a s que pasa por B .
- i) Las rectas que pasan por el punto $D(-1, 3)$ y forman un ángulo de 30° con la recta r .

a) $r: \frac{x-0}{2} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow x-y+2=0$ $s: y-0 = \operatorname{tg} 60^\circ(x-2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ $t: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{2} \Rightarrow x+y-6=0$

b)
$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(6+2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3} = 2\sqrt{3} \\ y = 6-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow P(2\sqrt{3}, 6-2\sqrt{3})$$

c) La perpendicular a r por P es t , que corta a r en B . Por tanto, B debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, con lo que $P'(4-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$.

d) La perpendicular a r por C tiene ecuación $x+y-2=0$ y corta a r en el punto A , con lo que A debe ser el punto medio del segmento $\overline{CC'}$ y, por tanto, $C'(-2, 4)$.

e) $d(P,C) + d(C,C') + d(C',P') + d(P',P) = \sqrt{(2-2\sqrt{3})^2 + (-6+2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(-4)^2 + 4^2} + \sqrt{(6-2\sqrt{3})^2 + (-2+2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(-4+4\sqrt{3})^2 + (4-4\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} - 8 = 15,65 \text{ u}$

f) La recta buscada pasa por P' y C' , por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x+2}{6-2\sqrt{3}} = \frac{y-4}{-2-2\sqrt{3}} \Rightarrow (2+2\sqrt{3})x + (6-2\sqrt{3})y + (-20+12\sqrt{3}) = 0$$

g) Los vectores normales de s y t son, respectivamente, $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}, -1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 1)$, por tanto, el ángulo que

forman es: $\cos \alpha = \frac{|\sqrt{3}-1|}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \alpha = 75^\circ$

h) Como la pendiente de s es $m = \sqrt{3}$, la recta paralela a s que pasa por B tiene ecuación:

$$y-4 = \sqrt{3}(x-2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + (4-2\sqrt{3})$$

i) La recta r tiene pendiente 1, luego forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje de abscisas. Las rectas que forman un ángulo de 30° con la recta r tienen que formar, por tanto, ángulos de 15° o de 75° con la parte positiva del eje de abscisas.

Por tanto, sus pendientes han de ser $m_1 = \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ y $m_2 = \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1-\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = 2+\sqrt{3}$.

De este modo, las rectas buscadas tienen ecuación:

$$y-3 = (2-\sqrt{3})(x+1) \Rightarrow y = (2-\sqrt{3})x + (5-\sqrt{3}) \quad y-3 = (2+\sqrt{3})(x+1) \Rightarrow y = (2+\sqrt{3})x + (5+\sqrt{3})$$

- 131. Halla las coordenadas de los puntos de la recta $r: x + 2y - 2 = 0$ y que distan 2 unidades de la recta $s: 4x - 3y + 13 = 0$.**

Los puntos de r son de la forma $(2 - 2t, t)$, para que disten 2 unidades de s deben verificar:

$$\frac{|4 \cdot (2 - 2t) - 3t + 13|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Rightarrow 21 - 11t = \pm 10 \Rightarrow \begin{cases} 21 - 11t = 10 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P_1(0, 1) \\ 21 - 11t = -10 \Rightarrow t = \frac{31}{11} \Rightarrow P_2\left(-\frac{40}{11}, \frac{31}{11}\right) \end{cases}$$

- 132. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:**

$$r: \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 7 - 7\lambda \\ y = 4\lambda + 6 \end{cases}$$

y que forma un ángulo de 45° con la recta que une los puntos $A(0, 5)$ y $B(5, 0)$.

El punto de intersección de las rectas es el $P(7, 6)$, que se obtiene para $\lambda = 2$ en la primera recta y $\lambda = 0$ en la segunda.

La recta que une A y B es $y = -x + 5$, que forma 45° con los ejes de coordenadas. Por tanto hay dos soluciones al problema planteado: La recta horizontal que pasa por P , de ecuación $y = 6$, y la recta vertical que pasa por P , de ecuación $x = 7$.

CUESTIONES

- 133. ¿Existe algún valor de a para el que los puntos $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ y $B(1, a)$ pertenezcan a una misma recta?**

Para que los puntos A , B y C pertenezcan a una misma recta es necesario y suficiente que los vectores $\overrightarrow{OA} = (1, 1)$ y $\overrightarrow{OB} = (1, a)$ tengan la misma dirección, es decir, sean proporcionales. Por tanto:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{Para } a = 1, \text{ los puntos } O, A \text{ y } B \text{ están alineados, de hecho, } A \text{ y } B \text{ son iguales.}$$

- 134. a)** Indica un vector de dirección y otro normal a la recta que tiene por ecuación explícita: $y = mx + n$
- b)** Indica un vector de dirección y otro normal de la recta que tiene por ecuación punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$
- a)** Vector de dirección $\vec{u} = (1, m)$ Vector normal $\vec{n} = (m, -1)$
- b)** Vector de dirección $\vec{u} = (1, m)$ Vector normal $\vec{n} = (m, -1)$

- 135. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.**

- a)** Si la distancia de un punto a una recta es cero entonces obligatoriamente el punto está contenido en la recta.
- b)** Si la ecuación general de una recta no tiene término independiente entonces el origen de coordenadas pertenece a la recta.
- c)** La expresión $Ax + By + C = 0$ representa siempre una recta independientemente de los valores reales de A , B y C .
- a)** Cierta, si la recta es $r: Ax + By + C = 0$ y el punto es $P(a, b)$, al ser $d(P, r) = 0$, se verifica que $|Aa + Bb + C| = 0 \Rightarrow Aa + Bb + C = 0$, lo que significa que P verifica la ecuación de r , es decir, P pertenece a la recta.
- b)** Cierta, si la recta es $r: Ax + By = 0$, claramente el origen de coordenadas $O(0, 0)$ verifica la ecuación de r , es decir, pertenece a r .
- c)** Falsa. Si $A = B = 0$ la expresión no representa a ninguna recta.

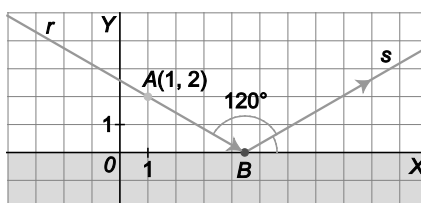
136. Indica el lugar geométrico de los puntos del plano tales que:

- a) Equidistan de dos rectas paralelas
 - b) La distancia a una recta fija sea 3 unidades de longitud.
 - c) Equidistan de los tres vértices de un triángulo.
 - d) Equidistan de los tres lados de un triángulo.
-
- a) La recta paralela a ambas y que está a igual distancia de una y de otra.
 - b) Dos rectas paralelas a la dada (una a cada lado) y que estén a distancia 3 de ella.
 - c) El circuncentro del triángulo (punto de intersección de las tres mediatrices).
 - d) El incentro del triángulo (punto de intersección de las tres bisectrices).

PROBLEMAS

137. Un rayo de luz r , que pasa por el punto $A(1, 2)$, incide sobre el eje de abscisas y se refleja formando con él un ángulo de 30° .

Halla las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.



El rayo incidente pasa por A y forma con el eje de abscisas un ángulo de 150° , por tanto su pendiente es $m = \operatorname{tg}150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y su ecuación es de la forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + n$.

Como debe pasar por A , tenemos: $2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + n \Rightarrow n = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + \sqrt{3}}{3}$

Para calcular la ecuación del rayo reflejado observemos que el rayo incidente corta el eje de abscisas en $B(1 + 2\sqrt{3}, 0)$, por tanto, el rayo reflejado pasa por B y forma con el eje de abscisas un ángulo de 30° , con lo que

su pendiente es $m = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y su ecuación es de la forma $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$.

Como debe pasar por B , tenemos: $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 + 2\sqrt{3}) + n \Rightarrow n = -\frac{6 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{6 + \sqrt{3}}{3}$

138. Calcula el valor de k para que el área del triángulo de vértices $A(4, 3)$, $B(6, -3)$ y $C(6, k)$ sea 20 u^2 .

La recta que pasa por A y por B tiene por ecuación: $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x-12 = -y+3 \Rightarrow 3x+y-15=0$.

La altura por C mide $h = d(C, AB) = \frac{|18+k-15|}{\sqrt{10}} = \frac{|3+k|}{\sqrt{10}}$ u y la base mide $d(A, B) = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u, por

tanto, tenemos: $S = \pm \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{3+k}{\sqrt{10}} = \pm(3+k) = 20 \Rightarrow \begin{cases} 3+k=20 \Rightarrow k=17 \\ -3-k=20 \Rightarrow k=-23 \end{cases}$

139. Los vértices opuestos de un cuadrado son los puntos $A(0, 3)$ y $C(4, 0)$.

- a) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices?
 b) ¿Cuál es el área del cuadrado?

a) La diagonal del cuadrado está sobre la recta $AC: 3x + 4y - 12 = 0$.

La diagonal mide $d(A,C) = \sqrt{25} = 5$ u y su punto medio es $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Sea $P(a, b)$ uno de los vértices, MP es perpendicular a AC , luego es de la forma $(3\lambda, 4\lambda)$.

$$\text{Además, } d(M,P) = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{(3\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5|\lambda| = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

Obtenemos así los dos vértices faltantes:

$$\overline{MP} = \left(a - 2, b - \frac{3}{2}\right) = (3\lambda, 4\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2}, b = \frac{7}{2} \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \\ \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

b) Aplicando el teorema de Pitágoras se calcula la longitud del lado del cuadrado: $2l^2 = 5^2 \Rightarrow l = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ u.

Por tanto el área del cuadrado es $S = l^2 = \frac{25}{2}$ u²

140. En el paralelogramo de vértices $ABCD$, se conocen las coordenadas de los puntos $A(0, 3)$, $B(1, 0)$ y $C(6, 1)$. Calcula la medida de sus diagonales y el ángulo que forman.

Si $D(a, b)$ tenemos: $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow (1, -3) = (6 - a, 1 - b) \Rightarrow a = 5, b = 4 \Rightarrow D(5, 4)$

Las diagonales miden: $d(A,C) = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u y $d(B,D) = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ u

El ángulo que forman es: $\cos \alpha = \cos(\widehat{AC, BD}) = \frac{|24 - 8|}{2\sqrt{10}4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ$

141. Del cuadrado $ABCD$, se conocen las coordenadas del punto $A(8, 7)$ y que los puntos B y C pertenecen a la recta de ecuación $3x - 4y = 19$.

- a) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros tres vértices?
 b) Halla el perímetro y el área del cuadrado.

a) AB es perpendicular a $3x - 4y = 19$ y pasa por A , por tanto, su ecuación es: $4x + 3y - 53 = 0$

$$\text{Estas dos rectas se cortan en } B: \begin{cases} 3x - 4y - 19 = 0 \\ 4x + 3y - 53 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{269}{25}, \frac{83}{25}\right)$$

Los puntos de la recta $3x - 4y = 19$ son de la forma $\left(\frac{269}{25} + 4\lambda, \frac{83}{25} + 3\lambda\right)$. Por otra parte, $d(B, C) = d(A, B)$, por tanto tenemos dos posibilidades para el vértice C :

$$\sqrt{(4\lambda)^2 + (3\lambda)^2} = \sqrt{\left(\frac{69}{25}\right)^2 + \left(-\frac{92}{25}\right)^2} \Rightarrow 5|\lambda| = \frac{23}{5} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{23}{25} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \left(\frac{361}{25}, \frac{152}{25}\right) \\ C_2 = \left(\frac{177}{25}, \frac{14}{25}\right) \end{cases}$$

Por último, el vértice D_1 (asociado a C_1) es el simétrico de B respecto del punto medio M_1 de AC_1 :

$$M_1 = \left(\frac{561}{50}, \frac{327}{50}\right) \Rightarrow D_1\left(\frac{292}{25}, \frac{244}{25}\right)$$

Análogamente se obtiene el vértice D_2 asociado a C_2 : $M_2 = \left(\frac{377}{50}, \frac{189}{50}\right) \Rightarrow D_2\left(\frac{108}{25}, \frac{106}{25}\right)$

- b) Aunque obtenemos dos posibles cuadrados en el apartado anterior, en ambos la longitud del lado es $l = d(A, B) = \frac{23}{5}$ u, por tanto el perímetro es $P = 4l = \frac{92}{5}$ u y el área es $S = l^2 = \frac{529}{25}$ u².

142. Calcula el valor de k para que la recta $x + y = k$ forme con los ejes coordenados un triángulo que verifique que su área es 5 u².

La recta corta a los ejes coordenados en $(k, 0)$ y $(0, k)$. El área del triángulo será, por tanto, $\frac{k^2}{2}$. Así, $k = \pm\sqrt{10}$.

143. Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de las rectas dadas.

$$r: x + 3y = 14$$

$$s: 3x - 5y = 4$$

$$t: 2x - y = -7$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} x + 3y = 14 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{41}{7}, \frac{19}{7}\right) \quad \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{39}{7}, -\frac{29}{7}\right) \quad \begin{cases} x + 3y = 14 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow C(-1, 5)$$

La longitud de la base es $d(A, B) = \sqrt{\frac{8704}{49}} = \frac{16\sqrt{34}}{7}$ u y la altura es $d(C, AB) = \frac{|-3 - 25 - 4|}{\sqrt{34}} = \frac{16\sqrt{34}}{17}$ u, por

tanto, el área del triángulo ABC es $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{16\sqrt{34}}{7} \cdot \frac{16\sqrt{34}}{17} = \frac{256}{7}$ u².

144. Calcula las rectas que pasan por el punto $P(1, 2)$ y que determinan con los ejes coordenados un triángulo de área $4,5 u^2$.

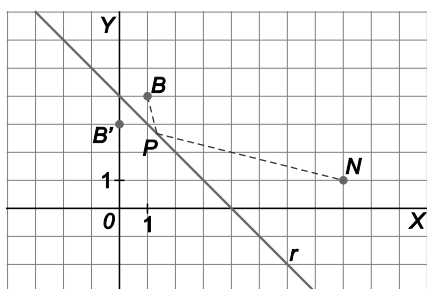
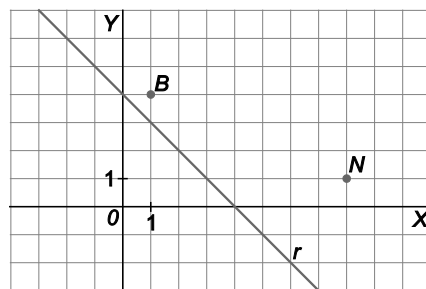
Las rectas que pasan por P son de la forma $y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx + 2 - m$. Cortan a los ejes en los puntos $(0, 2 - m)$ y $\left(\frac{m - 2}{m}, 0\right)$.

Tenemos:

$$\frac{(2 - m)m - 2}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow -m^2 + 4m - 4 = 9m \Rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \Rightarrow y = -4x + 6 \\ m = -1 \Rightarrow y = -x + 3 \end{cases}$$

Hay, por tanto, dos soluciones.

145. Construye el camino que debe seguir la bola $B(1, 4)$ para que llegue al punto $N(8, 1)$ después de chocar en la banda $r: x + y - 4 = 0$.



El simétrico de B respecto de r es $B'(0, 3)$.

El punto de choque M es el punto de intersección de las rectas $B'N$ y r .

$$B'N: \frac{x}{8} = \frac{y - 3}{-2} \Rightarrow -x = 4y - 12 \Rightarrow x + 4y - 12 = 0$$

$$\begin{cases} x + 4y - 12 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{8}{3} \Rightarrow M\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Camino: $\overline{BM} - \overline{MN}$

146. Dados los puntos $A(4, 0)$, $M(6, 2)$ y $N(2, 4)$, calcula los vértices B y C del triángulo ABC de forma que M sea el punto medio del lado \overline{AB} y N el punto medio del lado \overline{AC} .

Si $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{4 + b_1}{2} = 6 \\ \frac{0 + b_2}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 8, b_2 = 4 \Rightarrow B(8, 4)$$

$$\begin{cases} \frac{4 + c_1}{2} = 2 \\ \frac{0 + c_2}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 8 \Rightarrow C(0, 8)$$

147. El vértice B que determina el ángulo desigual de un triángulo isósceles, ABC , está situado en el punto $(1, 2)$. Sabiendo que el vértice A tiene por coordenadas $(1, 7)$ y que el vértice C está en la recta $x - y + 1 = 0$, calcula las coordenadas del vértice C .

El punto C es de la forma $(t - 1, t)$. Como el triángulo es isósceles, tenemos:

$$d(A, B) = d(B, C) \Rightarrow \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{(t - 1 - 1)^2 + (t - 2)^2} \Rightarrow 5 = \pm\sqrt{2}(t - 2) \Rightarrow t = \frac{4 \pm 5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} C\left(\frac{2 + 5\sqrt{2}}{2}, \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2}\right) \\ C\left(\frac{2 - 5\sqrt{2}}{2}, \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

148. Determina las ecuaciones de los lados de un triángulo que cumple las siguientes condiciones:

- I. Tiene un vértice en $A(2, -7)$.**
- II. La recta $3x + y + 11 = 0$ es la altura relativa al vértice B .**
- III. La recta $x + 2y + 7 = 0$ es la mediana correspondiente al vértice C .**

La recta AC es perpendicular a $3x + y + 11 = 0$, luego es de la forma $x - 3y + k = 0$.

Como pasa por A , ha de ser $k = -23$ y, por tanto, $AC: x - 3y - 23 = 0$.

Para conocer C basta calcular el punto de intersección de $x - 3y - 23 = 0$ y la altura $x + 2y + 7 = 0$, obteniéndose:

$$\begin{cases} x - 3y - 23 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = -6 \Rightarrow C(5, -6)$$

El vértice $B(a, b)$ pertenece a la altura $3x + y + 11 = 0$, por lo que se ha de cumplir $3a + b + 11 = 0$.

Por otra parte el punto medio del lado $AB, M\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b-7}{2}\right)$, pertenece a la mediana $x + 2y + 7 = 0$, por lo que se cumplirá la ecuación $\frac{a+2}{2} + 2 \cdot \frac{b-7}{2} + 7 = 0 \Rightarrow a + 2b + 2 = 0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas para a y b , encontramos las coordenadas del punto B :

$$\begin{cases} 3a + b + 11 = 0 \\ a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = 1 \Rightarrow B(-4, 1)$$

Las ecuaciones de los otros dos lados se calculan ahora de forma inmediata obteniéndose:

$$AB: 4x + 3y + 13 = 0 \text{ y } BC: 7x + 9y + 19 = 0.$$

149. Calcula las ecuaciones de una recta que pasa por el punto $P(3, -1)$ y forma triángulos isósceles con las rectas $r: x - 2y = 0$ y $s: 2x + y = 0$.

Las pendientes de r y s valen $\frac{1}{2}$ y -2 por lo que son perpendiculares. Por tanto, la recta buscada forma un ángulo de 45° con cada una de las rectas dadas.

Observemos que hay dos rectas que cumplen esta condición, la bisectriz de r y s y la recta buscada.

Si m es la pendiente de la recta buscada, tomando, por ejemplo, s , tenemos:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{-2 - m}{1 - 2m} \right| \Rightarrow -2 - m = \pm(1 - 2m) \Rightarrow m = 3, m = -\frac{1}{3}$$

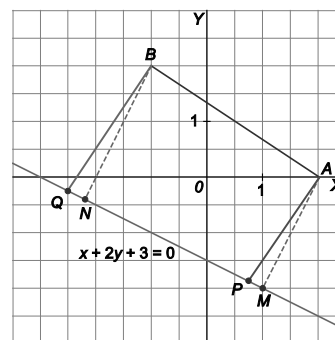
Para cualquiera de estos valores, el ángulo formado con r es también 45° .

$$\text{Obtenemos así las dos rectas predichas, } y + 1 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 10 \text{ y } y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow x + 3y = 0.$$

La segunda pasa por el punto de corte, $O(0, 0)$, de r y s , por lo que es la bisectriz de r y s , es decir, la ecuación buscada es $y = 3x - 10$.

150. Un trapecio rectángulo tiene dos vértices en los puntos $A(2, 0)$ y $B(-1, 2)$. Los dos vértices restantes están sobre la recta $x + 2y + 3 = 0$. Halla sus coordenadas. ¿Cuántas soluciones hay?

Como $\overline{AB} = (-3, 2)$, el lado AB no es paralelo a la recta $x + 2y + 3 = 0$ sobre la que están los otros dos vértices.



Caso 1: Los ángulos rectos del trapecio corresponden a los vértices A y B .

Las rectas perpendiculares a AB son de la forma $-3x + 2y + k = 0$.

La que pasa por A es $-3x + 2y + 6 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es uno de los vértices buscados:

$$\begin{cases} -3x + 2y + 6 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{4}, y = -\frac{15}{8} \Rightarrow P\left(\frac{3}{4}, -\frac{15}{8}\right)$$

La que pasa por B es $-3x + 2y - 7 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es el otro vértice:

$$\begin{cases} -3x + 2y - 7 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}, y = -\frac{1}{4} \Rightarrow Q\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Caso 2: Los ángulos rectos se encuentran sobre la recta $x + 2y + 3 = 0$.

El vector normal de la recta y por tanto el vector director de los lados es: $\vec{n} = (1, 2)$

La recta que pasa por $A(2, 0)$ y que es perpendicular a $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$(x, y) = (2, 0) + (1, 2)\lambda \Rightarrow y = 2x - 4$$

La recta que pasa por $B(-1, 2)$ y que es perpendicular a $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$(x, y) = (-1, 2) + (1, 2)\lambda \Rightarrow y = 2x + 4$$

Los vértices son:

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -2 \Rightarrow M(1, -2)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{11}{5}, y = -\frac{2}{5} \Rightarrow N\left(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

151. Del rombo $ABCD$, se conocen las coordenadas de los puntos $A(2, 3)$ y $C(-2, -5)$. Sabiendo que su área es 20 u^2 , halla los vértices B y D y el perímetro del rombo.

La ecuación de AC es $2x - y - 1 = 0$ y el punto medio de AC es $M(0, -1)$.

Como BD es perpendicular a AC y pasa por M , tenemos $BD: x + 2y + 2 = 0$. De este modo, B es de la forma $(-2 - 2b, b)$ y C es de la forma $(-2 - 2d, d)$.

Para calcular b y d observemos que la diagonal AC mide $\sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ u}$, por tanto, como el área es 20 u^2 , la diagonal BD mide $2\sqrt{5} \text{ u}$.

Además, el punto medio de BD es M , por tanto, tenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{(-2d + 2b)^2 + (d - b)^2} = 2\sqrt{5} \\ \left(-2 - b - d, \frac{b + d}{2}\right) = (0, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5(d - b)^2} = 2\sqrt{5} \\ b + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - b = \pm 2 \\ b + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0, d = -2 \\ b = -2, d = 0 \end{cases}$$

Los vértices son $B(2, -2)$ y $D(-2, 0)$, el perímetro es $P = 4d(A, B) = 20 \text{ u}$.

152. Dadas las rectas $r : x - 2y = 2$ y $s : 2x - y + 6 = 0$, halla todas las rectas que pasen por el punto $P(1, 1)$ y que formen con r y s ángulos iguales.

Las rectas que pasan por P son de la forma: $y - 1 = m(x - 1) \Rightarrow mx - y + 1 - m = 0$.

$$\text{Ángulo con } r: \cos \alpha = \frac{|m+2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1+m^2}} \qquad \text{Ángulo con } s: \cos \alpha = \frac{|2m+1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1+m^2}}$$

Por tanto:
$$\begin{cases} m+2 = 2m+1 \Rightarrow m=1 \Rightarrow a_1 \equiv x-y=0 \\ m+2 = -2m-1 \Rightarrow m=-1 \Rightarrow -x-y+2=0 \Rightarrow a_2 \equiv x+y-2=0 \end{cases}$$

153. Los puntos $A(-2, 2)$ y $C(3, 1)$ son vértices opuestos de un rombo $ABCD$. Sabiendo que el vértice B pertenece al eje de abscisas, calcula las coordenadas de los vértices B y D y el área del rombo.

La diagonal BD está contenida en la recta perpendicular a la recta $AC : x + 5y - 8 = 0$ que pasa por $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, punto medio de la diagonal AC .

Por tanto, la diagonal BD está contenida en la recta $5x - y - 1 = 0$.

La intersección de dicha recta con el eje de abscisas es el vértice $B\left(\frac{1}{5}, 0\right)$.

El vértice $D(a, b)$ verifica: $\overline{BD} = 2\overline{BM} \Rightarrow \left(a - \frac{1}{5}, b\right) = \left(\frac{3}{5}, 3\right) \Rightarrow a = \frac{4}{5}, b = 3 \Rightarrow D\left(\frac{4}{5}, 3\right)$.

Las diagonales del rombo miden $d(A,C) = \sqrt{26}$ u y $d(B,D) = \sqrt{\frac{234}{25}} = \frac{3\sqrt{26}}{5}$ u, por tanto, el área del rombo es

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{3\sqrt{26}}{5} = \frac{39}{5} \text{ u}^2.$$

154. El lado desigual de un triángulo isósceles es el segmento \overline{AB} , con $A(3, 1)$ y $B(1, 2)$. Calcula las coordenadas del vértice C del triángulo, sabiendo que su área es de 4 u^2 .

$d(A,B) = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ u, por tanto, la altura del triángulo verifica: $4 = \frac{1}{2} \sqrt{5} h \Rightarrow h = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ u.

C es el punto que situado en la perpendicular a AB por su punto medio y que dista de AB $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ u :

$AB : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow -x+3 = 2y-2 \Rightarrow x+2y-5=0$, y el punto medio de \overline{AB} es $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

La recta perpendicular es $2x - y - \frac{5}{2} = 0$ y sus puntos son de la forma $\left(t, 2t - \frac{5}{2}\right)$. Imponiendo que disten $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ u de la recta AB tenemos:

$$\frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{|t+2\left(2t-\frac{5}{2}\right)-5|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow |5t-10|=8 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{18}{5} \Rightarrow C_1\left(\frac{18}{5}, \frac{47}{10}\right) \\ t = \frac{2}{5} \Rightarrow C_2\left(\frac{2}{5}, -\frac{17}{10}\right) \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones.

PARA PROFUNDIZAR

155. Dadas las rectas $r: x - y = 0$ y $s: x + y - 7 = 0$ y el segmento de extremos

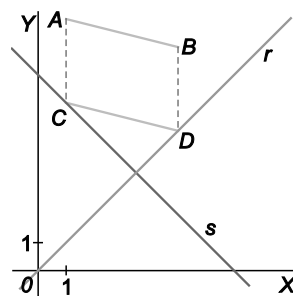
$A(1, 9)$ y $B(5, 8)$, calcula las coordenadas de los extremos de un segmento \overline{CD} de la misma longitud que \overline{AB} , paralelo a él y tal que el punto C pertenezca a la recta s y el punto D a la r .

Los puntos de r son de la forma $D(d, d)$ y los puntos de s son de la forma $C(c, 7-c)$.

Los vectores \overline{AB} y \overline{CD} pueden ser iguales u opuestos, por tanto:

$$\begin{cases} d - c = 4 \\ d - 7 + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - c = 4 \\ d + c = 6 \end{cases} \Rightarrow c = 1, d = 5 \Rightarrow C(1, 6) \text{ y } D(5, 5)$$

$$\begin{cases} d - c = -4 \\ d - 7 + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - c = -4 \\ d + c = 8 \end{cases} \Rightarrow c = 6, d = 2 \Rightarrow C(6, 1) \text{ y } D(2, 2)$$



156. Dado el triángulo $A(2, 1)$, $B(1, -2)$ y $C(-1, 3)$

a) Calcula el punto P , intersección de la bisectriz del ángulo C con el lado opuesto \overline{AB} .

b) Demuestra que $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}$.

a) $AB: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} \Rightarrow 3x - y - 5 = 0$ $AC: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$

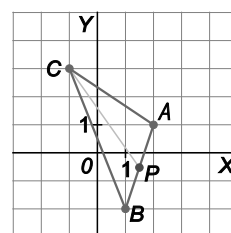
$BC: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{5} \Rightarrow 5x + 2y - 1 = 0$

Bisectriz interior del ángulo C :

$$\frac{2x + 3y - 7}{\sqrt{13}} = -\frac{5x + 2y - 1}{\sqrt{29}} \Rightarrow (2\sqrt{29} + 5\sqrt{13})x + (3\sqrt{29} + 2\sqrt{13})y - 7\sqrt{29} - \sqrt{13} = 0$$

Al resolver el sistema formado por las rectas bisectriz y AB se obtiene el punto: $P\left(\frac{45 - \sqrt{377}}{16}, \frac{55 - 3\sqrt{377}}{16}\right)$

b) En efecto, al realizar el cálculo se obtiene $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB} = \frac{\sqrt{377}}{29}$.



157. Calcula, de forma exacta, las coordenadas de los vértices del pentágono regular de la figura sabiendo que su lado mide 2 unidades.

Comprueba que el cociente entre la distancia de D a B y la distancia de D a C es el número áureo $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

El ángulo interior de un pentágono regular vale $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

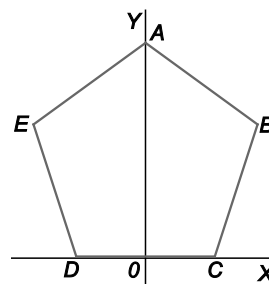
$C(1, 0)$, $D(-1, 0)$

Por el teorema del coseno: $DB = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 108^\circ} = \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ}$

Teniendo en cuenta que las longitudes de DA y DB son iguales, tenemos: $A\left(0, \sqrt{DA^2 - 1^2}\right) = \left(0, \sqrt{7 + 8 \cos 72^\circ}\right)$

$B\left(-1 + \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ, \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \sin 36^\circ\right)$ $E\left(1 - \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ, \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \sin 36^\circ\right)$

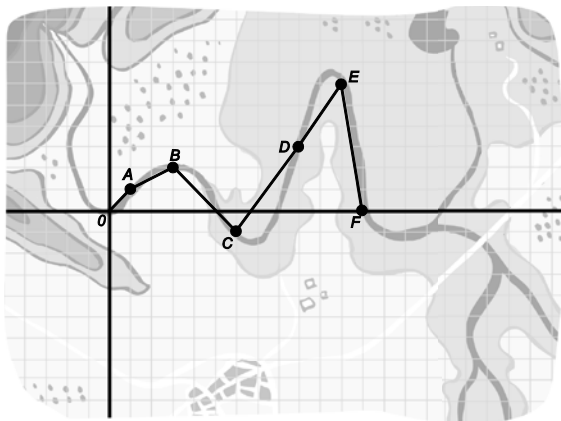
$$\frac{DB}{DC} = \frac{\sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ}}{2} = \sqrt{2 + 2 \cos 72^\circ} = 1,618033989... = \Phi$$



ENTORNO MATEMÁTICO

A vueltas con el río

Dentro de unos días, la clase de Antonio y Juana va a salir de excursión al campo. Aprovechando esta circunstancia y con el propósito de hacer la clase de matemáticas más animada, la profesora propone un concurso por equipos: ¿quién puede dar la mejor aproximación a la longitud que separa a los dos puntos O y F del cauce de un río?



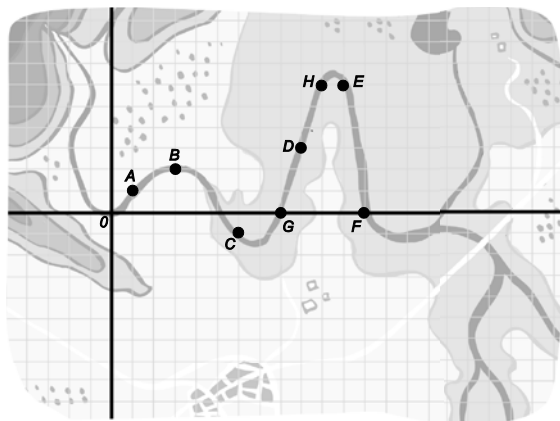
Para ello proporciona un boceto del río de la zona de acampada, calcado de un plano a escala obtenido de una página de mapas de Internet. Para facilitar la tarea, inserta un par de ejes coordenados de forma que el origen de coordenadas es el punto O. La cuadrícula está formada por cuadrados de 20 m de lado.

Rápidamente y con intención de demostrar que son los más rápidos a la hora de resolver problemas y, por tanto, merecedores de ganar el concurso, el equipo de Antonio, idea el siguiente método:

Elegirá cinco puntos del cauce que junto con O y con F formarán una línea poligonal OA-AB-BC-CD-DE-EF. La longitud de esta poligonal se aproximará a la longitud del cauce del río.

Tras exponer su idea a la clase, la profesora confirma que el método parece adecuado pero indica que cree que la aproximación, tal vez debido a la rapidez con la que ha sido elaborada, no es muy buena y que habría que mejorarla.

Basándose en la misma idea, el equipo de Juana, tras reflexionar un poco más, propone colocar dos puntos más G y H de forma que la nueva poligonal se ajuste mejor a la línea del cauce.



- a) Calcula la aproximación que obtiene el equipo de Antonio.
- b) Calcula la aproximación que obtiene el equipo de Juana.
- c) Añade algún punto más y obtén la nueva aproximación.

- a) $O(0, 0), A(1, 1), B(3, 2), C(6, -1), D(9, 3), E(11, 6)$ y $F(12, 0)$

La poligonal mide $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{18} + \sqrt{25} + \sqrt{13} + \sqrt{37} \approx 22,58$ u , por tanto, el equipo de Antonio obtiene 451,6 m.

- b) Añadiendo los puntos $G(8,0)$ y $H(10, 6)$ la poligonal mide $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{18} + \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{1} + \sqrt{37} \approx 23,54$ u , por lo que el equipo de Juana obtiene 470,8 m.

- c) Añadiendo, por ejemplo, $I(4,5; 1)$ y $J(7,5; -1)$ obtenemos como aproximación $20 \cdot 23,98 = 479,6$ m.

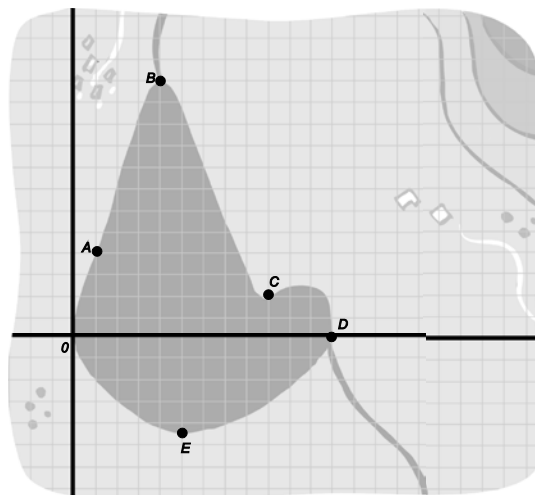
¿Piraguas en la laguna?

En la zona en la que van a acampar, el río desemboca en una laguna y los profesores del colegio están pensando si alquilar o no unas piraguas para practicar piragüismo. Como la actividad, además de cara, conlleva riesgos (y no sólo el de algún alumno en remojo), solo lo harán si la laguna es lo suficientemente grande como para que la experiencia merezca la pena y no una charca en la que dar un par de paladas.

La profesora propone un nuevo reto a los equipos: calcular aproximaciones de la superficie de dicha laguna.

De nuevo proporciona a los equipos un esquema con los límites de la superficie que se quiere calcular. Los cuadros de la cuadrícula en este caso tienen por lado 4m.

En este caso, el más rápido es el equipo de Juana, que propone considerar los puntos O , A , B , C , D y E del perímetro del lago y calcular el área del polígono formado por ellos mediante triangulación.



- a) Calcula el área de los triángulos ABC , OAC , OCD y ODE de la figura utilizando los métodos de la geometría analítica.
- b) Utiliza alguna aplicación de geometría dinámica para obtener el área de los triángulos anteriores y añade algunos puntos más para mejorar la aproximación.

- a) $O(0, 0)$, $A(1, 4)$, $B(4, 12)$, $C(9, 2)$, $D(12, 0)$ y $E(5, -4,5)$

$$ABC: \begin{cases} \text{base: } d(A,C) = \sqrt{64+3} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ u} \\ AC: x+4y-17=0 \\ \text{altura: } h = d(B,AC) = \frac{|4+4 \cdot 12-17|}{\sqrt{17}} = \frac{35}{\sqrt{17}} = \frac{35\sqrt{17}}{17} \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \frac{35\sqrt{17}}{17} = 35 \text{ u}^2$$

$$OAC: \begin{cases} \text{base: } d(O,A) = \sqrt{17} \text{ u} \\ OA: 4x-y=0 \\ \text{altura: } h = d(C,OA) = \frac{|36-2|}{\sqrt{17}} = \frac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17} \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot 2 = 17 \text{ u}^2$$

$$OCD: \begin{cases} \text{base: } d(O,D) = 12 \text{ u} \\ \text{altura: } h = 2 \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_3 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 12 \text{ u}^2 \quad \triangle ODE: \begin{cases} \text{base: } d(O,D) = 12 \text{ u} \\ \text{altura: } h = 4,5 \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_4 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4,5 = 27 \text{ u}^2$$

El equipo de Juana obtiene $S \approx S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 35 + 17 + 12 + 27 = 91 \text{ u}^2 \Rightarrow 91 \cdot 4^2 = 1456 \text{ m}^2$

- b) La superficie se aproxima a $103 \text{ u}^2 \Rightarrow 103 \cdot 16 = 1648 \text{ m}^2$

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula en cada caso la ecuación de la recta.

- a) Paralela a la recta $s: 2x + 3y = 5$ y que pasa por $P(0, -3)$.
- b) Perpendicular a la recta $s: 4x - 3y + 5 = 0$ y que pasa por el punto $P(1, 1)$.
- c) De dirección la del vector \overline{AB} con $A(2, 4)$ y $B(-1, 3)$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x + y - 20 = 0$ e $y = x + 2$.

a) Las rectas paralelas a s son de la forma $2x + 3y + K = 0$, la que pasa por P es:

$$-9 + K = 0 \Rightarrow K = 9 \Rightarrow 2x + 3y + 9 = 0$$

b) Las rectas perpendiculares a s son de la forma $3x + 4y + K = 0$, la que pasa por P es:

$$3 + 4 + K = 0 \Rightarrow K = -7 \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$$

c) Calculamos el punto de intersección:

$$\begin{cases} 5x + y - 20 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 5 \Rightarrow P(3, 5)$$

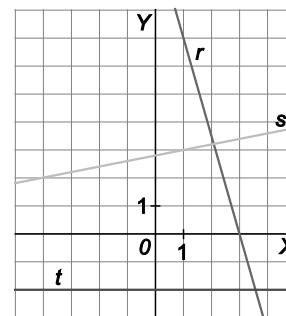
Como $\overline{AB} = (-3, -1)$, la recta buscada tiene ecuación: $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-5}{-1} \Rightarrow x - 3y + 12 = 0$

2. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas r , s y t que aparecen en la figura. Indica un vector de dirección de cada una de ellas.

La recta r pasa por los puntos $(3, 0)$ y $(1, 7)$, por tanto, un vector director es $\overline{u}_r = (-2, 7)$, su ecuación es $r: 7x + 2y - 21 = 0$, su pendiente es $m_r = -\frac{7}{2}$ y su ordenada en el origen es $n_r = \frac{21}{2}$.

La recta s pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(-4, 2)$, por tanto, un vector director es $\overline{u}_s = (5, 1)$, su ecuación es $s: x - 5y + 14 = 0$, su pendiente es $m_s = \frac{1}{5}$ y su ordenada en el origen es $n_s = \frac{14}{5}$.

La recta t es la recta horizontal $t: y = -2$, con vector director $\overline{u}_t = (1, 0)$, pendiente $m_t = 0$ y ordenada en el origen $n_t = -2$.



3. Calcula la ecuación de la recta paralela a $x + y = 0$ y que forma con los ejes coordenados un triángulo de 30 u^2 . ¿Hay una única solución?

La recta debe tener por ecuación $x + y = k$, por lo que corta a los ejes en los puntos $A(k, 0)$ y $B(0, k)$.

El área del triángulo OAB será $S = \frac{k^2}{2} = 30 \Rightarrow k^2 = 60 \Rightarrow k = \pm\sqrt{60} = \pm 2\sqrt{15}$

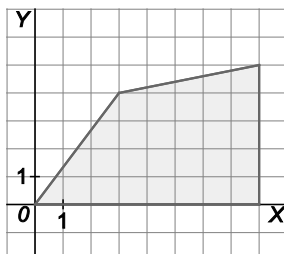
Por tanto, hay dos soluciones: $\begin{cases} x + y = \sqrt{60} \\ x + y = -\sqrt{60} \end{cases}$

4. Calcula el punto simétrico de $P(5,-2)$ respecto del punto intersección de las rectas $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$

El punto de intersección de las rectas es $Q(2, 1)$, por tanto, si $P'(a, b)$ es el simétrico de P , tenemos que Q debe

ser el punto medio de PP' , con lo que:
$$\begin{cases} \frac{5+a}{2} = 2 \\ \frac{-2+b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 4 \Rightarrow P' = (-1, 4)$$

5. Calcula el área del cuadrilátero de la figura.



Los vértices del cuadrilátero son $O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(8, 5)$ y $C(8, 0)$.

$$\text{Área del triángulo } OAC: S_1 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{d(A,C) \cdot d(A,OC)}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ u}^2$$

$$\text{Área del triángulo } ACB: S_2 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{d(B,C) \cdot d(A,BC)}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} \text{ u}^2$$

$$\text{Área del cuadrilátero: } S = S_1 + S_2 = \frac{57}{2} \text{ u}^2$$

6. Dado el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(2, -1)$, calcula:

- Los ángulos
- Las coordenadas de su ortocentro
- La ecuación de la bisectriz del ángulo A

$$\text{a) } AB: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow x-2y+7=0 \quad AC: \frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow 3x+5y-1=0 \quad BC: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow 5x+y-9=0$$

$$\text{Ángulo } A: \cos \hat{A} = \frac{|3-10|}{\sqrt{5}\sqrt{34}} = \frac{7}{\sqrt{170}} = \frac{7\sqrt{170}}{170} \Rightarrow \hat{A} = 57,53^\circ$$

$$\text{Ángulo } B: \cos \hat{B} = \frac{|5-2|}{\sqrt{5}\sqrt{26}} = \frac{3}{\sqrt{130}} = \frac{3\sqrt{130}}{130} \Rightarrow \hat{B} = 74,74^\circ$$

$$\text{Ángulo } C: \cos \hat{C} = \frac{|15+5|}{\sqrt{34}\sqrt{26}} = \frac{20}{2\sqrt{221}} = \frac{10\sqrt{221}}{221} \Rightarrow \hat{C} = 47,73^\circ$$

$$\text{b) Altura por } A: x-5y+K=0 \Rightarrow -3-10+K=0 \Rightarrow K=13 \Rightarrow x-5y+13=0$$

$$\text{Altura por } B: 5x-3y+K=0 \Rightarrow 5-12+K=0 \Rightarrow K=7 \Rightarrow 5x-3y+7=0$$

$$\text{Ortocentro: } \begin{cases} x-5y+13=0 \\ 5x-3y+7=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{11}, y = \frac{29}{11} \Rightarrow H\left(\frac{2}{11}, \frac{29}{11}\right)$$

$$\text{c) } \frac{x-2y+7}{\sqrt{5}} = \frac{3x+5y-1}{\sqrt{34}} \Rightarrow (\sqrt{34}-3\sqrt{5})x - (2\sqrt{34}+5\sqrt{5})y + 7\sqrt{34}-\sqrt{5} = 0$$

7. Dados la recta $r: x + y - 1 = 0$ y los puntos $A(4, -4)$ y $B(5, -1)$, calcula el punto intersección de la mediatriz del segmento AB con la recta perpendicular a r y que pasa por A .

Mediatriz del segmento $AB: \sqrt{(x-4)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2} \Rightarrow x + 3y + 3 = 0$

Perpendicular a r por $A: x - y + K = 0 \Rightarrow 4 + 4 + K = 0 \Rightarrow K = -8 \Rightarrow x - y - 8 = 0$

Punto de intersección: $\begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ x - y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{21}{4}, y = -\frac{11}{4} \Rightarrow P\left(\frac{21}{4}, -\frac{11}{4}\right)$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Las rectas $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$:

- A. Son paralelas. C. Son secantes y se cortan en el punto $R(1, 1)$.
 B. Son secantes y se cortan en el punto $Q(2, 3)$. D. Son la misma recta.

$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$ $s: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$

La respuesta correcta es D.

2. La proyección ortogonal del segmento de extremos $A(1, 5)$ y $B(3, 5)$ sobre la recta $y - x = 0$ mide:

- A. $2u$ B. $2\sqrt{2}u$ C. $\sqrt{2}u$ D. Ninguna de las anteriores.

Las rectas perpendiculares a $x - y = 0$ son de la forma $x + y + K = 0$, la que pasa por A es $x + y - 6 = 0$ y la que pasa por B es $x + y - 8 = 0$. Intersecando estas rectas con $x - y = 0$ obtenemos los extremos A' y B' de la proyección ortogonal del segmento AB . Así, $A'(3, 3)$ y $B'(4, 4)$, con lo que $d(A', B') = \sqrt{2}$, la respuesta C.

3. El área del triángulo determinado por el origen de coordenadas y las intersecciones de la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ con los ejes coordenados es:

- A. $A = ab$ B. $A = \frac{ab}{2}$ C. $A = 2ab$ D. $A = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$

Los puntos de intersección son $(a, 0)$ y $(0, b)$, por tanto, el área del triángulo es $A = \frac{ab}{2}$, la respuesta B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Se consideran los puntos del plano $A(a, 1)$, $B(a - 1, 4)$ y $C(-1, a)$.

- A. Para $a = -2$ los puntos están alineados.
- B. Para $a = \frac{1}{2}$, ABC es un triángulo rectángulo en A .
- C. Para $a = 2$, ABC es un triángulo isósceles.
- D. Para $a = -2$, B es el punto medio del segmento AC .

Se observa que $\overline{AB} = (-1, 3)$, $\overline{AC} = (-1-a, a-1)$, $\overline{BC} = (-a, a-4)$ y el punto medio de AC es $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{1+a}{2}\right)$.

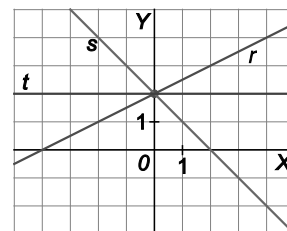
Si $a = -2$ se tiene que $\overline{AB} = (-1, 3)$ y $\overline{AC} = (1, -3)$ son proporcionales, por lo que la respuesta A es correcta, pero el punto medio de AC , $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ no coincide con B , por lo que la respuesta D es incorrecta.

Si $a = \frac{1}{2}$ se tiene que $\overline{AB} = (-1, 3)$ y $\overline{AC} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ son perpendiculares, por lo que la respuesta B es correcta.

Si $a = 2$ se tiene que $\overline{AB} = (-1, 3)$ y $\overline{AC} = (-3, -1)$ tienen la misma longitud, pero es distinta de la longitud de $\overline{BC} = (-2, -2)$, por lo que la respuesta C también es correcta.

5. Para r, s y t , sean m_r, m_s y m_t las pendientes y n_r, n_s y n_t las ordenadas en el origen.

- A. $m_r = 2, m_s = -2$ y $m_t = 0$
- B. $m_r = \frac{1}{2}, m_s = -1$ y $m_t = 0$
- C. $m_t = 1$ y $n_t = 2$
- D. $m_r = \frac{1}{2}$ y $n_r = 2$



$m_r = \frac{1}{2}, m_s = -1, m_t = 0$ y $n_r = n_s = n_t = 2$, por tanto, las respuestas correctas son B y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se considera el haz de rectas $2x - y + \lambda(x + y - 3) = 0$ de vértice el punto $(1, 2)$ y se consideran las afirmaciones:

1. La ecuación de la recta r se obtiene al sustituir algún valor real de λ en la expresión del haz.
2. La recta r pasa por el punto $(1, 2)$

- A. $1 \Leftrightarrow 2$
- B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$
- C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$
- D. Nada de lo anterior.

La ecuación del haz representa todas las rectas que pasan por $(1, 2)$ salvo la recta $x + y - 3 = 0$, por tanto, la relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Para calcular la ecuación de una única recta s paralela a la recta r y que diste de ella k u se dan los siguientes datos:

1. La ecuación general de r es $3x - 4y + 3 = 0$.
2. $k = 3$ u
3. La ordenada en el origen de r es mayor que la de s .

A. El dato 1 es innecesario.

C. El dato 3 es innecesario.

B. El dato 2 es innecesario.

D. Ningún dato es innecesario.

Obviamente necesitamos los datos 1 y 2, pero sólo con estos datos podemos encontrar dos rectas paralelas a r que disten de ella k u, una a cada lado de r . Para que haya una única solución también necesitamos el dato 3, por tanto, la respuesta correcta es D.