6 Cónicas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Comprueba que la ecuación $3x^2+3y^2-6x+12y-14=0$ representa una circunferencia y determina su radio.

Tenemos $3x^2+3y^2-6x+12y-14=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y-\frac{14}{3}=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=\frac{29}{3}$, ecuación de una circunferencia de centro $C(1, -2)$ y radio $r=\sqrt{\frac{29}{3}}$.

3. Estudia si el punto *P* es interior, exterior o perteneciente a la circunferencia $x^2+y^2-10x=0$.

a) $P(2, 4)$ **b)** $P(2, 2)$ **c)** $P(2, 5)$

La circunferencia tiene centro $C(5, 0)$ y radio $r=\sqrt{25}=5$.

a) $d(P, C)=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5=r \Rightarrow P$ pertenece a la circunferencia.

b) $d(P, C)=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}<r \Rightarrow P$ es interior a la circunferencia.

c) $d(P, C)=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}>r \Rightarrow P$ es exterior a la circunferencia.

4. Indica la posición relativa de la recta $3x+4y=25$ respecto de la circunferencia $x^2+y^2-6x+8y-25=0$.

La circunferencia tiene centro $C(3, -4)$ y radio $r=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\frac{|9-16-25|}{\sqrt{9+16}}=\frac{32}{5}<r$, por tanto, la recta y la circunferencia son secantes.

5. Estudia la posición relativa de cada pareja de circunferencias.

a) $x^2+y^2=25$ y $2x^2+2y^2+3y-3=0$ **b)** $x^2+y^2+2x-16=0$ y $x^2+y^2+5x+3y-9=0$

a) La primera circunferencia tiene centro $C_1(0, 0)$ y radio $r_1=\sqrt{25}=5$, la segunda tiene centro $C_2\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{33}{16}}=\frac{\sqrt{33}}{4}$. Como $d(C_1, C_2)=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$, tenemos $d(C_1, C_2)<r_1-r_2$ y, por tanto, la segunda circunferencia es interior a la primera.

b) La primera circunferencia tiene centro $C_1(-1, 0)$ y radio $r_1=\sqrt{17}$, la segunda tiene centro $C_2\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{35}{2}}$. Como $d(C_1, C_2)=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, tenemos $r_2-r_1<d(C_1, C_2)<r_2+r_1$ y, por tanto, las circunferencias son secantes.

6 y 7. Ejercicios resueltos.

8. En cada caso, halla la posición relativa entre el punto y la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

a) $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ **b)** $Q\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ **c)** $R\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$ **d)** $P\left(2, \frac{1}{4}\right)$

a) $Pot_{Cf}(P) = 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot 1 - 2\cdot\frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4}$. *P* es interior a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(Q) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2} + 1 = 0$. *Q* pertenece a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(R) = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 2\cdot\frac{8}{5} - 2\cdot\frac{1}{5} + 1 = 0$. *R* pertenece a la circunferencia.

d) $Pot_{Cf}(S) = 2^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{16}$. *S* es exterior a la circunferencia.

9. Estudia la posición relativa del punto $P(m+1, m)$ respecto de las siguientes circunferencias, en función de los valores de *m*.

a) De centro el origen de coordenadas y radio 5

b) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

d) $9x^2 + 9y^2 + 36x - 54y + 117 = 9$

a) La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 25$, por tanto, $Pot_{Cf}(P) = (m+1)^2 + m^2 - 25 = 2m^2 + 2m - 24$

P es exterior a la circunferencia si $2m^2 + 2m - 24 > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$

P pertenece a la circunferencia si $2m^2 + 2m - 24 = 0 \Rightarrow m = -4,\ m = 3$

P es interior a la circunferencia si $2m^2 + 2m - 24 < 0 \Rightarrow m \in (-4, 3)$

b) $Pot_{Cf}(P) = (m+1-3)^2 + (m+1)^2 - 9 = 2m^2 - 2m - 4$

P es exterior a la circunferencia si $2m^2 - 2m - 4 > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

P pertenece a la circunferencia si $2m^2 - 2m - 4 = 0 \Rightarrow m = -1,\ m = 2$

P es interior a la circunferencia si $2m^2 - 2m - 4 < 0 \Rightarrow m \in (-1, 2)$

c) $Pot_{Cf}(P) = (m+1)^2 + m^2 - 2(m+1) + 4m - 4 = 2m^2 + 4m - 5$

P es exterior a la circunferencia si $2m^2 + 4m - 5 > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right) \cup \left(\frac{-2+\sqrt{14}}{2}, +\infty\right)$

P pertenece a la circunferencia si $2m^2 + 4m - 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2-\sqrt{14}}{2},\ m = \frac{-2+\sqrt{14}}{2}$

P es interior a la circunferencia si $2m^2 + 4m - 5 < 0 \Rightarrow m \in \left(\frac{-2-\sqrt{14}}{2}, \frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)$

d) Simplificando la ecuación, $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ y $Pot_{Cf}(P) = (m+1)^2 + m^2 + 4(m+1) - 6m + 12 = 2m^2 + 17$, por tanto, *P* es exterior a la circunferencia para cualquier valor de *m*.

10. Ejercicio resuelto.

11. Calcula el eje radical de las circunferencias y comprueba que es perpendicular a la recta que pasa por los centros.

a) $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

b) $C_1 : 12x^2 + 12y^2 = 27$ y $C_2 : x^2 + y^2 + 6x - 6y + 14 = 0$

c) $C_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$ y $C_2 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$

a) Eje radical: $4x - 2y - 10 = 0 \Rightarrow 2x - y - 5 = 0$

Los centros son, respectivamente, $C_1(0, 0)$ y $C_2(2, -1)$, por tanto, la recta que los une es $x + 2y = 0$, perpendicular al eje radical.

b) Eje radical: $\begin{cases} 12x^2 + 12y^2 - 27 = 0 \\ 12x^2 + 12y^2 + 72x - 72y + 168 = 0 \end{cases} \Rightarrow 72x - 72y + 195 = 0 \Rightarrow 24x - 24y + 65 = 0$

Los centros son, respectivamente, $C_1(0, 0)$ y $C_2(-3, 3)$, por tanto, la recta que los une es $x + y = 0$, perpendicular al eje radical.

c) Eje radical: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x + 4y - 41 = 0$

Los centros son, respectivamente, $C_1(2, 1)$ y $C_2(4, 3)$, por tanto, la recta que los une es $x - y - 1 = 0$, perpendicular al eje radical.

12. Sean $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$ y $(x-11)^2 + (y-1)^2 = 50$. Halla los puntos de corte de ambas circunferencias y comprueba que pertenecen al eje radical de las mismas.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 20 \\ (x-11)^2 + (y-1)^2 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0 \\ x^2 + y^2 - 22x - 2y + 72 = 0 \end{cases} \Rightarrow 18x - 6y - 72 = 0 \Rightarrow 3x - y - 12 = 0 \Rightarrow y = 3x - 12$$

El eje radical es $y = 3x - 12$, además, sustituyendo esta ecuación en, por ejemplo, la primera ecuación, obtenemos los puntos de corte, que, obviamente, cumplirán la ecuación del eje radical y, por tanto, pertenecerán al mismo.

$$x^2 + (3x-12)^2 - 4x - 8(3x-12) = 0 \Rightarrow 10x^2 - 100x + 240 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6,\ y = 6 \Rightarrow P(6, 6) \\ x = 4,\ y = 0 \Rightarrow Q(4, 0) \end{cases}$$

13. Dadas las siguientes circunferencias:

$$C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 4 \qquad C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0 \qquad C_3 : x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

a) Halla los ejes radicales de todas las posibles parejas entre las circunferencias dadas.

b) Razona si existe centro radical y, en su caso, hállalo.

a) Eje radical de C_1 y C_2: $8x - 19 = 0 \Rightarrow x = \frac{19}{8}$ Eje radical de C_1 y C_3: $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

Eje radical de C_2 y C_3: $-10x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

b) Los ejes radicales son rectas paralelas y, por tanto, no se cortan. No hay centro radical. También podríamos haber comprobado que los centros $C_1(0, 1)$, $C_2(4, 1)$ y $C_3(-1, 1)$ están alineados, ya que pertenecen a la recta $y = 1$, por lo que no existe centro radical.

14. Ejercicio interactivo.

15 y 16. Ejercicios resueltos.

17. Dibuja e indica los elementos de las siguientes elipses.

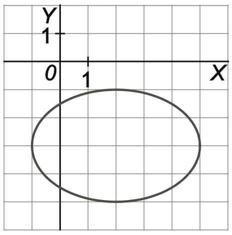
a) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

b) $x^2+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

a) $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Centro: $C(2, -3)$ Focos: $F\left(2+\sqrt{5}, -3\right)$, $F'\left(2-\sqrt{5}, -3\right)$

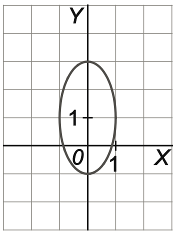
Vértices: $A(5, -3)$, $A'(-1, -3)$, $B(2, -1)$, $B'(2, -5)$



b) $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Centro: $C(0, 1)$ Focos: $F\left(0, 1+\sqrt{3}\right)$, $F'\left(0, 1-\sqrt{3}\right)$

Vértices: $A(0, 3)$, $A'(0, -1)$, $B(-1, 1)$, $B'(1, 1)$



18. Halla la ecuación reducida de una elipse centrada en el origen, si un foco es $F(12, 0)$ y su semieje mayor vale 13.

$a=13$, $c=d(O, F)=12$ y $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25}=5$. Por tanto, la ecuación es $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

19. Halla la ecuación de la elipse de centro (3, 4), $e=0,5$ y $F(8, 4)$.

$c=d(C, F)=5$, $e=\frac{c}{a}\Rightarrow a=10$ y $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$. Por tanto, la ecuación es $\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y-4)^2}{75}=1$.

20 y 21. Ejercicios resueltos.

22. Dibuja e indica los elementos de las siguientes hipérbolas.

a) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$

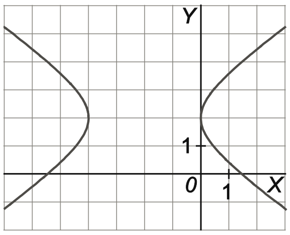
b) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

a) $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Centro: $C(-2, 2)$ Focos: $F\left(-2+\sqrt{6}, 2\right)$, $F'\left(-2-\sqrt{6}, 2\right)$

Vértices: $A(0, 2)$, $A'(-4, 2)$

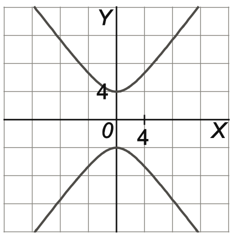
Asíntotas: $y-2=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$, $y-2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$



b) $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$, $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$

Centro: $C(0, 0)$ Focos: $F(0, 5)$, $F'(0, -5)$ Vértices: $A(0, 4)$, $A'(0, -4)$

Asíntotas: $y=\frac{4}{3}x$, $y=-\frac{4}{3}x$



23. Halla la ecuación canónica de las siguientes hipérbolas:

a) Hipérbola con excentricidad 1,5 y semieje $a = 4$. **b)** Hipérbola con foco en $F(2, 0)$ y que pasa por $P(2, 3)$

a) $a = 4$, $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = 6$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, por tanto, la ecuación es $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$.

b) $c = 2$, por tanto, la ecuación es de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{4 - a^2} = 1$. Imponiendo que la hipérbola pasa por P tenemos:

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{4 - a^2} = 1 \Rightarrow 16 - 4a^2 - 9a^2 = 4a^2 - a^4 \Rightarrow a^4 - 17a^2 + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16,\ b^2 = -12 \\ a^2 = 1,\ b^2 = 3 \end{cases}$$

Obviamente la primera posibilidad no es válida, por tanto, la ecuación es $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$.

24. Ejercicio resuelto.

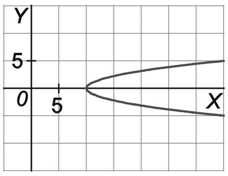
25. Calcula las coordenadas del foco y del vértice, las ecuaciones del eje y de la directriz y dibuja las siguientes parábolas.

a) $x - 10 = y^2$ **b)** $y^2 + 4y = 2 - 3x$ **c)** $x^2 + 6y + 13 = -5$ **d)** $x^2 - 4x = 6y - 28$

a) $x - 10 = y^2 \Rightarrow y^2 = x - 10$, parábola con apertura a la derecha.

Vértice: $V(10, 0)$ Eje: $y = 0$ $p = \dfrac{1}{2}$

Directriz: $x = \dfrac{39}{4}$ Foco: $F\left(\dfrac{41}{4}, 0\right)$

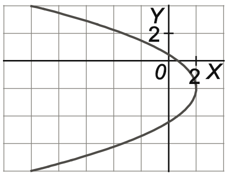


b) $y^2 + 4y = 2 - 3x \Rightarrow (y + 2)^2 - 4 = 2 - 3x \Rightarrow (y + 2)^2 = -3(x - 2)$,

parábola con apertura hacia la izquierda.

Vértice: $V(2, -2)$ Eje: $y = -2$ $p = \dfrac{3}{2}$

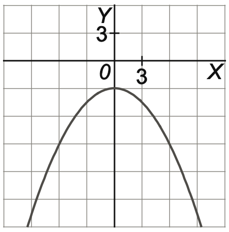
Directriz: $x = \dfrac{11}{4}$ Foco: $F\left(\dfrac{5}{4}, -2\right)$



c) $x^2 + 6y + 13 = -5 \Rightarrow x^2 = -6(y + 3)$, apertura hacia abajo.

Vértice: $V(0, -3)$ Eje: $x = 0$ $p = 3$

Directriz: $y = -\dfrac{3}{2}$ Foco: $F\left(0, -\dfrac{9}{2}\right)$

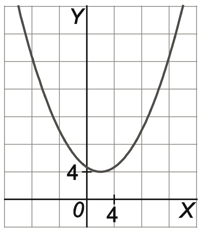


d) $x^2 - 4x = 6y - 28 \Rightarrow (x - 2)^2 - 4 = 6y - 28 \Rightarrow (x - 2)^2 = 6(y - 4)$,

apertura hacia arriba.

Vértice: $V(2, 4)$ Eje: $x = 2$ $p = 3$

Directriz: $y = \dfrac{5}{2}$ Foco: $F\left(2, \dfrac{11}{2}\right)$



26. Encuentra la ecuación de una parábola, sabiendo que tiene su vértice en el punto (2, 4), y que su directriz es la recta $y = 2$.

$\dfrac{p}{2} = d(V, d) = 2 \Rightarrow p = 4$, por tanto, la ecuación es $(x - 2)^2 = 8(y - 4) \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2}$.

27. Ejercicio interactivo.

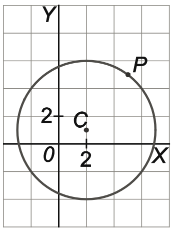
28 a 35. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

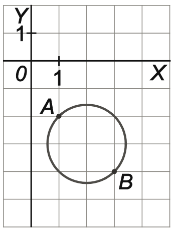
Circunferencia

36. Calcula la ecuación de las siguientes circunferencias.

a)



b)



c) De centro, $C(2, -3)$, y pasa por el punto $P(5, 1)$.

d) De centro, el punto $C(5, -2)$, y tangente al eje de abscisas.

e) Pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(1, -2)$, y tiene su centro en la recta $r: 3x - y = 6$.

f) Pasa por el punto $A(3, 4)$, su radio vale $r = 5$ y su centro se encuentra en el eje de abscisas.

g) El centro es $C(3, 6)$ y es tangente a la bisectriz del primer cuadrante.

h) Pasa por $A(7, -3)$, $B(5, 1)$ y $C(2, -8)$.

a) Centro $C(2, 1)$ y pasa por $P(5, 5)$. El radio es $d(C, P) = \sqrt{25} = 5$, y la ecuación, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

b) $A(1, -2)$ y $B(3, -4)$ son diametralmente opuestos, por tanto, el centro será el punto medio, $C(2, -3)$, y el radio, la mitad de $d(A, B)$, es decir, $\sqrt{2}$. La ecuación es $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$.

c) $r = d(C, P) = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

d) El radio es la distancia del punto C a la recta $y = 0$, es decir, $r = 2$. La ecuación es $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$.

e) El centro es la intersección de la mediatriz del segmento AB y la recta r.

Mediatriz de AB: $d(X, A) = d(X, B) \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow x + 2y - 2 = 0$

Centro: $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow C(2, 0)$ Radio: $r = d(A, C) = \sqrt{5}$

Ecuación: $(x-2)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$

f) El centro será de la forma $C(a, 0)$, así, $d(A, C) = 5 \Rightarrow (3-a)^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow (3-a)^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3 - a = 3 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \text{ Ecuación: } x^2 + y^2 = 25 \\ 3 - a = -3 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \text{ Ecuación: } (x-6)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0 \end{cases}$

g) El radio es la distancia del punto C a la recta $y = x$, es decir, $r = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

La ecuación es $(x-3)^2 + (y-6)^2 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 12x - 24y + 81 = 0$.

h) $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Rightarrow \begin{cases} 49 + 9 + 7A - 3B + C = 0 \\ 25 + 1 + 5A + B + C = 0 \\ 4 + 64 + 2A - 8B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 6 \\ C = -12 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

37. Halla la ecuación de la circunferencia que pasando por el punto *P*(2, 9) es tangente a los dos ejes de coordenadas.

El centro es de la forma $C(r,\, r)$ donde *r* es el radio, por tanto la ecuación es $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2-2rx-2ry+r^2=0$. Imponiendo que pase por el punto *P* tenemos:

$$4+81-4r-18r+r^2=0 \Rightarrow r^2-22r+85=0 \Rightarrow \begin{cases} r=17 \Rightarrow \text{ Ecuación: } x^2+y^2-34x-34y+289=0 \\ r=5 \Rightarrow \text{ Ecuación: } x^2+y^2-10x-10y+25=0 \end{cases}$$

38. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto *C*(1, 4) y es tangente a la recta $3x+4y-4=0$.

$$r=\frac{|3+16-4|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3 \Rightarrow (x-1)^2+(y-4)^2=9 \Rightarrow x^2+y^2-2x-8y+8=0.$$

39. Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos *A*(0, 0), *B*(0, 2) y *C*(2, 4).

A partir de la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ tenemos:

$$\begin{cases} F=0 \\ 4+2E+F=0 \\ 4+16+2D+4E+F=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F=0 \\ 4+2E=0 \Rightarrow E=-2 \\ 20+2D+4(-2)=0 \Rightarrow D=-6 \end{cases} \Rightarrow \text{Ec. Circunferencia: } x^2+y^2-6x-2y=0$$

Así: $C(c_1,c_2)=\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right) \Rightarrow C(3,1)$ y $r=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

40. Dada la circunferencia $4x^2+4y^2-24x+4y+33=0$, calcula la ecuación de otra concéntrica con ella y cuyo radio mida la mitad.

La circunferencia dada tiene centro $C\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ y radio $r=\sqrt{9+\frac{1}{4}-\frac{33}{4}}=1$, por tanto, la ecuación buscada es:

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2+y^2-6x+y+9=0$$

41. Confirma si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia. En caso afirmativo, dibújalas e indica el centro y el valor del radio.

a) $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ **c)** $2x^2+2y^2-6x=0$ **e)** $2x^2+2y^2-2x+6y-3=0$

b) $x^2+y^2-2x+2y+3=0$ **d)** $x^2+y^2+2x+2y=0$

a) $C(2,-3)$ y $r=\sqrt{4+9-9}=2$

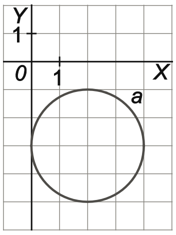
b) $C(1,-1)$ y $r=\sqrt{1+1-3}=\sqrt{-1}$ no es real.

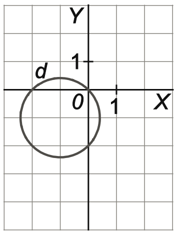
No representa una circunferencia.

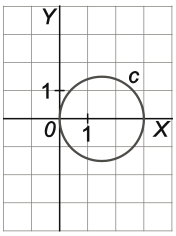
c) $C\left(\frac{3}{2},0\right)$ y $r=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

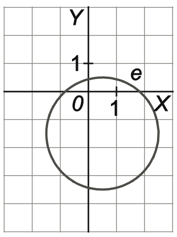
d) $C(-1,-1)$ y $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

e) $C\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ y $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}}=2$









42. Halla la posición relativa de cada punto y de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

a) $A(5, 5)$ **b)** $B(3, 3)$ **c)** $C(-4, 3)$

a) $Pot_{Cf}(A) = 25 + 25 - 20 - 10 - 20 = 0$. El punto *A* pertenece a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(B) = 9 + 9 - 12 - 6 - 20 = -20$. El punto *B* es interior a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(C) = 16 + 9 + 16 - 6 - 20 = 15$. El punto *B* es exterior a la circunferencia.

43. Calcula la máxima y la mínima distancia del punto *P*(5, 2) a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$.

$Pot_{Cf}(P) = 25 + 4 + 30 + 16 = 75$, así, el punto es exterior a la circunferencia.

Por tanto, la recta que une *P* con el centro *C* cortará a la circunferencia primero a una distancia *x* y después a una distancia *x* + 2*r* que serán la distancia mínima y máxima buscadas.

Como $C(-3, -4)$ y $r = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, tenemos:

$x(x + 2r) = 75 \Rightarrow x^2 + 10x - 75 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -15 \text{ no válida} \end{cases} \Rightarrow$ La distancia mínima es 5, y la máxima, 15.

44. Para cada caso, estudia la posición relativa de la recta con la circunferencia que se indica.

a) $2x - y + 1 = 0$ con $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

b) $x - 2 = 0$ con $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.

c) $x + 7y = 30$ con $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

d) $y = -3$ con $2x^2 + 2y^2 - 14x + 2y + 21 = 0$.

a) La circunferencia tiene centro $C(2, -3)$ y radio $r = \sqrt{4 + 9 - 9} = 2$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{|4 + 3 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5} > r$, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

b) La circunferencia tiene centro $C(1, -1)$ y radio $r = \sqrt{1 + 1 - 1} = 1$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{|1 - 2|}{\sqrt{1}} = 1 = r$, por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

c) La circunferencia tiene centro $C(5, 0)$ y radio $r = \sqrt{25} = 5$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{|5 - 30|}{\sqrt{1 + 49}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} < r$, por tanto, la recta es secante a la circunferencia.

d) La circunferencia tiene centro $C\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{\dfrac{49}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{21}{2}} = \sqrt{2}$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{\left|-\dfrac{1}{2} + 3\right|}{\sqrt{1}} = \dfrac{5}{2} > r$, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

45. Estudia la posición relativa de la circunferencia $2x^2+2y^2-6x-6y+7=0$ con cada una de las siguientes circunferencias.

a) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$

b) $2x^2+2y^2=5$

c) $8x^2+8y^2-16x-24y-25=0$

d) $x^2+y^2-2x-3y+3=0$

e) $x^2+y^2-3y+2=0$

f) $x^2+y^2-3x-3y+4=0$

La circunferencia $2x^2+2y^2-6x-6y+7=0$ tiene centro $C_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_1=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}}=1$.

a) La circunferencia $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ tiene centro $C_2=(0, 0)$ y radio $r_2=\frac{1}{2}$.

Como $d(C_1, C_2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}>r_1+r_2=\frac{3}{2}$, las circunferencias son exteriores.

b) La circunferencia $2x^2+2y^2=5$ tiene centro $C_2=(0, 0)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Como $r_2-r_1=\frac{\sqrt{10}-2}{2}<d(C_1, C_2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}<r_1+r_2=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$, las circunferencias son secantes.

c) La circunferencia $8x^2+8y^2-16x-24y-25=0$ tiene centro $C_2=\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{51}{8}}=\frac{\sqrt{102}}{4}$.

Como $d(C_1, C_2)=\frac{1}{2}<r_2-r_1=\frac{\sqrt{102}-4}{4}$, la primera circunferencia es interior a la segunda.

d) La circunferencia $x^2+y^2-2x-3y+3=0$ tiene centro $C_2=\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\frac{1}{2}$.

Como $d(C_1, C_2)=\frac{1}{2}=r_1-r_2$, las circunferencias son tangentes interiores.

e) La circunferencia $x^2+y^2-3y+2=0$ tiene centro $C_2=\left(0, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\frac{1}{2}$.

Como $d(C_1, C_2)=\frac{3}{2}=r_1+r_2=\frac{3}{2}$, las circunferencias son tangentes exteriores.

f) La circunferencia $x^2+y^2-3x-3y+4=0$ tiene centro $C_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, por tanto, las circunferencias son concéntricas estando $x^2+y^2-3x-3y+4=0$ en el interior de $2x^2+2y^2-6x-6y+7=0$.

46. Calcula la potencia de cada punto respecto de la circunferencia indicada y señala su posición relativa.

a) $P(1, 3)$ y $8x^2+8y^2-79x-32y+95=0$

b) $P(1, -1)$ y $2x^2+2y^2-x=0$

c) $P(5, 3)$ y $x^2+y^2-7x-8y=0$

a) $Pot_{Cf}(P)=8+72-79-96+95=0$. El punto pertenece a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(P)=2+2-1=3$. El punto es exterior a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(P)=25+9-35-24=-25$. El punto *es* interior a la circunferencia.

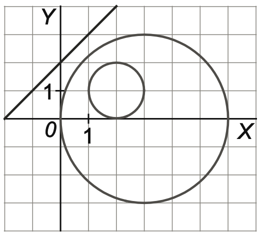
47. Calcula el eje radical de las siguientes parejas de circunferencias y representa gráficamente la situación en cada caso.

a) $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ y $x^2+y^2-6x=0$

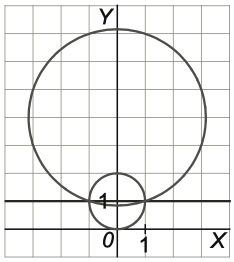
b) $x^2+y^2-8y+6=0$ y $2x^2+2y^2-4y=0$

c) $4x^2+4y^2-4x-8y+1=0$ y $4x^2+4y^2-4x-24y+1=0$

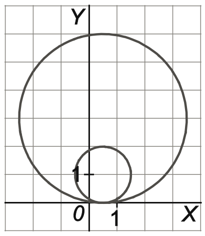
a) Eje radical: $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+4=0 \\ x^2+y^2-6x=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-2y+4=0 \Rightarrow x-y+2=0$.



b) Eje radical: $\begin{cases} x^2+y^2-8y+6=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \Rightarrow 6y-6=0 \Rightarrow y=1$.



c) Eje radical: $\begin{cases} 4x^2+4y^2-4x-8y+1=0 \\ 4x^2+4y^2-4x-24y+1=0 \end{cases} \Rightarrow 16y=0 \Rightarrow y=0$.



48. Halla el centro radical de las circunferencias siguientes:

$$\boldsymbol{C_1: x^2+y^2=16 \qquad C_2: x^2+y^2-2x+4y-4=0 \qquad C_3: x^2+y^2+6x-6y+14=0}$$

Eje radical de C_1 y C_2: $x-2y-6=0$

Eje radical de C_1 y C_3: $x-y+5=0$

Centro radical: $\begin{cases} x-2y=6 \\ x-y=-5 \end{cases} \Rightarrow x=-16,\ y=-11 \Rightarrow P(-16,\ -11)$

49. Calcula las tangentes a las circunferencias siguientes en el punto dado.

a) $x^2+y^2=26$ en $P(-1, 5)$

b) $3x^2+3y^2-4x+17y+23=0$ en $P(1, -2)$

La tangente en un punto *P* es perpendicular al segmento *CP*, donde *C* es el centro de la circunferencia.

a) $C(0, 0)$, luego $\overrightarrow{CP}=(-1, 5)$ y la ecuación de la tangente es: $-1(x+1)+5(y-5)=0 \Rightarrow x-5y+26=0$.

b) $C\left(\frac{2}{3}, -\frac{17}{6}\right)$, luego $\overrightarrow{CP}=\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ y la ecuación de la tangente es: $\frac{1}{3}(x-1)+\frac{5}{6}(y+2)=0 \Rightarrow 2x+5y+8=0$.

50. Dada la circunferencia $(x+3)^2+(y-1)^2=25$, calcula las ecuaciones de sus tangentes paralelas a la recta $3x+4y-16=0$.

Las ecuaciones buscadas serán de la forma $3x+4y+K=0$, para que sean tangentes a la circunferencia, la distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio, así:

$$\frac{|-9+4+K|}{\sqrt{9+16}}=5 \Rightarrow |K-5|=25 \Rightarrow \begin{cases} K-5=25 \Rightarrow K=30 \Rightarrow 3x+4y+30=0 \\ K-5=-25 \Rightarrow K=-20 \Rightarrow 3x+4y-20=0 \end{cases}$$

51. Calcula las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-4x+4y-17=0$ que sean perpendiculares a la recta de ecuación $3x-4y=14$.

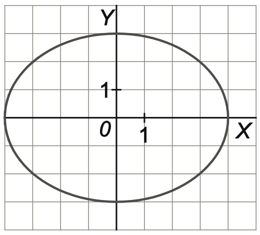
Las ecuaciones buscadas serán de la forma $4x+3y+K=0$, para que sean tangentes a la circunferencia, la distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio, así, como $C(2, -2)$ y $r=\sqrt{4+4+17}=5$, tenemos:

$$\frac{|8-6+K|}{\sqrt{25}}=5 \Rightarrow |2+K|=25 \Rightarrow \begin{cases} 2+K=25 \Rightarrow K=23 \Rightarrow 4x+3y+23=0 \\ 2+K=-25 \Rightarrow K=-27 \Rightarrow 4x+3y-27=0 \end{cases}$$

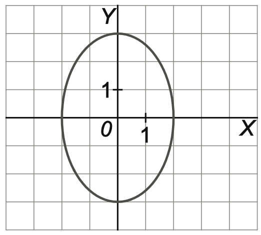
Elipse

52. Para cada una de las elipses, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Escribe su ecuación.

a)



b)



a) $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Vértices: $A(4, 0)$, $A'(-4, 0)$, $B(0, 3)$, $B'(0, -3)$

Focos: $F\left(\sqrt{7}, 0\right)$, $F'\left(-\sqrt{7}, 0\right)$

Ecuación: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Vértices: $A(0, 3)$, $A'(0, -3)$, $B(2, 0)$, $B'(-2, 0)$

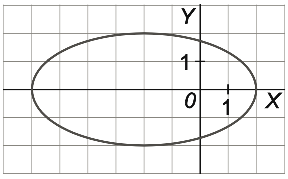
Focos: $F\left(0, \sqrt{5}\right)$, $F'\left(0, -\sqrt{5}\right)$

Ecuación: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

53. Dada la elipse $x^2+4y^2+4x-12=0$, dibújala, y calcula el centro, los semiejes, la semidistancia focal, los focos, los vértices y la excentricidad. ¿Cuál es la ecuación de la elipse que tiene los mismos elementos pero cuyo centro es el origen de coordenadas?

$$x^2+4y^2+4x-12=0 \Rightarrow (x+2)^2+4y^2=16 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$a=4\ ,\ b=2\ ,\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\ ,\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Centro: (–2, 0) Focos: $F\left(-2+2\sqrt{3},\,0\right)$, $F'\left(-2-2\sqrt{3},\,0\right)$ Vértices: $A(2, 0)$, $A'(-6, 0)$, $B(-2, 2)$, $B'(-2, -2)$

Ecuación reducida: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

54. Calcula la ecuación de las siguientes elipses. (Salvo indicación, el centro es el origen).

a) $a=5$, $c=3$

b) Los radios vectores de un punto miden 7 y 3, y $c=4$.

c) Foco, $F(3, 0)$, y vértice, $A(4, 0)$

d) Vértices, $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$

e) Foco, $F'(-2, 0)$, y excentricidad, $e=0,4$

f) Pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-2, 0)$.

g) Pasa por $P(5, 0)$ y su excentricidad es $e=\frac{3}{5}$.

h) Foco, $F'(0, 2)$, y semieje mayor, $a=3$

i) Centro, el punto $C(-2, 1)$, $a=13$ y $b=5$

a) $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16}=4 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $2a=7+3 \Rightarrow a=5,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

c) $a=4,\ c=3,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{7} \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

d) $a=6,\ b=3 \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$

e) $c=2,\ a=\frac{c}{e}=5,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{21} \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

f) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

g) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{25}{a^2}=1 \Rightarrow a=5,\ c=a\cdot e=3,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16}=4 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

h) $c=2,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

i) $\frac{(x+2)^2}{169}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

55. Para cada una de las siguientes elipses, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Dibújalas.

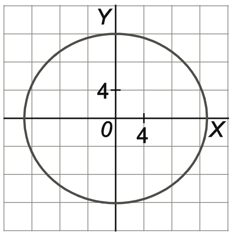
a) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$ **c)** $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{(y-5)^2}{8}=1$ **e)** $2(x-1)^2+y^2=2$

b) $16x^2+25y^2=400$ **d)** $\dfrac{(x-3)^2}{10}+\dfrac{(y+2)^2}{6}=1$ **f)** $9x^2+y^2-18x+6y+9=0$

a) $a=13$, $b=12$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25}=5$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{13}$

Vértices: $A(13, 0)$, $A'(-13, 0)$, $B(0, 12)$, $B'(0, -12)$

Focos: $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$

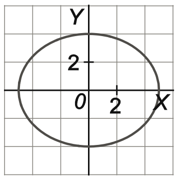


b) $16x^2+25y^2=400 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

$a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9}=3$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$

Vértices: $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 4)$, $B'(0, -4)$

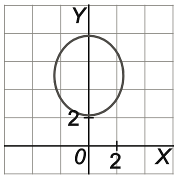
Focos: $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$



c) $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$

Vértices: $A\left(0, 5+2\sqrt{2}\right)$, $A'\left(0, 5-2\sqrt{2}\right)$, $B\left(\sqrt{6}, 5\right)$, $B'\left(-\sqrt{6}, 5\right)$

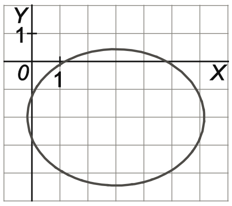
Focos: $F\left(0, 5+\sqrt{2}\right)$, $F'\left(0, 5-\sqrt{2}\right)$



d) $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4}=2$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Vértices: $A\left(3+\sqrt{10}, -2\right)$, $A'\left(3-\sqrt{10}, -2\right)$, $B\left(3, -2+\sqrt{6}\right)$, $B'\left(3, -2-\sqrt{6}\right)$

Focos: $F(5, -2)$, $F'(1, -2)$

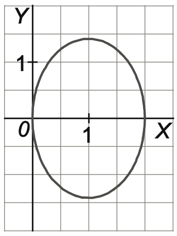


e) $2(x-1)^2+y^2=2 \Rightarrow (x-1)^2+\dfrac{y^2}{2}=1$

$a=\sqrt{2}$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1}=1$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vértices: $A\left(1, \sqrt{2}\right)$, $A'\left(1, -\sqrt{2}\right)$, $B(2, 0)$, $B'(0, 0)$

Focos: $F(1, 1)$, $F'(1, -1)$

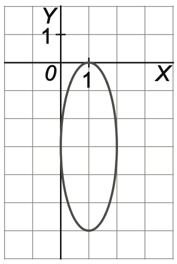


f) $9x^2+y^2-18x+6y+9=0 \Rightarrow 9(x-1)^2+(y+3)^2=9 \Rightarrow (x-1)^2+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$

$a=3$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Vértices: $A(1, 0)$, $A'(1, -6)$, $B(0, -3)$, $B'(2, -3)$

Focos: $F\left(1, -3+2\sqrt{2}\right)$, $F'\left(1, -3-2\sqrt{2}\right)$



Hipérbola

56. Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas. (Salvo indicación, el centro es el origen).

a) $a = 3$, $c = 5$

b) Semidistancia focal 5 y los radios vectores de un punto miden 10 y 2 .

c) Foco, $F(4, 0)$, y vértice, $A(2, 0)$

d) Vértices, $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$

e) Foco, $F'(-6, 0)$, y excentricidad, $e = 1{,}25$

f) Pasa por los puntos $P(3, 0)$ y $Q(5, -3)$.

g) Pasa por $P(2, 0)$ y su excentricidad es $e = 1{,}5$.

h) Pasa por $P(15, 4)$, y su distancia focal vale $2\sqrt{90}$.

i) Centro, $C(2, -3)$, $a = 8$ y $c = 10$

a) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

b) $2a = 10 - 2 \Rightarrow a = 4,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) $a = 2,\ c = 4,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

d) $a = 6,\ b = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

e) $c = 6;\ a = \dfrac{c}{e} = \dfrac{24}{5};\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - \dfrac{576}{25}} = \dfrac{18}{5} \Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{576}{25}} - \dfrac{y^2}{\frac{324}{25}} = 1$

f) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{a^2} = 1 \\ \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{\frac{81}{16}} = 1$

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{4}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 2,\ c = a \cdot e = 3,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

h) $\begin{cases} \dfrac{225}{a^2} - \dfrac{16}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = c^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow a = 9,\ b = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{81} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

i) $b = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{64} - \dfrac{(y+3)^2}{36} = 1$

57. Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$ y que pasa por el punto $P\left(8, 5\sqrt{3}\right)$.

$$c = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{64}{a^2} - \dfrac{75}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{64}{9 - b^2} - \dfrac{75}{b^2} = 1 \Rightarrow b^4 + 130b^2 - 675 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 4 \\ b^2 = -135 \Rightarrow \text{No válida} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$$

58. Calcula la ecuación de una hipérbola si un foco es el punto $F(0, 10)$ y una asíntota la recta $y = x$.

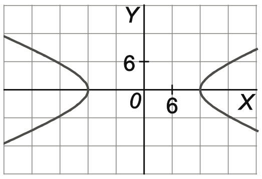
Tenemos $a = b$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 100$, por tanto, $a^2 = b^2 = 50$ y la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{50} - \dfrac{y^2}{50} = 1$.

59. Para cada una de las siguientes hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula las ecuaciones de las asíntotas y el valor de la excentricidad. Dibújalas.

a) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$ **c)** $\dfrac{(x+1)^2}{8}-\dfrac{(y-2)^2}{6}=1$ **e)** $4y^2-x^2=4$

b) $36x^2-64y^2=2304$ **d)** $\dfrac{y^2}{225}-\dfrac{x^2}{64}=1$ **f)** $2(y+1)^2-x^2=2$

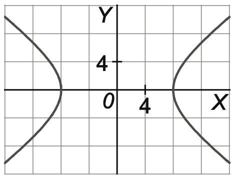
a) $a=12$, $b=5$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=13$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{13}{12}$



Vértices: $A(12, 0)$, $A'(-12, 0)$ Focos: $F(13, 0)$, $F'(-13, 0)$

Asíntotas: $y=\dfrac{5}{12}x$, $y=-\dfrac{5}{12}x$

b) $36x^2-64y^2=2304 \Rightarrow \dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$

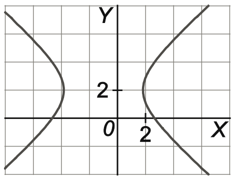


$a=8$, $b=6$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=10$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10}{8}$

Vértices: $A(8, 0)$, $A'(-8, 0)$ Focos: $F(10, 0)$, $F'(-10, 0)$

Asíntotas: $y=\dfrac{3}{4}x$, $y=-\dfrac{3}{4}x$

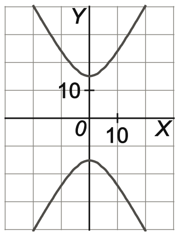
c) $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{14}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$



Vértices: $A\left(-1+\sqrt{8}, 2\right)$, $A'\left(-1-\sqrt{8}, 2\right)$ Focos: $F\left(-1+\sqrt{14}, 2\right)$, $F'\left(-1-\sqrt{14}, 2\right)$

Asíntotas: $y=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}x \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

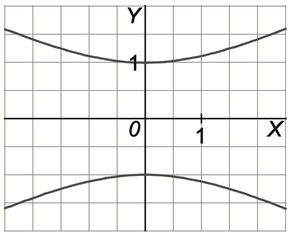
d) $a=15$, $b=8$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=17$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{17}{15}$



Vértices: $A(0, 15)$, $A'(0, -15)$ Focos: $F(0, 17)$, $F'(0, -17)$

Asíntotas: $x=\dfrac{8}{15}y$, $x=-\dfrac{8}{15}y$

e) $4y^2-x^2=4 \Rightarrow y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$

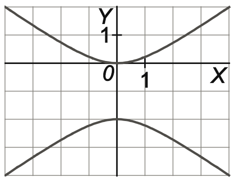


$a=1$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$, $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$

Vértices: $A(0, 1)$, $A'(0, -1)$ Focos: $F\left(0, \sqrt{5}\right)$, $F'\left(0, -\sqrt{5}\right)$

Asíntotas: $x=2y$, $x=-2y$

f) $2(y+1)^2-x^2=2 \Rightarrow (y+1)^2-\dfrac{x^2}{2}=1$



$a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}$, $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$

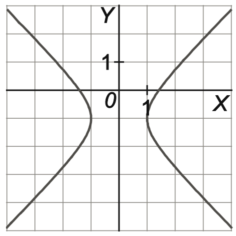
Vértices: $A(0, 0)$, $A'(0, -2)$ Focos: $F\left(0, -1+\sqrt{5}\right)$, $F'\left(0, -1-\sqrt{5}\right)$

Asíntotas: $x=\sqrt{2}(y+1)$, $x=-\sqrt{2}(y+1)$

60. Dada la hipérbola $x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0$, dibújala, y calcula el centro, los semiejes, la semidistancia focal, los focos, los vértices y la excentricidad. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola que tiene los mismos elementos pero cuyo centro es el origen?

$x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - (y+1)^2 = 1$

$a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$



Centro: $C(0, -1)$

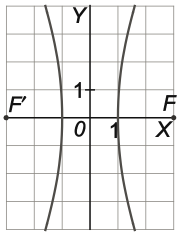
Vértices: $A(1, -1)$, $A'(-1, -1)$

Focos: $F\left(\sqrt{2}, -1\right)$, $F'\left(-\sqrt{2}, -1\right)$

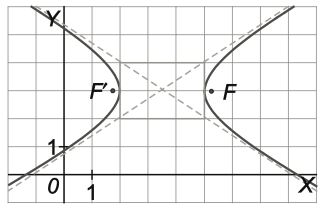
Ecuación reducida: $x^2 - y^2 = 1$

61. Para cada una de las hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y el valor de la excentricidad. Halla su ecuación y las de sus asíntotas.

a)



b)



a) $a = 1$, $c = 3$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $e = \dfrac{c}{a} = 3$

Ecuación: $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$

Vértices: $A(1, 0)$, $A'(-1, 0)$

Focos: $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$

Asíntotas: $y = 2\sqrt{2}x$, $y = -2\sqrt{2}x$

b) $a = \dfrac{3}{2}$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

Ecuación: $\dfrac{\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2}{\dfrac{9}{4}} - (y-3)^2 = 1$

Vértices: $A(5, 3)$, $A'(2, 3)$

Focos: $F\left(\dfrac{7}{2} + \dfrac{\sqrt{13}}{3}, 3\right)$, $F'\left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{\sqrt{13}}{3}, 3\right)$

Asíntotas: $y - 3 = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{7}{2}\right)$, $y - 3 = -\dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{7}{2}\right)$

Parábola

62. Calcula la ecuación de las siguientes parábolas. (En *c*, *d*, *e* y *f*, el vértice es el origen).

a) Foco, $F(2, 0)$, y directriz, $x = 6$

b) Foco, $F(0, 4)$, y directriz, $y = 1$

c) Parámetro, $p = 2$ y abierta hacia la derecha

d) Parámetro, $p = 4$ y abierta hacia la izquierda

e) Parámetro, $p = 6$ y abierta hacia arriba

f) Parámetro, $p = 8$ y abierta hacia abajo

g) Vértice, $V(-2, 1)$, y directriz, $y = -2$

h) Vértice, $V(-2, -2)$, y foco, $F(-2, -6)$

i) Vértice, $V(0, 1)$, y directriz, $x = 7$

a) Abierta hacia la izquierda, $V(4, 0)$, $p = 4 \Rightarrow y^2 = -8(x-4)$

b) Abierta hacia arriba, $V\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $p = 3 \Rightarrow x^2 = 6\left(y - \frac{5}{2}\right)$

c) $y^2 = 4x$

d) $y^2 = -8x$

e) $x^2 = 12y$

f) $x^2 = -16y$

g) Abierta hacia arriba, $p = 6 \Rightarrow (x+2)^2 = 12(y-1)$

h) Abierta hacia abajo, $p = 8 \Rightarrow (x+2)^2 = -16(y+2)$

i) Abierta hacia la izquierda, $p = 14 \Rightarrow (y-1)^2 = -28x$

63. Para las siguientes parábolas, halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz.

a) $y^2 = 10x$ **b)** $x^2 = 2y$ **c)** $(y-1)^2 = 8(x-1)$ **d)** $x^2 = -3y$

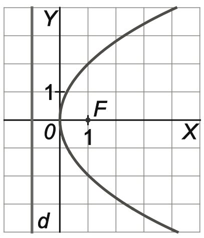
a) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ Directriz: $x = -\frac{5}{2}$

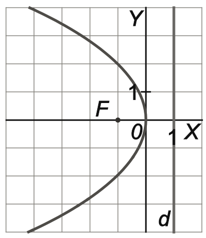
b) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ Directriz: $y = -\frac{1}{2}$

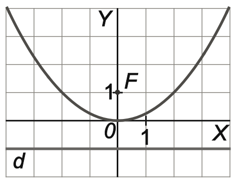
c) Vértice: $V(1, 1)$ Foco: $F(3, 1)$ Directriz: $x = -1$

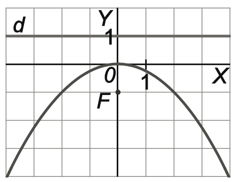
d) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ Directriz: $y = \frac{3}{4}$

64. Para cada una de las siguientes parábolas, calcula su vértice, su foco y su directriz, el valor del parámetro *p* y su ecuación reducida.

a)


b)


c)


d)


a) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(1, 0)$ Directriz: $x = -1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $y^2 = 4x$

b) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(-1, 0)$ Directriz: $x = 1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $y^2 = -4x$

c) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(0, 1)$ Directriz: $y = -1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $x^2 = 4y$

d) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(0, -1)$ Directriz: $y = 1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $x^2 = -4y$

65. Halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz en cada una de las siguientes parábolas.

a) $y^2 - 4y - 2x + 2 = 0$ **b)** $x^2 - 2x - y + 1 = 0$ **c)** $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$

a) $y^2 - 4y - 2x + 2 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 2(x+1)$

Vértice: $V(-1, 2)$ Foco: $F\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ Directriz: $x = -\frac{3}{2}$

b) $x^2 - 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = y$

Vértice: $V(1, 0)$ Foco: $F\left(1, \frac{1}{4}\right)$ Directriz: $y = -\frac{1}{4}$

c) $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)$

Vértice: $V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ Foco: $F(0, 2)$ Directriz: $x = -3$

Síntesis

66. Calcula el valor de *m* para que el eje radical de las circunferencias dadas sea el eje de abscisas.

$$C_1 : x^2 + y^2 - mx - 6y = 0 \qquad C_2 : 2x^2 + 2y^2 - 8x + y = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - mx - 6y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 8x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 2mx - 12y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 8x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow (2m-8)x + 13y = 0$$

Para que el eje radical sea el eje de abscisas debe verificarse que $2m - 8 = 0 \Rightarrow m = 4$.

67. Halla los siguientes lugares geométricos.

a) Puntos del plano que equidistan de las rectas paralelas $r : x + y = 5$ y $s : x + y = 9$.

b) Puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es el doble que la distancia al punto (2, 0).

c) Puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 40.

d) Puntos del plano cuya distancia al punto $A(4, 0)$ es el doble que la distancia a la recta $x = 1$.

Sea $X(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico solicitado:

a) $d(X,r) = d(X,s) \Rightarrow \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+y-9|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x+y-5 = x+y-9 \Rightarrow -5 = -9 \text{ No válida} \\ x+y-5 = -x-y+9 \Rightarrow x+y = 7 \end{cases}$

Se obtiene la recta paralela a *r* y *s* que “está entre ambas”.

b) $d(X, O) = 2d\left(X, (2,0)\right) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2+y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4(x-2)^2 + 4y^2 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 3y^2 + 16 = 0$

Se obtiene la circunferencia de centro $C\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ y radio $r = \frac{4}{3}$.

c) $\left(d(X, P)\right)^2 + \left(d(X, Q)\right)^2 = 40 \Rightarrow (x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 40 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Se obtiene la circunferencia de centro $C(0, 0)$ y radio $r = 2$.

d) $d(X, A) = 2d(X,\ x = 1) \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{|x-1|}{\sqrt{1}} \Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 \Rightarrow 3x^2 - y^2 - 12 = 0$.

Se obtiene la hipérbola de centro $C(0, 0)$ y semiejes $a = 2$ y $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

68. Halla, en función del parámetro positivo *a*, la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x-2)^2+y^2=a$ y la recta de ecuación $y=x$.

La circunferencia tiene centro $C(2, 0)$ y radio $r=\sqrt{a}$. La distancia del centro a la recta es $\frac{|2+0+0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, por tanto, si $a=2$, la recta es tangente, si $a>2$, es secante, y si $a<2$, es exterior a la circunferencia.

69. Dados los puntos *A*(2, 3) y *B*(6, 1), halla la ecuación y describe el lugar geométrico de los puntos *P*(*x*, *y*) del plano tales que el triángulo *APB* es rectángulo en *P*.

Los vectores $\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y-3)$ y $\overrightarrow{BP}=(x-6,\ y-1)$ deben ser perpendiculares, por tanto:

$$(x-2)(x-6)+(y-3)(y-1)=0 \Rightarrow x^2+y^2-8x-4y+15=0 \Rightarrow (x-4)^2+(y-2)^2=5$$

Se trata de una circunferencia de centro $C(4, 2)$ y radio $r=\sqrt{5}$.

70. Identifica cada una de las siguientes cónicas y establece sus elementos más importantes.

a) $x^2-4x-4y=0$

b) $x^2+y^2+6x-10y+33=0$

c) $9x^2-4y^2-24y-72=0$

d) $3x^2+4y^2-18x+16y+31=0$

e) $25x^2-144y^2+288y-3744=0$

a) $x^2-4x-4y=0 \Rightarrow (x-2)^2=4(y+1)$. Parábola abierta hacia arriba con vértice $V(2, -1)$.

b) $x^2+y^2+6x-10y+33=0 \Rightarrow (x+3)^2+(y-5)^2=1$. Circunferencia de centro $C(-3, 5)$ y radio $r=1$.

c) $9x^2-4y^2-24y-72=0 \Rightarrow 9x^2-4(y+3)^2=36 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$. Hipérbola de centro $C(0, -3)$ y semiejes $a=2$ y $b=3$.

d) $3x^2+4y^2-18x+16y+31=0 \Rightarrow 3(x-3)^2+4(y+2)^2=12 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$. Elipse de centro $C(3, -2)$ y semiejes $a=2$ y $b=\sqrt{3}$.

e) $25x^2-144y^2+288y-3744=0 \Rightarrow 25x^2-144(y-1)^2=3600 \Rightarrow \frac{x^2}{144}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$. Hipérbola de centro $C(0, 1)$ y semiejes $a=12$ y $b=5$.

71. Calcula los puntos de intersección de las siguientes parejas de cónicas y verifica los resultados observando sus gráficas.

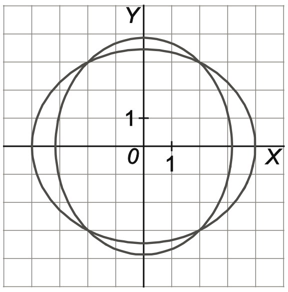
a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ con $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ con $x^2+y^2-6x-1=0$

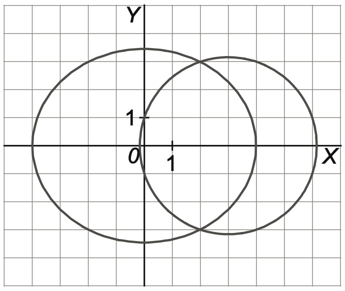
c) $9x^2-4y^2=36$ con $x^2+y^2=43$

d) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ con $y^2-36x+144=0$

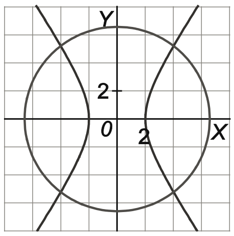
a) $\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \\ \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1 \end{cases} \Rightarrow P_1(2, 3), P_2(-2, 3), P_3(2, -3), P_2(-2, -3)$



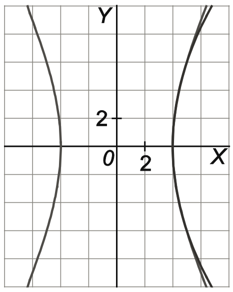
b) $\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \\ x^2+y^2-6x-1=0 \end{cases} \Rightarrow P_1(2, 3), P_2(2, -3)$



c) $\begin{cases} 9x^2-4y^2=36 \\ x^2+y^2=43 \end{cases} \Rightarrow P_1\left(4, 3\sqrt{3}\right), P_2\left(4, -3\sqrt{3}\right), P_3\left(-4, 3\sqrt{3}\right), P_4\left(-4, -3\sqrt{3}\right)$



d) $\begin{cases} \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1 \\ y^2-36x+144=0 \end{cases} \Rightarrow P_1(4, 0), P_2(5, 6), P_3(5, -6)$



72. ¿Para qué valores del parámetro *k* la ecuación $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{16-k}=1$ representa una elipse? Comprueba que todas esas elipses tienen los mismos focos.

La ecuación representa un elipse si $\begin{cases} 25-k>0 \\ 16-k>0 \end{cases} \Rightarrow k<16$.

En este caso tendríamos $a^2=25-k$ y $b^2=16-k$, con lo que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9}=3$ y los focos son $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$.

73. Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo *A* de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; manteniéndose la varilla tangente a la circunferencia en todo momento.

a) Determina el lugar geométrico descrito por el extremo *B* de la varilla.

b) Obtén la ecuación de dicho lugar geométrico.

a) La circunferencia tiene centro *C*(2, 1) y radio $r = 2$. Observemos que *CAB* es un triángulo rectángulo en *A*, por lo que la distancia entre *C* y *B* se mantiene constante e igual a $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, de este modo, el punto *B* describe una circunferencia de centro *C* y radio $\sqrt{5}$.

b) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$.

74. Sean *A*(1, 1) y *B*(–1, 1) dos puntos del plano.

a) Determina las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por A y B razonando dónde están sus centros.

b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar:

I) El centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$.

II) Los centros de las que tienen por radio 5.

a) Los centros de las circunferencias deben pertenecer a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ ya que los puntos de esta recta equidistan de *A* y *B*. Como la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es el eje ordenadas, los centros de las circunferencias son de la forma *C*(0, *c*) y, por tanto, el radio correspondiente es $r = \sqrt{1+(1-c)^2}$.

De este modo, las ecuaciones de las circunferencias que pasan por *A* y *B* son de la forma $x^2 + (y-c)^2 = 1 + (1-c)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2yc + 2c - 2 = 0$.

b) I) El punto *A* pertenece a la circunferencia y a la tangente, por tanto debe ser el punto de tangencia. Así:

$$d(C,\ y = x) = r \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{1+(1-c)^2} \Rightarrow \frac{c^2}{2} = 1 + (1-c)^2 \Rightarrow c^2 - 4c + 4 = 0 \Rightarrow c = 2$$

Por tanto, el centro y el radio de la circunferencia buscada son, respectivamente, *C*(0, 2) y $r = \sqrt{2}$.

II) $$r = \sqrt{1+(1-c)^2} = 5 \Rightarrow (1-c)^2 = 24 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 + \sqrt{24} = 1 + 2\sqrt{6} \Rightarrow C_1\left(0,\ 1+2\sqrt{6}\right) \\ c_2 = 1 - \sqrt{24} = 1 - 2\sqrt{6} \Rightarrow C_2\left(0,\ 1-2\sqrt{6}\right) \end{cases}$$

CUESTIONES

75. Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) La excentricidad de una circunferencia es 0.

b) Una circunferencia es una elipse en la que los dos semiejes miden igual.

c) Si $a < b$, la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ representa una elipse cuyo eje mayor está contenido en el eje *Y*.

d) La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ representa una hipérbola cuyo eje real está contenido en el eje *Y*.

a) Verdadero, $e = \frac{c}{a} = \frac{0}{r} = 0$.

b) Verdadero, $a = b = r$.

c) Verdadero.

d) Verdadero, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

76. Indica para qué valores de *a* la ecuación $y^2 + ay + x = 0$ representa una parábola.

$y^2 + ay + x = 0 \Rightarrow \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = -\left(x - \frac{a^2}{4}\right)$. Para cualquier valor real de *a* la ecuación representa una parábola abierta hacia la izquierda de vértice $V\left(\frac{a^2}{4}, -\frac{a}{2}\right)$ y directriz $x = \frac{a^2+1}{4}$.

77. Indica los puntos del plano desde los que se puede trazar al menos una tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Se puede trazar al menos una tangente desde cualquier punto que no sea interior a la circunferencia.

PROBLEMAS

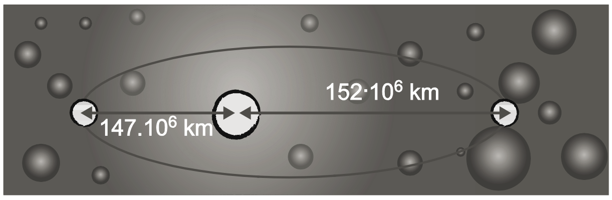
78. La máxima distancia que separa a la Tierra de la Luna es de 63 veces el radio terrestre. La excentricidad de la elipse de la órbita es muy baja, aproximadamente, *e* = 0,0678.

Calcula la distancia mínima, en kilómetros, que puede separar a la Tierra de la Luna. Considera que el radio terrestre mide aproximadamente 6357 km.

La distancia máxima y mínima de entre la Luna y la Tierra es, respectivamente, $a + c$ y $a - c$. Por tanto:

$$\begin{cases} a + c = 63 \cdot 6357 = 400\,491 \\ \frac{c}{a} = 0{,}0678 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 375\,062 \\ c = 25\,429 \end{cases} \Rightarrow a - c = 349\,633 \text{ km}.$$

79. La Tierra gira alrededor del Sol describiendo una elipse en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. El punto en el que la distancia entre la Tierra y el Sol es máxima se denomina afelio, y el punto donde es mínima, perihelio.



Con los datos de la figura, calcula la excentricidad de la órbita de la Tierra e interprétala.

$$\begin{cases} a + c = 152 \cdot 10^6 \\ a - c = 147 \cdot 10^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 149{,}5 \cdot 10^6 \\ c = 2{,}5 \cdot 10^6 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = 0{,}0167.$$

La órbita es una elipse muy poco achatada, es casi una circunferencia.

80. Halla la longitud de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (2, 4) y tiene su centro en la recta determinada por los puntos (7, 2) y (3, –2).

El centro *C* de la circunferencia debe ser la intersección de la recta determinada por (7, 2) y (3, –2) y la mediatriz del segmento de extremos *O*(0, 0) y el punto (2, 4).

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5, 0),\ r = \sqrt{(2-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, la longitud de la circunferencia es $2\pi r = 10\pi$ u.

81. Calcula las ecuaciones de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo de vértices *A*(0, 1), *B*(3, –3) y *C*(4, 4).

Circunferencia circunscrita:

Observemos que se trata de un triángulo isósceles y rectángulo en *A*.

Por tanto, el circuncentro estará situado en el punto medio de la hipotenusa *BC*, $T\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Así, la ecuación de la circunferencia circunscrita es $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

Circunferencia inscrita:

Bisectriz del ángulo *A*: $AT: \frac{x}{7}=\frac{y-1}{-1} \Rightarrow x+7y=7$

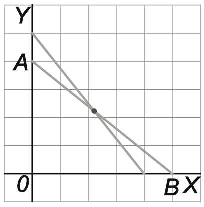
Bisectriz del ángulo *C*: $\frac{3x-4y+4}{5}=-\frac{7x-y-24}{5\sqrt{2}} \Rightarrow (3\sqrt{2}+7)x-(4\sqrt{2}+1)y+4\sqrt{2}-24=0$

Incentro: $\begin{cases} x+7y=7 \\ (3\sqrt{2}+7)-(4\sqrt{2}+1)y+4\sqrt{2}-24=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(7-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Radio: $5-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Ecuación: $\left(x-7+\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(5-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$

82. Un segmento *AB* de longitud 5 unidades se desliza de forma que el extremo *A* siempre está sobre el eje de ordenadas, y el extremo *B*, sobre el de abscisas.



a) Determina el lugar geométrico que describe el centro del segmento a lo largo de su deslizamiento.

b) Calcula el lugar geométrico que describe el punto del segmento que dista 2 unidades de *A* y 3 de *B*.

Sean *A*(0, *a*) y *B*(*b*, 0), de forma que $a^2+b^2=25$, y sea *X*(*x*, *y*) un punto genérico del lugar geométrico pedido.

a) $\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2x \\ b=2y \end{cases} \Rightarrow 4x^2+4y^2=25$. Circunferencia de centro el origen y radio $\frac{5}{2}$.

b) $\begin{cases} x=\frac{2b}{5} \\ y=\frac{3a}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{5x}{2} \\ a=\frac{5y}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{25y^2}{9}+\frac{25x^2}{4}=25 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Elipse de centro el origen, $a=3$, $b=2$ y eje mayor situado en el eje de ordenadas.

83. Cuando se chuta un balón, la trayectoria que describe el mismo es una parábola que depende del ángulo con el que se golpea el balón y de la velocidad inicial con que se lanza el mismo.

Un jugador *A* ha golpeado un balón hacia su compañero *B* y ha conseguido las siguientes distancias.

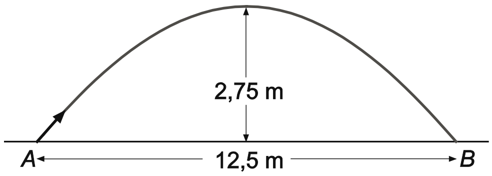
- **Altura máxima alcanzada por el balón: 2,75 m.**
- **Distancia hasta el punto donde el balón ha botado: 12,5 m.**

Con estos datos:

a) Escribe la ecuación de la trayectoria tomando una referencia adecuada.

b) Indica las coordenadas del foco y del vértice, y la ecuación de la directriz.

c) Si el jugador *B* se encuentra a 5 m del *A*, ¿a qué altura pasa el balón por su vertical?



a) Tomando como origen el punto *A* la ecuación es de la forma $(x-6,25)^2=-2p(y-2,75)$.

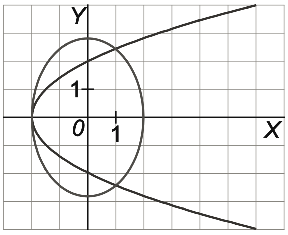
Como debe pasar por el origen, tenemos: $6,25^2=2p\cdot 2,75 \Rightarrow p=7,1 \Rightarrow (x-6,25)^2=-14,2(y-2,75)$

b) Vértice: $V(6,25;\ 2,75)$ Foco: $F(6,25;\ -0,8)$ Directriz: $y=6,3$

c) $x=5 \Rightarrow (5-6,25)^2=-14,2(y-2,75) \Rightarrow y=2,64$ m

PARA PROFUNDIZAR

84. Halla las longitudes de las cuerdas comunes a la parábola $y^2=2x+4$ y la elipse $2x^2+y^2=8$.

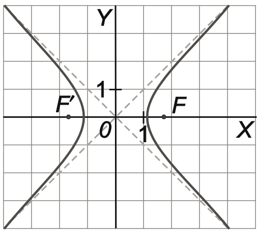


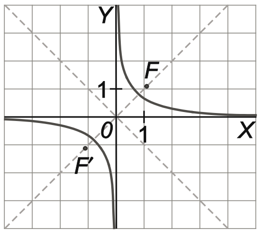
$$\begin{cases} y^2=2x+4 \\ 2x^2+y^2=8 \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2x+4=8 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=\pm\sqrt{6} \\ x=-2,\ y=0 \end{cases}$$

Los puntos comunes de las cónicas son: $A\left(1,\ \sqrt{6}\right)$, $B\left(1,\ -\sqrt{6}\right)$ y $C(-2,\ 0)$.

Las longitudes de las cuerdas serán, por tanto: $d(A,\ B)=2\sqrt{6}$ u, $d(A,\ C)=\sqrt{15}$ u y $d(B,\ C)=\sqrt{15}$ u.

85. Al girar una hipérbola equilátera, $x^2 - y^2 = a^2$, 45º según lo mostrado en las siguientes figuras, las asíntotas de la hipérbola coinciden con los ejes de coordenadas. Demuestra, utilizando las nuevas coordenadas de los focos y la definición de hipérbola como lugar geométrico, que, respecto de estos nuevos ejes, la ecuación de la hipérbola se escribe en la forma $xy = \dfrac{a^2}{2}$.





Como $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$, las coordenadas de los nuevos focos serán $F(a, a)$ y $F'(-a, -a)$.

Por la definición de hipérbola:

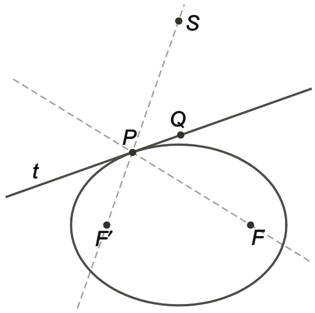
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = 2a + \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2xa - 2ya + 2a^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2} = -x - y - a \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2xy + 2ax + 2ay \Rightarrow$$

$$2xy = a^2 \Rightarrow xy = \frac{a^2}{2}.$$

86. Demuestra que la bisectriz exterior de los radios vectores de un punto de una elipse es la tangente a la misma en ese punto y calcula la tangente a $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ en el punto $P\left(3, \dfrac{16}{5}\right)$.



Consideremos la elipse de la figura, sea P uno de sus puntos y t la bisectriz exterior de los radio vectores PF y PF'.

Comprobemos que P es el único punto de intersección de t con la elipse, lo que probará que t es la tangente a la elipse por P. Para ello, consideremos S punto simétrico de F respecto a t y Q cualquier otro punto de t, entonces:

$$d(Q, F) + d(Q, F') = d(Q, S) + d(Q, F') > d(S, F') = d(P, S) + d(P, F') =$$

$$= d(P, F) + d(P, F') = 2a \Rightarrow Q \text{ no pertenece a la elipse.}$$

Para calcular la tangente a $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ en el punto P observemos en primer lugar que, efectivamente, P es un punto de la elipse, ya que verifica la ecuación.

Los focos de la elipse son $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$, por tanto:

Recta PF: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y}{\frac{16}{5}} \Rightarrow x = 3$ Recta PF': $\dfrac{x+3}{6} = \dfrac{y}{\frac{16}{5}} \Rightarrow 8x - 15y + 24 = 0$

Bisectriz exterior (tangente a la elipse en P): Debe tener pendiente negativa, así,

$$x - 3 = \frac{8x - 15y + 24}{\sqrt{8^2 + 15^2}} \Rightarrow 17x - 51 = 8x - 15y + 24 \Rightarrow 9x + 15y - 75 = 0 \Rightarrow 3x + 5y - 25 = 0$$

87. De forma semejante a lo que ocurre en la elipse, la tangente a una hipérbola en uno de sus puntos es una de las dos bisectrices de sus radios vectores. Calcula la ecuación de la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ en el punto $P\left(5, \frac{9}{4}\right)$. Calcula también la recta normal a la curva en ese punto.

Observemos que P pertenece a la hipérbola, ya que cumple su ecuación.

Los focos son $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$, por tanto:

Recta PF: $\frac{x-5}{0}=\frac{y}{\frac{9}{4}} \Rightarrow x=5$ Recta PF': $\frac{x+5}{10}=\frac{y}{\frac{9}{4}} \Rightarrow \overline{FP} \equiv 9x-40y+45=0$

La bisectriz adecuada es, en este caso, la que tiene pendiente positiva:

$$x-5=-\frac{9x-40y+45}{\sqrt{9^2+40^2}} \Rightarrow 41x-205=-9x+40y-45 \Rightarrow 5x-4y-16=0$$

La recta normal será la otra bisectriz de los radios vectores en ese punto:

$$x-5=\frac{9x-40y+45}{\sqrt{9^2+40^2}} \Rightarrow 41x-205=9x-40y+45 \Rightarrow 16x+20y-125=0$$

88. Los tres tipos de cónicas se pueden definir todos a la vez de la siguiente manera: "Una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta fija llamada directriz es constante".

- **Si la constante es menor que la unidad, la cónica es una elipse.**
- **Si la constante es igual a la unidad, la cónica es una parábola.**
- **Si la constante es mayor que la unidad, la cónica es una hipérbola.**

Comprueba lo anterior hallando:

a) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias al punto $F(3, 0)$ y a la recta $x=\frac{25}{3}$ es 0,6.

b) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias al punto $F(5, 0)$ y a la recta $x=\frac{16}{5}$ es 1,25.

a) $\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\left|x-\frac{25}{3}\right|}=\frac{3}{5} \Rightarrow \left(5\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2=(3x-25)^2 \Rightarrow 25\left(x^2-6x+9+y^2\right)=9x^2-150x+625 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x^2+25y^2=400 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Ecuación de una elipse.

b) $\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\frac{16}{5}\right|}=\frac{5}{4} \Rightarrow \left(4\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)^2=(5x-16)^2 \Rightarrow 16\left(x^2-10x+25+y^2\right)=25x^2-160x+256 \Rightarrow$

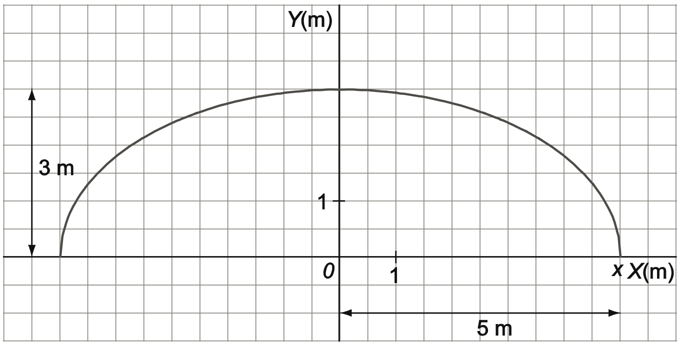
$\Rightarrow 9x^2-16y^2=144 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Ecuación de una hipérbola.

ENTORNO MATEMÁTICO

El lugar adecuado para un cotilla

Elena y Eloísa están en el metro conversando animadamente mientras llega el tren. El techo de la estación tiene forma elíptica tal y como muestra el dibujo y las amigas están, curiosamente, colocadas justo en uno de los focos (*F*) de la sección elíptica.

Luis, un amigo de ellas un poco cotilla, quiere enterarse de la conversación y como este curso está estudiando las secciones cónicas en la clase de matemáticas, sabe que para escuchar bien lo que dicen debe colocarse en el otro foco (*F'*), de la elipse.



a) Suponiendo las distancias y el sistema de referencia que se indican en el dibujo, escribe la ecuación de la sección elíptica. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos donde se encuentran Eloísa, Elena y Luis?

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $\left(4, \frac{9}{5}\right)$, sabiendo que coincide con una de las bisectrices de los radios vectores de la elipse que pasan por ese punto.

c) Comprueba que los ángulos que forman los radios vectores del punto anterior con la tangente hallada son iguales.

a) Ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ Focos: $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$

b) Los radio vectores son $PF : x = 4$ y $PF' : \frac{x+4}{8} = \frac{y}{9/5} \Rightarrow 9x - 40y + 36 = 0$.

Las bisectrices de los radios vectores son $\frac{9x - 40y + 36}{41} = \pm(x-4)$. Como la pendiente debe ser negativa, la bisectriz que nos interesa es $9x - 40y + 36 = 41(x-4) \Rightarrow 4x + 5y - 25 = 0$.

c) Ángulo formado por *PF* y la tangente: $\cos\alpha_1 = \frac{|4|}{\sqrt{1}\sqrt{16+25}} = \frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha_1 = 51{,}34°$

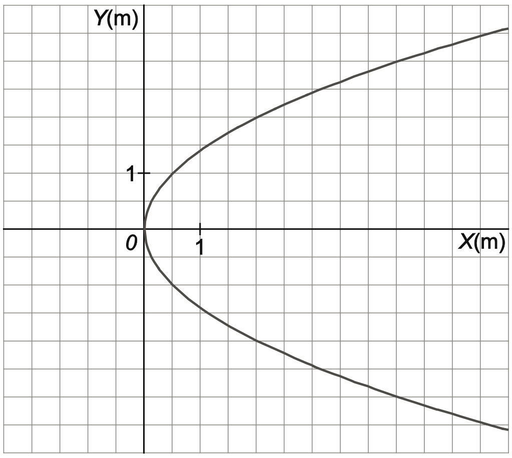
Ángulo formado por *PF'* y la tangente: $\cos\alpha_2 = \frac{|9 \cdot 4 - 40 \cdot 5|}{\sqrt{81+1600}\sqrt{16+25}} = \frac{164}{41\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha_2 = 51{,}34°$

Los faros de los coches

Las secciones de los faros de los coches tienen forma parabólica ya que estas cónicas gozan de la propiedad de que todos los rayos rebotados de rayos que parten de su foco, salen en dirección siempre paralela al eje de la curva.

En la gráfica inferior aparece la sección de un faro de un coche con forma parabólica $y^2 = 2x$. La bombilla está situada en el foco *F* y emite rayos en todas las direcciones.

Comprueba que la dirección de cualquier rayo rebotado es paralela al eje de la parábola. Para ello:



a) Calcula las coordenadas del foco.

b) Considera, por ejemplo, el punto *S*(2, 2) de la parábola y halla la tangente a la elipse en dicho punto. Utiliza el hecho de que la tangente y la parábola tienen un único punto en común.

c) Comprueba que son iguales los ángulos que forma la tangente con la recta *FS* y la $y = 2$.

d) Con la ayuda de un programa de geometría dinámica comprueba que esta propiedad se verifica para todos los puntos de la parábola. ¿Te parece conveniente que las secciones de los faros de los coches tengan forma parabólica?

a) $F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

b) La tangente en *S*(2, 2) será de la forma $y - 2 = m(x - 2)$ con $m \neq 0$. El sistema formado por las ecuaciones de la tangente y de la parábola debe tener solución única, así:

$$\begin{cases} y - 2 = m(x-2) \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow m^2(x^2 - 4x + 4) + 4m(x-2) + 4 = 2x \Rightarrow m^2x^2 - (4m^2 - 4m + 2)x + (4m^2 - 8m + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (4m^2 - 4m + 2)^2 - 4m^2(4m^2 - 8m + 4) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 16m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$.

c) *FS*: $\frac{x-2}{\frac{3}{2}} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 4x - 3y - 2 = 0$

Ángulo formado por la tangente y *FS*: $\cos\alpha_1 = \frac{|4+6|}{\sqrt{1+4}\sqrt{16+9}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_1 = 26{,}57°$

Ángulo formado por la tangente y la recta $y = 2$: $\cos\alpha_2 = \frac{|-2|}{\sqrt{1+4}\sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_2 = 26{,}57°$