6 Funciones

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Obtén el dominio de las siguientes funciones:

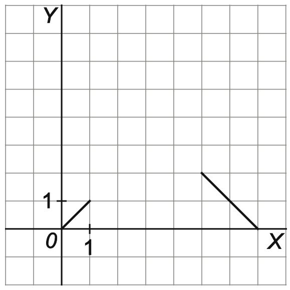
a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{5}$ **b)** $g(x)=\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$ **c)** $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+4}$

a) $D(f)=$ **b)** $D(g)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$ **c)** $D(h)=[-2,+\infty)$

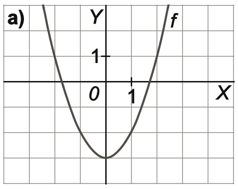
3. Dibuja una posible gráfica para la función *y* = *f*(*x*) con las siguientes restricciones en su dominio y recorrido:

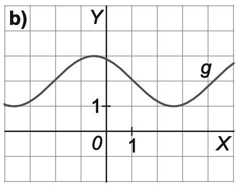
$$D(f)=[0,\ 1]\cup[5,\ 7] \text{ y } R(f)=[0,\ 2]$$

Respuesta abierta. Otra posible solución se muestra en las soluciones al final del libro.



4. Obtén el dominio y el recorrido de estas funciones.





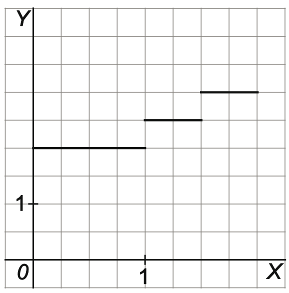
a) $D(f)=\mathbb{R}$; $R(f)=[-3,+\infty)$ **b)** $D(g)=\mathbb{R}$; $R(g)=[1,\ 3]$

5. Ejercicio resuelto.

6. En un aparcamiento se cobra 50 CENT más por cada media hora de uso a partir de la 1ª hora, además de un fijo de 2€. Encuentra la expresión de la función que da el coste en función del tiempo de aparcamiento y represéntala.

Sea *x* el tiempo de aparcamiento en horas.

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } 0\le x<1\\ 2{,}5 & \text{si } 1\le x<1{,}5\\ 3 & \text{si } 1{,}5\le x<2\\ \dots\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } 0\le x<1\\ 2+\dfrac{n}{2} & \text{si } \dfrac{n+1}{2}\le x<\dfrac{n+2}{2}\end{cases} \text{ con } n\in\mathbb{N} \text{ y } n\ge 1$$



7. Para las siguientes funciones, calcula $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y determina su dominio.

a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2}{x-2} & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

a) Para $f(-2)$ se utiliza la primera expresión $f(x)=x$.

Para $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$ se usa la segunda expresión $f(x)=x^2$.

Para $f(2)$ se utiliza la tercera expresión $f(x)=x$.

$f(-2)=-2$; $f(-1)=(-1)^2=1$; $f(0)=0^2=0$; $f(1)=1^2=1$; $f(2)=2$; $D(f)=\mathbb{R}$

b) Para $f(-2)$, $f(-1)$ y $f(0)$ se utiliza la primera expresión $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$.

$f(1)$ no está definido por no pertenecer al dominio.

Para $f(2)$ se utiliza la segunda expresión $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

$f(-2)=\dfrac{(-2)^2+2}{(-2)-2}=\dfrac{6}{-4}=-\dfrac{3}{2}$; $f(-1)=\dfrac{(-1)^2+2}{(-1)-2}=\dfrac{3}{-3}=-1$; $f(0)=\dfrac{0^2+2}{0-2}=\dfrac{2}{-2}=-1$

$f(2)=\dfrac{2+1}{2-1}=\dfrac{3}{1}=3$; $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

8. Expresa $f(x)=|x+5|-x$ como una función a trozos.

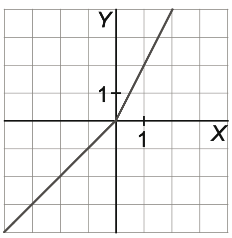
Si $x<-5$, $x+5<0$ por lo que $|x+5|=-(x+5)=-x-5 \Rightarrow |x+5|-x=-x-5-x=-2x-5$

Si $x\ge -5$, $x+5\ge 0$ por lo que $|x+5|=x+5 \Rightarrow |x+5|-x=x+5-x=5$

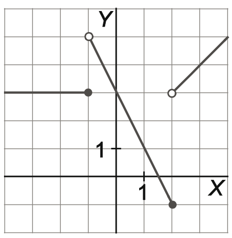
$f(x)=\begin{cases} -2x-5 & \text{si} \quad x<-5 \\ 5 & \text{si} \quad x\ge -5 \end{cases}$

9. Encuentra la expresión algebraica de las funciones:

a)



b)



a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x<0 \\ 2x & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ -2x+3 & \text{si} \quad -1<x\le 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

10. Ejercicio resuelto.

11. Dadas las siguientes funciones:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x-1}{x+3}} \qquad \boldsymbol{g(x)=\frac{2}{x^2-9}} \qquad \boldsymbol{h(x)=\sqrt{x-1}}$$

Calcula el dominio y la expresión de las siguientes funciones:

a) $f+g$ **b)** $f-h$ **c)** $(f+h)g$ **d)** $\frac{1}{f}$ **e)** $\frac{g}{h}$ **f)** $\frac{h}{f}$

Se calcula previamente el dominio de cada función original: $D(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$; $D(g)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$; $D(h)=[1,+\infty)$

a) $D(f+g)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$ $\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x-1}{x+3}+\frac{2}{x^2-9}=\frac{x^2-4x+5}{x^2-9}$

b) $D(f-h)=[1,+\infty)$ $\quad (f-h)(x)=f(x)-h(x)=\frac{x-1}{x+3}-\sqrt{x-1}$

c) $D((f+h)g)=[1,3)\cup(3,+\infty)$ $\quad [(f+h)g](x)=[f(x)+h(x)]g(x)=\left(\frac{x-1}{x+3}+\sqrt{x-1}\right)\cdot\frac{2}{x^2-9}$

d) $D\left(\frac{1}{f}\right)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$ $\quad \left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{x+3}{x-1}$

e) $D\left(\frac{g}{h}\right)=[1,3)\cup(3,+\infty)$ $\quad \left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{2}{(x^2-9)\sqrt{x-1}}$

f) $D\left(\frac{h}{f}\right)=(1,+\infty)$ $\quad \left(\frac{h}{f}\right)(x)=\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{(x+3)\sqrt{x-1}}{x-1}$

12. Sean las funciones $\boldsymbol{f(x)=2x^2-3x-5}$ y $\boldsymbol{g(x)=x+h}$, donde *h* es cualquier número real.

a) Calcula las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$.

b) ¿Para qué valores de *h* tiene la función *g* compuesta con *f* una raíz en $x=0$?

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(x+h)=2(x+h)^2-3(x+h)-5=2x^2+(4h-3)x+(2h^2-3h-5)$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(2x^2-3x-5)=(2x^2-3x-5)+h=2x^2-3x+(h-5)$

b) $(f\circ g)(0)=2\cdot 0^2+(4h-3)\cdot 0+(2h^2-3h-5)=2h^2-3h-5=0\Rightarrow h_1=-1,\ h_2=\frac{5}{2}$

13. Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x)=\frac{x-1}{x+2}}$, $\boldsymbol{g(x)=x-4}$, $\boldsymbol{h(x)=\sqrt{x-3}}$ y $\boldsymbol{k(x)=x^2+1}$ determina el dominio y la expresión de las funciones:

a) $f\circ g$ **b)** $g\circ f$ **c)** $h\circ g$ **d)** $g\circ h$ **e)** $k\circ h$ **f)** $f\circ k$

Dominio de cada función original: $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$; $D(g)=\mathbb{R}$; $D(h)=[3,+\infty)$; $D(k)=\mathbb{R}$

a) $D(f\circ g)=\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-4)=\frac{(x-4)-1}{(x-4)+2}=\frac{x-5}{x-2}$

b) $D(g\circ f)=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\left(\frac{x-1}{x+2}\right)-4=\frac{-3x-9}{x+2}$

c) $D(h\circ g)=[7,+\infty)$ $\quad (h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x-4)=\sqrt{(x-4)-3}=\sqrt{x-7}$

d) $D(g\circ h)=[3,+\infty)$ $\quad (g\circ h)(x)=g(h(x))=g(\sqrt{x-3})=\sqrt{x-3}-4$

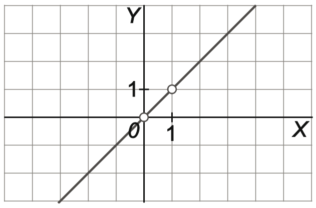
e) $D(g\circ k)=\mathbb{R}$ $\quad (g\circ k)(x)=g(k(x))=g(x^2+1)=(x^2+1)-4=x^2-3$

f) $D(f\circ k)=\mathbb{R}$ $\quad (f\circ k)(x)=f(k(x))=f(x^2+1)=\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)+2}=\frac{x^2}{x^2+3}$

14. Dadas las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \frac{x-1}{x}$, ¿a cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica de la ilustración?

A. $s = f + g$ **C.** $d = f - g$

B. $p = f \cdot g$ **D.** $q = \frac{f}{g}$



Los dominios de las funciones *s*, *q* y *d*, incluyen el valor $x = 1$.

La función $q(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene dominio $D(q) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ y coincide con $y = x$ en el resto de sus puntos.

La respuesta correcta es la D.

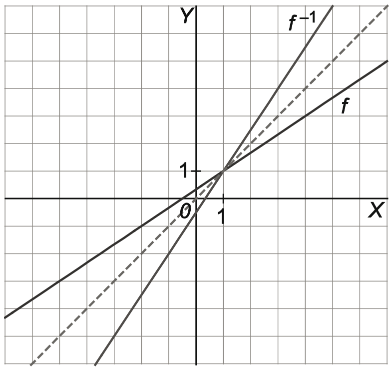
15. Sea $f(x) = \frac{2x+1}{3}$. Halla f^{-1} y dibuja su gráfica y la de *f*.

Se intercambian las variables *x* e *y* en la ecuación explícita de *f*, $y = \frac{2x+1}{3}$, y despejamos *y*:

$x = \frac{2y+1}{3}$

$3x = 2y + 1 \Rightarrow 2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3x-1}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$



16. La función $f(x) = x^5 + x + 1$ admite inversa, f^{-1}. Utiliza la calculadora para aproximar $f^{-1}(10)$.

Se busca un valor de *x* para el que $f(x) = x^5 + x + 1 = 10$.

Para ello se dan valores a *x* que hagan que *f*(*x*) se aproxime a 10.

x	1	1,4	1,5	1,6	2
$f(x) = x^5 + x + 1$	3	7,778	10,094	13,086	35

$f^{-1}(10) \simeq 1{,}5$

17. Obtén la expresión y el dominio de la función inversa de $f(x) = \sqrt{2x-3}$. ¿Cuánto vale $f^{-1}(3)$?

$y = \sqrt{2x-3} \Rightarrow y^2 = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y^2+3}{2}$. Así pues, $f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$ con $x \geq 0$.

$R(f) = [0, +\infty) \Rightarrow D(f^{-1}) = [0, +\infty)$

$f^{-1}(3) = 6$

18. Ejercicio interactivo.

19. A partir de la gráfica de *f*, esboza las gráficas de las siguientes funciones.

a) $g(x)=f(x)+4y$

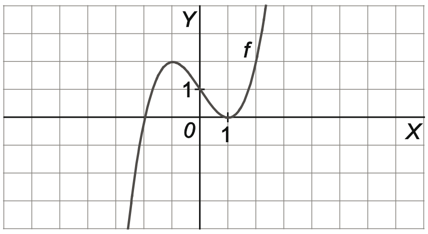
b) $g(x)=f(x+4)$

c) $g(x)=3f(x)$

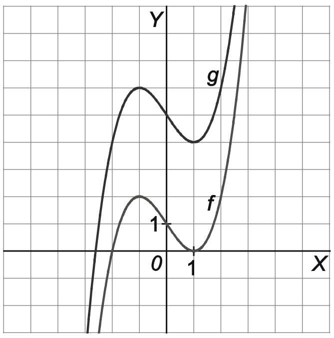
d) $h(x)=f(x)-1$

e) $h(x)=f(x-1)$

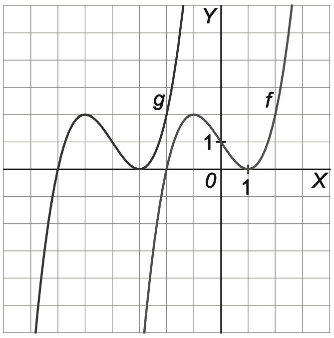
f) $h(x)=f(3x)$



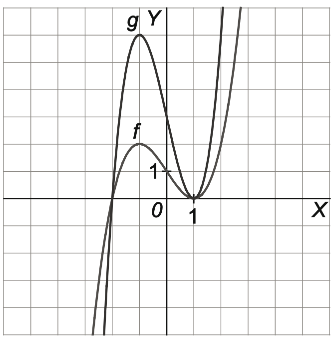
a) *g* se obtiene mediante una traslación vertical, subiendo la gráfica de *f* 4 unidades.



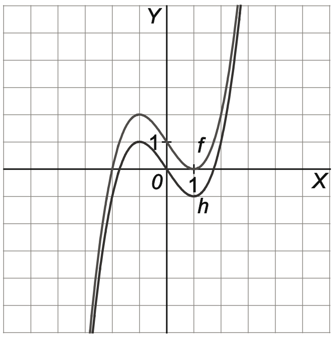
b) *g* se obtiene mediante una traslación horizontal, desplazando *f* 4 unidades hacia la izquierda.



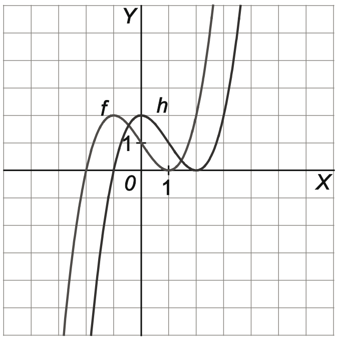
c) *g* se obtiene a partir de *f* mediante una dilatación vertical.



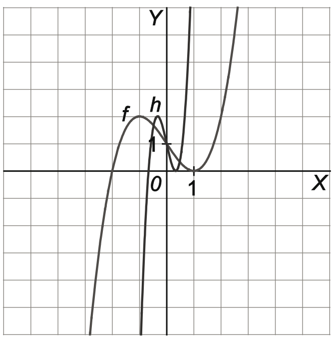
d) *h* se obtiene mediante una traslación vertical, bajando la gráfica de *f* 1 unidad.



e) *h* se obtiene mediante una traslación horizontal, desplazando *f* 1 unidad hacia la derecha.



f) *h* se obtienea partir de *f* mediante una dilatación horizontal.



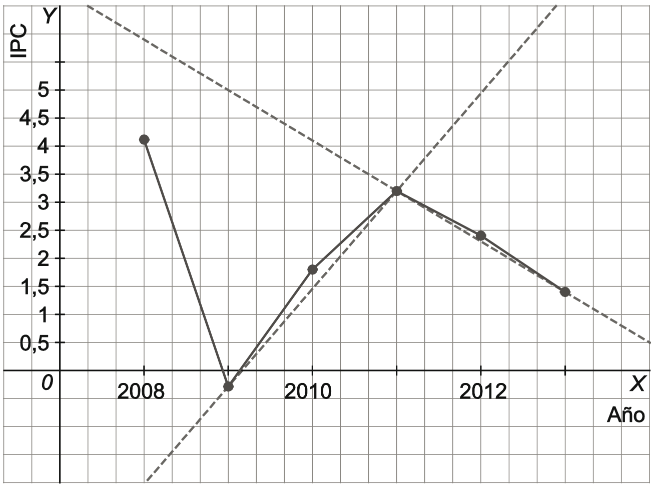
20. Ejercicio resuelto.

21. Se tienen los siguientes datos sobre la evolución del índice de precios al consumo (IPC).

Año	2008	2009	2010	2011	2012	2013
IPC	4,1	–0,3	1,8	3,2	2,4	1,4

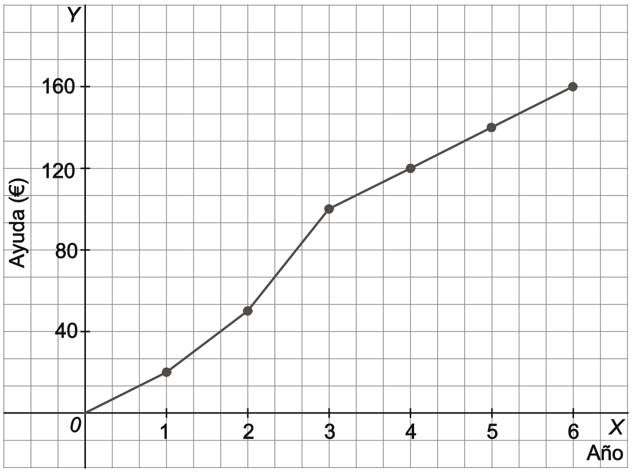
Representa gráficamente los datos y halla el máximo intervalo para el que la gráfica se aproxima a una recta.

La función se aproxima a una recta en el intervalo [2011, 2013].



22. La siguiente tabla expone la ayuda municipal que recibe una familia en función del número de hijos. Representa los datos y estudia para qué intervalo se puede aproximar por una recta.

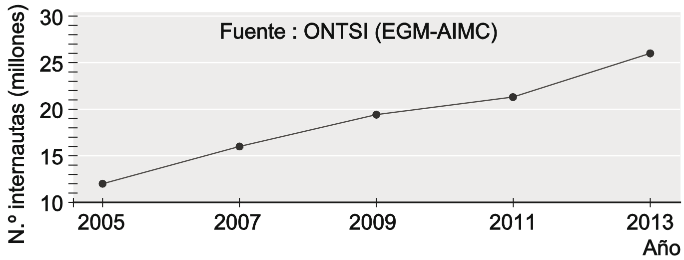
N.º de hijos	1	2	3	4	5	6
Ayuda (€)	20	50	100	120	140	160

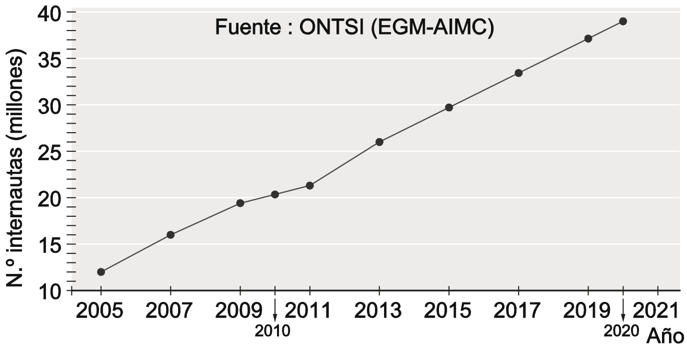


La función se puede aproximar por una recta en el intervalo [3, 6].

23. Ejercicio resuelto.

24. En la gráfica de la derecha se ha representado el número de personas que usan Internet al menos una vez al mes en España en los últimos años. Interpolando y extrapolando gráficamente, estima cuántos había en 2010 y cuántos habrá en 2020.





25. Ejercicio resuelto.

26. La población de cierto municipio en el año 2008 fue de 179 000 habitantes, y en 2013 era de250 000.

a) Calcula aproximadamente mediante interpolación lineal, la población que hubo en dicho municipio en el año 2010.

b) Estima por extrapolación lineal, la población que hubo en dicho municipio en 2015.

a) Se calcula la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por $A(2008, 179000)$ y $B(2011, 250000)$:

Como la recta pasa por *A* entonces: $y(2008) = 179\,000 \Rightarrow 179\,000 = 2008m + n$.

Como la recta pasa por *B* entonces: $y(2013) = 250\,000 \Rightarrow 250\,000 = 2013m + n$.

Se resuelve el sistema: $\begin{cases} 179\,000 = 2008m + n \\ 250\,000 = 2013m + n \end{cases} \Rightarrow m = 14\,200;\ n = -28\,334\,600$.

Por tanto se obtiene la ecuación: $y = 14\,200x - 28\,334\,600$.

Sustituyendo, en dicha ecuación, *x* por 2010, se obtiene $y = 14200 \cdot 2010 - 28\,334\,600 = 207\,400$.

Así pues se estima que en 2010 hubo una población de 207 400 habitantes.

b) Sustituyendo, en dicha ecuación, *x* por 2015, se obtiene $y = 14\,200 \cdot 2015 - 28\,334\,600 = 278\,400$

Así pues se estima que en 2015 hubo una población de 278 400 habitantes.

27. Iván está intentando ahorrar electricidad. La factura de enero fue de 56 €, la de febrero la perdió, en marzo gastó 36€,y en abril 34,50€.

a) Estima cuál fue su gasto en febrero y lo que pagará en mayo.

b) ¿Crees que con estos datos la predicción para diciembre sería fiable?

a) Para interpolar la factura de febrero se utilizan los datos de los dos meses más cercanos a él, enero y marzo. Se asigna el número 1 al mes de enero, 2 a febrero, …, hasta diciembre que sería el 12.

Sea *x* el número correspondiente a cada mes e *y* el correspondiente al gasto eléctrico.

Se debe hallar la recta de interpolación $y = ax + b$ que pasa por los puntos $A(1, 56)$ y $B(3, 36)$.

Dicha recta es $y = -10x + 66$ .El gasto en febrero,x= 2, será: $y = -10 \cdot 2 + 66 = 46$ €.

Para interpolar la factura de mayo se utilizan los datos de los dos meses más cercanos a él, marzo y abril. El gasto en mayo se estima en $y = -1{,}5 \cdot 5 + 40{,}5 = 33$ €.

b) Interpolando a partir de los datos de marzo y abril, que son los más cercanos a diciembre, x= 12, la predicción es: $y = -1{,}5 \cdot 12 + 40{,}5 = 22{,}5$ €.

Este dato no es fiable, ya que no parece lógico que el gasto eléctrico en diciembre seamenor que el de mayo.

Esto se debe a que los datos que se utilizan para estimar el gasto de diciembre están muy alejados de él.

28. Ejercicio resuelto.

29. Se tienen tres datos sobre los beneficios de una empresa en tres meses distintos:

Meses	1.º	4º.	5.º
Beneficios (miles de **€**)	0	3	0

a) Encuentra la función cuadrática que se ajusta a estos tres datos.

b) ¿Qué beneficios o pérdidas se estiman para el 6.º mes?

c) ¿En qué mes se obtiene el beneficio máximo?

a) Llamando *x* a los meses e *y* a los beneficios, debemos encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(1,0)$, $B(4,3)$ y $C(5,0)$.

Como pasa por el punto *A*, $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$.

Como pasa por el punto *B*, $f(4) = 3 \Rightarrow 16a + 4b + c = 3$.

Como pasa por el punto *C*, $f(5) = 0 \Rightarrow 25a + 5b + c = 0$.

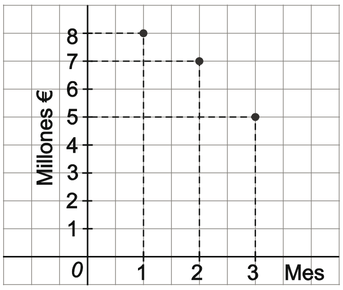
La solución del sistema resultante $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 3 \\ 25a + 9b + c = 0 \end{cases}$ es $a = -1,\ b = 6,\ c = -5$.

Por lo que la función cuadrática es $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

b) El balance estimado del 6º mes es $f(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 5 = -5$, que representan unas pérdidas de 5000 **€**.

c) Como la parábola interpoladora, $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, es cóncava hacia abajo, su vértice, que es el punto $V(3, 4)$ será un máximo absoluto, El beneficio máximo será de 4000 **€**y se conseguirá en el tercer mes.

30. La figura muestra el volumen de ventas de una gran superficie comercial a lo largo de tres meses consecutivos. Encuentra la función cuadrática que se ajusta a esos tres datos. ¿Qué ventas se esperan para el siguiente mes?



La parábola pasa por los puntos $A(1,8)$, $B(2,7)$ y $C(3,5)$.

Como pasa por el punto *A*, $f(1)=8 \Rightarrow a+b+c=8$.

Como pasa por el punto *B*, $f(2)=7 \Rightarrow 4a+2b+c=7$.

Como pasa por el punto *C*, $f(3)=5 \Rightarrow 9a+3b+c=5$.

La solución del sistema resultante $\begin{cases} a+b+c=8 \\ 4a+2b+c=7 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$ es $a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2},\ c=8$.

La función cuadrática resultante es $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+8$.

Para $x=4$ se obtiene: $f(4)=-\dfrac{16}{2}+\dfrac{4}{2}+8=2$.

Así pues, para el mes siguiente, se esperan unas ventas de 2 millones de €.

31. Ejercicio interactivo.

32. Indica qué tipo de interpolación es el más adecuado en cada situación. Determina en cada caso su función de interpolación.

a) El número de personas que estaba en el paro en una ciudad en febrero si el número de parados durante los meses de Enero, Marzo y Abril son los que figuran en la tabla.

Mes	Enero	Marzo	Abril
N.º de personas	2500	2420	2360

b) Los beneficios de una empresa en el mes de febrero conociendo los siguientes datos.

Mes	Enero	Marzo	Abril
Beneficios (en euros)	230 000	255 000	220 700

c) El coste en pintura para decorar un cuadrado de 10 m de lado con los siguientes datos.

Lado (en metros)	5	15	25
Coste (en euros)	200	400	900

a) Como el número de parados es siempre decreciente en los meses indicados parece razonable emplear la interpolación lineal.

Para interpolar la factura de febrero se utilizan los datos de los dos meses más cercanos a él, enero y marzo. Llamando mes 1 al mes de enero, *x,*al número de mes, e *y,* al número de parados, se calcula la recta de interpolación $y=ax+b$ que pasa por los puntos $A(1, 2500)$ y $B(3, 2420)$.Esta recta es $y=-40x+2540$.

b) Como los beneficios crecen primero y después decrecen, parece adecuado utilizar la interpolación parabólica.Llamando mes 1 al mes de enero, *x,* al número de mes, e *y,*a los beneficios en miles de €, se calcula la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $A(1, 230)$, $B(3, 255)$ y $C(4; 220,7)$. Esta parábola es $y=-\dfrac{78}{5}x^2+\dfrac{749}{10}x+\dfrac{1707}{10}$.

c) Como en la situación del problema intervienen áreas se emplea la interpolación cuadrática, pues la variable dependiente está estrechamente relacionada con el cuadrado de la variable independiente (el área es el cuadrado del lado).

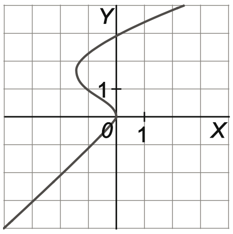
Llamando *x* al lado del cuadrado en metros,e *y,* al coste en cientos de €, se calcula la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $A(5,2)$, $B(15,4)$ y $C(25,9)$. Esta parábola es

$$y=-\frac{3}{200}x^2-\frac{1}{10}x+\frac{17}{8}$$

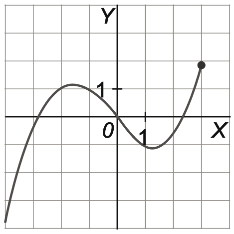
33 a 39. Ejercicios resueltos.

40. Analiza razonadamente si las siguientes gráficas corresponden o no a funciones reales de variable real.

a)



b)



Se dice que una relación entre dos variables *x* e *y*es una función, si a cada valor de *x* le corresponde un único valor de*y*, es decir si a cada valor de *x* le corresponde una única imagen *f*(*x*).

a) Esta gráfica no corresponde a una función pues hay valores de *x* a los que les corresponde más de una imagen. Por ejemplo, a $x = 0$ le corresponden dos imágenes: $y = 0$ e $y = 3$.

b) Esta gráfica sí corresponde a una función porque no hay valores de x a los que les corresponda más de una imagen. En este caso se observa que sí que hay varios valores de x a los que les corresponde una misma imagen y. Por ejemplo, a $x = -3$ y $x = 0$ le corresponde el mismo valor $y = 0$, pero eso no contradice en absoluto la definición de función.

41. Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$

e) $f(x) = \sqrt{(x-1)(2x+3)}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

g) $f(x) = 1 + \sqrt{\dfrac{3-x}{5-x}}$

h) $f(x) = \log(5-x)$

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

d) $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

e) $D(f) = \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

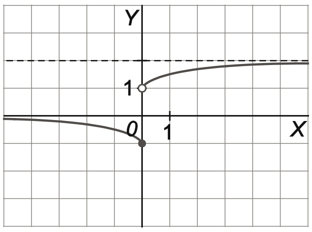
f) $D(f) = \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

g) $D(f) = (-\infty, 3] \cup (5, +\infty)$

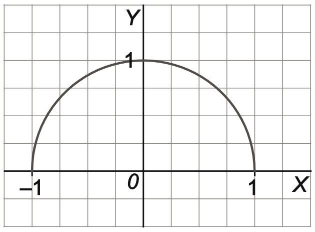
h) $D(f) = (-\infty, 5)$

42. Dadas las siguientes gráficas de funciones, indica su dominio y su recorrido.

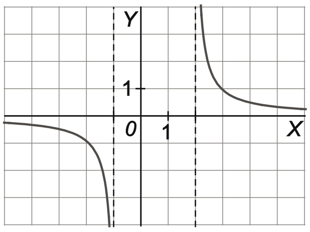
a)



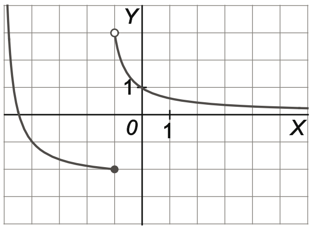
c)



b)



d)



a) $D(f) = \mathbb{R}$

$R(f) = [-1, 0) \cup (1, 2)$

b) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

$R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $D(f) = [-1, 1]$

$R(f) = [0, 1]$

d) $D(f) = (-5, +\infty)$

$R(f) = [-2, +\infty)$

43. Escribe la expresión analítica de las funciones definidas por los siguientes enunciados y establece su dominio.

a) A cada número real se le asigna el triple de su cuadrado menos el doble de su cubo.

b) Un comercial cobra un fijo de 500 €al mes más un 2% de la facturación que haya obtenido durante dicho mes. Escribe la función que da el sueldo del comercial en función de dicha facturación mensual.

c) En una clase se tiene un diccionario por cada alumno, un atlas por cada dos alumnos y un ordenador por cada tres. Se pide la función que da el número total de materiales de apoyo que hay en la clase en función del número de alumnos de la misma.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ $\qquad D(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 500 + 0{,}02x$ $\qquad D(f) = [0, +\infty)$

c) $f(x) = x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} \Rightarrow f(x) = \dfrac{11x}{6}$ $\qquad D(f) = \{6n : n \in \mathbb{N}\}$ = “números naturales múltiplos de 6”

44. Para costearse el viaje de fin de curso, los alumnos de bachillerato deciden montar una miniguardería por las tardes para cuidar niños. El coste del local es de 500 € por mes; la licencia que exige el ayuntamiento asciende a 200 €; y además, van a invertir 100 € en imprimir unos folletos de propaganda. A los padres les cobrarán 20 €por cada tarde que pase su hijo en la guardería y cada cuidador se llevará 10 €por cada niño que tenga a su cargo.

a) ¿Cuáles son los gastos fijos que tendrán el primer mes?

b) ¿Cuántos niños tendrán que cuidar el primer mes para cubrir gastos?

c) Expresa como una función el beneficio o pérdida en función del número mensual de niños atendidos.

d) ¿Qué beneficios obtendrán si atienden a cien niños durante el primer mes?

a) 500 € del local + 200 € de licencia + 100 €de propaganda =800 €.

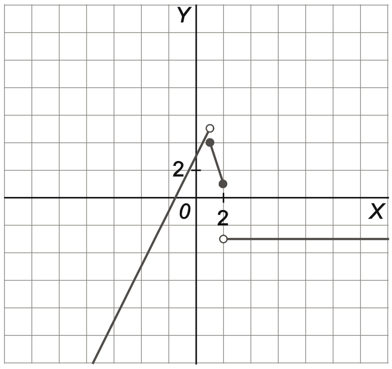
b) Ingresos – Gastos = $20x - (500 + 200 + 100 + 10x) = 10x - 800 = 0 \Rightarrow x = 80$. Deberán cuidar 80 niños.

c) $B(x) = 10x - 800$, pues Beneficios = Ingresos – Gastos

d) $B(100) = 10 \cdot 100 - 800 = 200$ €.

Funciones definidas a trozos

45. Representa la gráfica de $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si} \quad x<1\\ -3x+7 & \text{si} \quad 1\le x\le 2\\ -3 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$ **y calcula** $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$.



Para $x=-2$ se cumple que $x<1$ por lo que $f(-2)=2(-2)+3=-1$.

Para $x=0$ se cumple que $x<1$ por lo que $f(0)=2\cdot 0+3=3$.

Para $x=1$ se cumple que $1\le x\le 2$ por lo que $f(1)=-3\cdot 1+7=4$.

Para $x=2$ se cumple que $1\le x\le 2$ por lo que $f(2)=-3\cdot 2+7=1$.

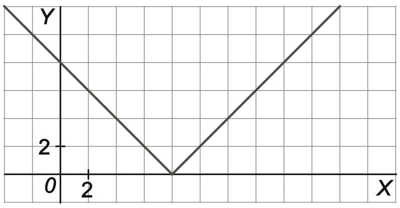
Para $x=5$ se cumple que $x>2$ por lo que $f(5)=-3$.

46. Expresa como funciones definidas a trozos y dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

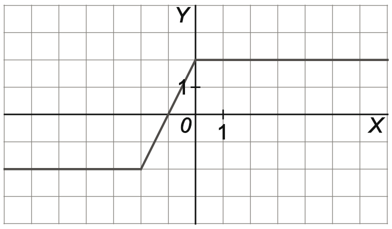
a) $f(x)=|8-x|$

b) $f(x)=|x+2|-|x|$

a) $f(x)=\begin{cases}8-x & \text{si} \quad x<8\\ x-8 & \text{si} \quad x\ge 8\end{cases}$

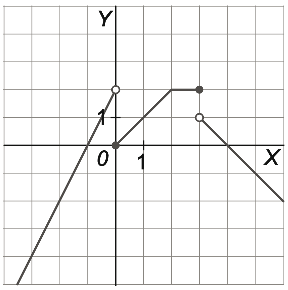


b) $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad x<-2\\ 2x+2 & \text{si} \quad -2\le x<0\\ 2 & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$

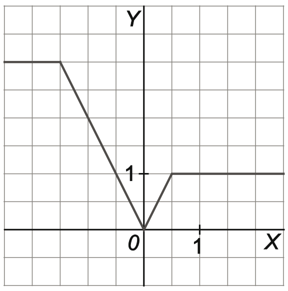


47. Encuentra las expresiones analíticas de las funciones cuyas gráficas son las siguientes.

a)



b)



a) $f(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{si} \quad x<0\\ x & \text{si} \quad 0\le x<2\\ 2 & \text{si} \quad 2\le x\le 3\\ -x+4 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3 & \text{si} \quad x<-\dfrac{3}{2}\\ -2x & \text{si} \quad -\dfrac{3}{2}\le x<0\\ 2x & \text{si} \quad 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 1 & \text{si} \quad x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Operaciones con funciones

48. Dadas las funciones $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$, $h(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ y $t(x)=1-x^2$, calcula las siguientes funciones y determina sus dominios.

a) $(f-t)(x)$ **d)** $(ht)(x)$ **g)** $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

b) $(h+t)(x)$ **e)** $(fh)(x)$ **h)** $(gg)(x)$

c) $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$ **f)** $\left(\dfrac{f}{t}\right)(x)$ **i)** $\left(\dfrac{tf}{h}\right)(x)$

$D(f)=\mathbb{R}$, $D(g)=[2,+\infty)$, $D(h)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$, $D(t)=\mathbb{R}$

a) $(f-t)(x)=2x^2-x-3$ $D(f-t)=\mathbb{R}$

b) $(h+t)(x)=\dfrac{-x^4+5x^2-3}{x^2-4}$ $D(h+t)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

c) $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)=\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-4\right)$ Como h nunca se anula, $D\left(\dfrac{f}{h}\right)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

d) $(ht)(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$ $D(ht)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

e) $(fh)(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\dfrac{x+1}{x+2}$ $D(fh)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

f) $\left(\dfrac{f}{t}\right)(x)=\dfrac{x^2-x-2}{1-x^2}=\dfrac{x-2}{1-x}$ Como t se anula en $x=1$ y en $x=-1$, $D\left(\dfrac{f}{t}\right)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

g) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x^2-x-2}$ Como f se anula en $x=2$ y en $x=-1$, $D\left(\dfrac{g}{f}\right)=(2,+\infty)$.

h) $(gg)(x)=2x-4$ $D(gg)=[2,+\infty)$

i) $\left(\dfrac{tf}{h}\right)(x)=\left(1-x^2\right)\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-4\right)=-(x-1)(x+1)^2(x-2)^2(x+2)$. Como h nunca se anula $D\left(\dfrac{tf}{h}\right)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

49. Dadas las funciones $f(x)=1-x^2$, $h(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ y $g(x)=\sqrt{4-2x}$, halla estas funciones y sus dominios.

a) $(f\circ f)(x)$ **b)** $(h\circ g)(x)$ **c)** $(g\circ f)(x)$

$D(f)=\mathbb{R}$; $D(g)=(-\infty,2]$; $D(h)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

a) $(f\circ f)(x)=f\left(1-x^2\right)=1-\left(1-x^2\right)^2=-x^4+2x^2$; $D(f\circ f)=\mathbb{R}$

b) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\sqrt{4-2x}\right)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{4-2x}\right)^2-4}=\dfrac{1}{4-2x-4}=-\dfrac{1}{2x}$

Para $x=0$ $g(0)=\sqrt{4}=2$, valor que anula el denominador de $\dfrac{1}{x^2-4}$, por lo que $D(h\circ g)=(-\infty,0)\cup(0,2]$.

50. Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\dfrac{3}{x}$ y $h(x)=\sqrt{x}$, calcula la expresión analítica de estas funciones:

a) $(f\circ g\circ h)(x)$ **b)** $(g\circ f\circ h)(x)$ **c)** $(f\circ h\circ g)(x)$ **d)** $(h\circ g\circ f)(x)$

a) $(f\circ g\circ h)(x)=f(g(h(x)))=f\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)=f\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^2-1=\dfrac{9}{x}-1$ $D(f\circ g\circ h)=(0,+\infty)$

b) $(f\circ h\circ g)(x)=f(h(g(x)))=f\left(h\left(\dfrac{3}{x}\right)\right)=f\left(\sqrt{\dfrac{3}{x}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{3}{x}}\right)^2-1=\dfrac{3}{x}-1$ $D(f\circ h\circ g)=(0,+\infty)$

c) $(g\circ f\circ h)(x)=g(f(h(x)))=g\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)=g\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-1\right)=g(x-1)=\dfrac{3}{x-1}$ $D(g\circ f\circ h)=(0,1)\cup(0,+\infty)$

d) $(h\circ g\circ f)(x)=h(g(f(x)))=h\left(g\left(x^2-1\right)\right)=h\left(\dfrac{3}{x^2-1}\right)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2-1}}$ $D(h\circ g\circ f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Función inversa

51. Dada $f(x)=2x-1$, calcula $f^{-1}(x)$. Calcula $(f\circ f^{-1})(x)$ y $(f^{-1}\circ f)(x)$ y analiza los resultados.

$y=2x-1\Rightarrow x=\dfrac{y+1}{2}$, por lo que $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}$

$(f\circ f^{-1})(x)=2\left(\dfrac{x+1}{2}\right)-1=x$; $(f^{-1}\circ f)(x)=\dfrac{(2x+1)-1}{2}=x$; por tanto, $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$

52. Calcula, cuando sea posible, las funciones inversas y los dominios de:

a) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x+1}$ **b)** $g(x)=\sqrt{x^3-1}$ **c)** $h(x)=\log x$ **d)** $t(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$

a) $y=\dfrac{2x-3}{3x+1}\Rightarrow x=\dfrac{-3-y}{3y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{3+x}{2-3x}$ $D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ $D(f^{-1})=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

b) $y=\sqrt{x^3-1}\Rightarrow x=\sqrt[3]{y^2+1}\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ $D(g)=[1,+\infty)$ $D(g^{-1})=R(g)=[0,+\infty)$

c) $y=\log x\Rightarrow x=10^y\Rightarrow h^{-1}(x)=10^x$ $D(h)=(0,+\infty)$ $D(h^{-1})=\mathbb{R}$

d) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\Rightarrow x=\dfrac{1}{y^3}-2\Rightarrow t^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^3}-2$ $D(t)=\mathbb{R}-\{-2\}$ $D(t^{-1})=\mathbb{R}-\{0\}$

53. Calcula el valor de la función $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}$ para $x=1$ y para $x=-2$. ¿Tiene f inversa? Justifica tu respuesta.

$f(1)=\dfrac{1^3+2}{1}=3$; $f(-2)=\dfrac{(-2)^3+2}{-2}=3$

Como $f(1)=f(-2)=3$ entonces la gráfica de f corta a la recta horizontal $y=3$ en dos puntos, por lo que no existe la inversa de f.

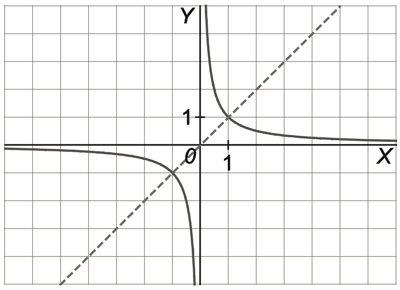
54. Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$

a) Calcula la función $(f\circ f)(x)$. ¿Qué conclusión obtienes?

b) Dibuja ahora la gráfica de *f*. Analizando dicha gráfica, ¿puedes corroborar tu conclusión del apartado anterior?

a) $(f\circ f)(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$. Así pues, la función y su inversa son iguales: $f=f^{-1}$.

b) A partir de la gráfica siguiente se observa que la función *f* es simétrica respecto de la recta $y=x$, por lo que se verifica que $f=f^{-1}$ como se comentaba en el apartado anterior.



Construcción de funciones por traslación y dilatación

55. A partir de la gráfica de $f(x)=x^2$ dibuja, utilizando traslaciones y dilataciones, las gráficas de las siguientes funciones.

a) $a(x)=x^2-4$

b) $b(x)=x^2+2$

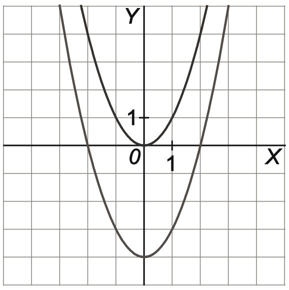
c) $c(x)=4x^2$

d) $d(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

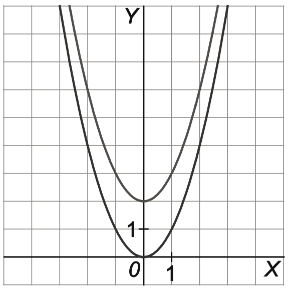
e) $e(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$

f) $f(x)=3x^2+6x-4=3(x+1)^2-7$

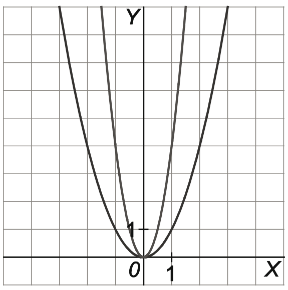
a) Traslación vertical de 4 unidades



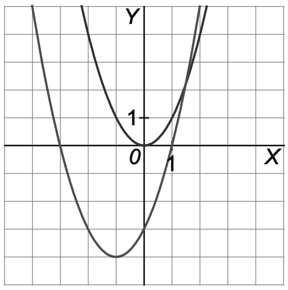
b) Traslación vertical de 2 unidades



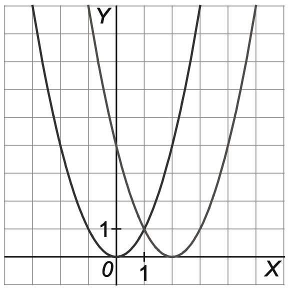
c)



d) Traslación horizontal (1 u) y vertical (4 u)

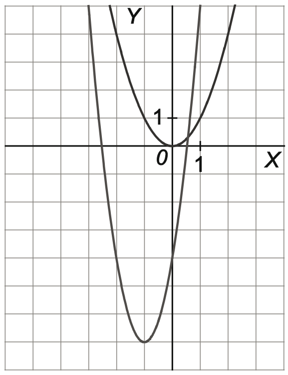


e) Traslación horizontal de dos unidades



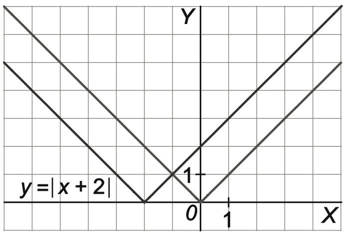
Dilatación vertical

f) Traslación horizontal (1 u), vertical (7 u) y dilatación

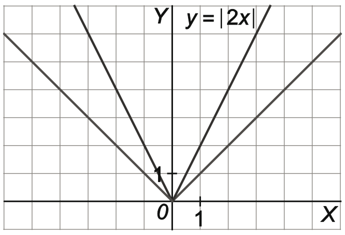


56. A partir de la gráfica de $j(x) = |x|$, dibuja, sin construir tablas de valores, las gráficas de las funciones:

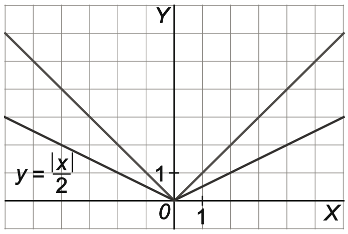
a) $a(x) = |x+2|$



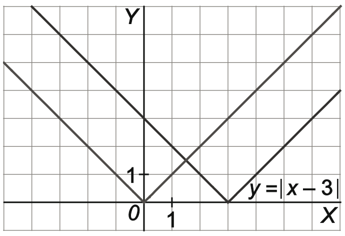
d) $d(x) = |2x|$



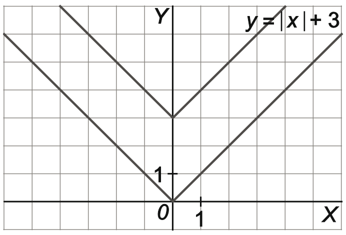
g) $g(x) = \dfrac{|x|}{2}$



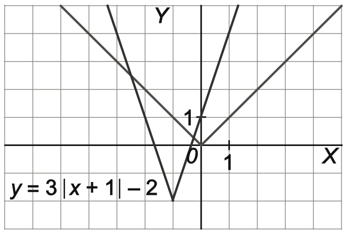
b) $b(x) = |x-3|$



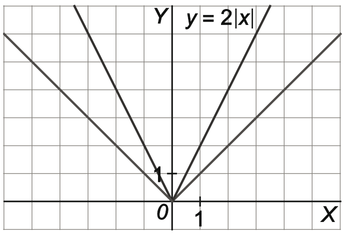
e) $e(x) = |x|+3$



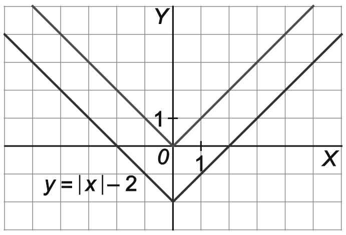
h) $h(x) = 3|x+1|-2$



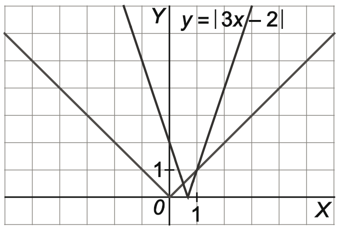
c) $c(x) = 2|x|$



f) $f(x) = |x|-2$



i) $i(x) = |3x-2|$



Funciones definidas por tablas

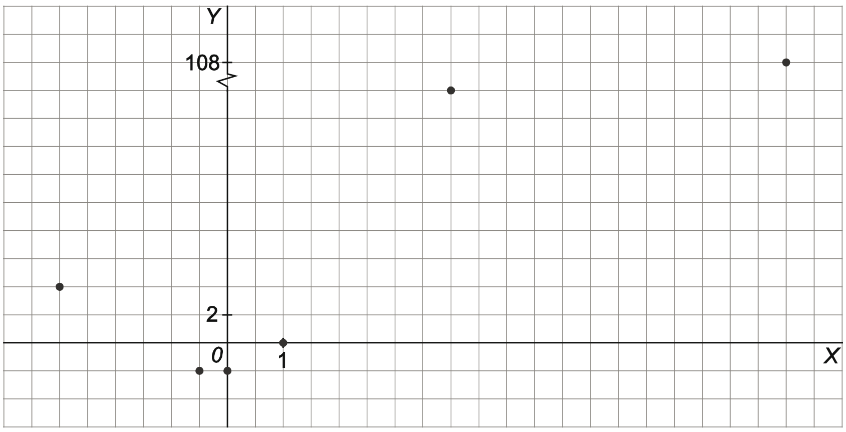
57. Representa gráficamente los datos de la siguiente tabla.

x	–3	–1	0	1	4	10
y	4	–2	–2	0	18	108

¿Qué tipo de curva se ajusta a esos datos? ¿Sabrías encontrar su ecuación?

Se descarta una recta, ya que hay crecimiento y decrecimiento. Así pues, se prueba una parábola.

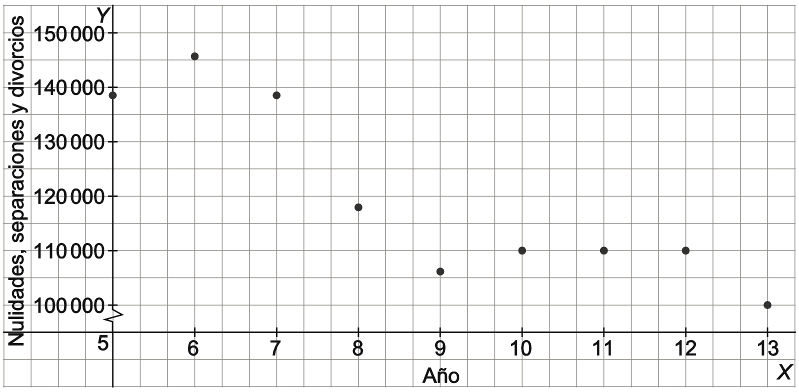
Se eligen los puntos más manejables y se busca la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(-1, -2)$, $B(0, -2)$ y $C(1, 0)$. Dicha parábola es: $f(x) = x^2 + x - 2$.



58. El número de nulidades, separaciones y divorcios en España durante los últimos años se recogen en la siguiente tabla.

2005	137 045
2006	145 919
2007	137 510
2008	118 939
2009	106 166
2010	110 321
2011	110 651
2012	110 764
2013	100 437

Representa gráficamente los datos anteriores, eligiendo escalas convenientes para su mejor comprensión.



59. Se ha medido la temperatura de un líquido según se calentaba.

La siguiente tabla recoge la temperatura del líquido en función del tiempo de calentamiento.

Tiempo (minutos)	Temperatura (ºC)
0	20
1	24
2	28
3	32
4	36
5	40

Si el líquido hierve a los 60ºC, ¿cuánto tiempo tendremos que calentarlo, suponiendo que su comportamiento no varía?

Por cada minuto aumenta 4 ºC; la función es: $T(x) = 20 + 4x$ y por tanto, $60 = 20 + 4x \Rightarrow x = 10$, los 60 ºC los alcanzará a los 10 minutos.

Interpolación lineal

60. A Jorge se le ha roto la calculadora y necesita calcular el seno del ángulo de 27,4º para resolver un problema. Su abuelo le muestra un libro de matemáticas en el que hay una tabla de valores del seno. En ella, Jorge encuentra los dos siguientes datos: $\text{sen } 27^\circ = 0,454$ y $\text{sen } 28^\circ = 0,469$.

Ayuda a Jorge a calcular, por interpolación, una estimación del seno de 27,4º.

Llamando *x* al ángulo en grados, e *y*, al seno de dicho ángulo, la recta interpoladora, $y = ax + b$, es la que pasa por los puntos $A(27; 0{,}454)$ y $B(28;0{,}469)$.

$$\begin{cases} 27a + b = 0{,}454 \\ 28a + b = 0{,}469 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}015 \\ b = 0{,}049 \end{cases}$$

La recta de interpolación es pues, $y = 0{,}015x + 0{,}049$.

Por tanto, $\text{sen}27{,}4^\circ = 0{,}015 \cdot 27{,}4 + 0{,}049 = 0{,}46$

Se puede comprobar que el valor real de sen 27,4º es 0,4602, por lo que el error cometido es mínimo.

61. De una función $f(x)$ se conocen los pares de valores $(1{,}2; 5{,}72)$ y $(4; 11{,}6)$.

Halla la ecuación de la recta de interpolación y el valor que tomará $f(x)$ para $x = 2{,}1$.

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 5{,}72 = 12m + n \\ 11{,}6 = 4m + n \end{cases}$, obteniendo las soluciones $m = 2{,}1$ y $n = 3{,}2$.

La recta de interpolación es, por tanto, $y = 2{,}1x + 3{,}2$.

El valor buscado es $y = 2{,}1 \cdot 2{,}1 + 3{,}2 = 7{,}61$.

62. Sabiendo que $f(x)$ es una función lineal, y conocidos los datos de la siguiente tabla, ¿qué valor toma $f(0)$?¿Y $f(3)$?

x	$f(x)$
1	6
5	4

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 6 = m + n \\ 4 = 5m + n \end{cases}$, obteniendo $m = -\frac{1}{2}$ y $n = \frac{13}{2}$.

La recta interpoladora es, por tanto, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$. $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{13}{2} = \frac{13}{2}$ $\quad f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{13}{2} = 5$

63. Se ha observado que la vida media de una bacteria varía en función de la temperatura del medio en el que vive según la siguiente tabla.

Temperatura (ºC)	6	9	12	15	16
Vida media (min)	104,2	140,4	181,7	220,2	257,6

¿Qué vida media estimas para un cultivo de bacterias en un medio a 10ºC? ¿Y a 13ºC?

Para los 10ºC, se calcula la recta de interpolación que pasa por los puntos (9; 140,4) y (12; 181,7).

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 140{,}4 = 9m + n \\ 181{,}7 = 12m + n \end{cases}$ Se obtiene $m = 13{,}77$ y $n = 16{,}5$.

La recta de interpolación es $y = 13{,}77x + 16{,}5$ y la vida media que se espera en un medio a10ºC es 154,2 min.

Para los 13 ºC, se calcula la recta que pasa por los puntos (12; 181,7) y (15; 220,2).

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 181{,}7 = 12m + n \\ 220{,}2 = 15m + n \end{cases}$ Se obtiene $m = 12{,}83$ y $n = 27{,}7$.

La recta de interpolación es $y = 12{,}83x + 27{,}7$ y la vida media que se espera en un medio a 13ºC es 194,5 min.

Interpolación cuadrática

64. De una función $f(x)$ se conocen los valores $f(1)= 4$, $f(2)= 7$ y $f(4)=31$.

a) Calcula la función cuadrática que toma dichos valores.

b) Calcula el valor de la función de interpolación para $x= 3$.

c) ¿Tiene sentido utilizar la función de interpolación hallada para estimar el valor de la función para $x=0$?

a) Se resuelve el sistema $\begin{cases} a+b+c = 4 \\ 4a+2b+c = 7 \\ 16+4b+c = 31 \end{cases}$, cuyas soluciones son $a= 3$, $b=-6$, $c= 7$; $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$.

b) $f(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 7 = 16$

c) No parece adecuado utilizar la función hallada para estimar el valor de la función en $x= 0$, pues en los tres valores dados en el enunciado la función es creciente, por lo que parece lógico que, siguiendo esa tendencia, $f(0)$ estuviera por debajo de $f(1)= 4$. Sin embargo, usando la función hallada se estima $f(0)= 7$.

65. Cierta empresa ha observado que los ingresos por ventas están estrechamente relacionados con el gasto asignado a publicidad y ha recogido algunos datos de años anteriores en una tabla.

Año	2013	2014	2015
Gasto en publicidad (× 1000 €)	1	3	5
Ingresos (× 1000 €)	4	26	64

a) Observa las variaciones que se producen en los gastos y en los ingresos, y decide qué tipo de interpolación es la más conveniente para reflejar la situación.

b) Calcula, mediante interpolación, qué ingresos se esperan si solo podemos gastar 4 500 €en publicidad.

c) Utiliza la función hallada en el apartado anterior para estimar que gasto en publicidad habría que hacer para ingresar 5000 €.

a) La variación en los gastos de publicidad es lineal, aumenta 2000 € cada año. En cambio, los ingresos no siguen esta ley lineal: primero aumentan 22 000 € y después 38 000 €. Por ello, se debe emplear la interpolación cuadrática.

Si se representan los datos sobre unos ejes se aprecia claramente que no se ajustan a una recta.

Llamando x a los gastos en publicidad en miles de €e y a los ingresos derivados en miles de €, se debe encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(1,4)$, $B(3,26)$ y $C(5,64)$.

Dicha parábola es $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

b) Con 4 500 **€**destinados a publicidad, se estima que se alcanzarán unos ingresos de $f(4{,}5) = 2 \cdot 4{,}5^2 + 3 \cdot 4{,}5 - 1 = 53$, es decir, 53 000 €.

c) Se busca x para que $2x^2 + 3x - 1 = 50$.

Resolviendo la ecuación se obtienen las soluciones $x =-5{,}86$ y $x = 4{,}36$.

Desechando la solución negativa se concluye que el gasto ha de ser de unos 4355 **€**.

66. En un negocio de decoración solo venden alfombras cuya longitud es el doble que su anchura. Los precios, dependiendo del largo, se muestran en esta tabla.

Largo (m)	Precio (€)
1	120
2	124
5	148

a) Calcula por interpolación cuadrática el precio de una alfombra de 3 metros de longitud.

b) Calcula por extrapolación cuadrática el precio de una alfombra de 8 metros de longitud.

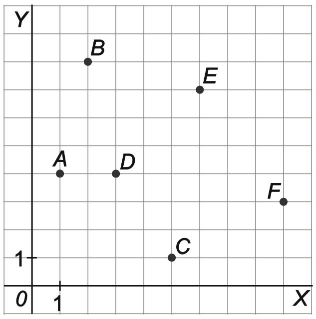
Llamando *x* a los metros del largo, e *y,* al precio en €, debemos encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(1, 120)$, $B(2, 124)$ y $C(5, 148)$. Dicha parábola es $f(x) = x^2 + x + 118$.

a) El precio de una alfombra de 3 m de largo será de $f(3) = 3^2 + 3 + 118 = 130$ €.

b) El precio de una alfombra de 8 m de largo será de $f(8) = 8^2 + 8 + 118 = 190$ €.

67. Calcula dos funciones cuadráticas, una que pase por los puntos *A*, *B* y *C*, y la otra, por *D*, *E* y *F*.

¿En qué punto se cortan ambas funciones?¿Corresponde a un valor interpolado o extrapolado de las parábolas?



Para hallar la función cuadrática que pasa por *A*(1, 4), *B*(2, 8) y *C*(5, 1) hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 25a + 5b + c = 1 \end{cases} \text{ y se obtiene la parábola } y = -\frac{19}{12}x^2 + \frac{35}{4}x - \frac{19}{6}.$$

Para hallar la función cuadrática que pasa por *D*(3, 4), *E*(6, 7) y *F*(9, 3) se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 4 \\ 36a + 6b + c = 7 \\ 81a + 9b + c = 3 \end{cases} \text{ y se obtiene la parábola } y = -\frac{7}{18}x^2 + \frac{9}{2}x - 6.$$

Sus puntos de corte son (–0,57; –8,71) y (4,13; 5,95).

El primero es un valor extrapolado de ambas parábolas, y el segundo es interpolado de ambas.

Aplicaciones de la interpolación

68. Un agricultor ha comprado una hectárea de terreno y quiere plantar almendros. Sabe que si planta almendros en exceso no podrá regarlos convenientemente y la producción será baja. Para decidir cuántos almendros plantar, ha hecho un estudio en los campos vecinos del rendimiento obtenido y ha elaborado la siguiente tabla.

Número de almendros	40	60	90
Kilos de almendras	20 000	24 000	22 500

a) Un amigo le aconsejó que plantara 50 almendros. ¿Cuántos kilos de almendras espera obtener en ese caso?

b) ¿Con cuántos almendros conseguiría la producción máxima?

Como los kilos de almendras crecen primero y después decrecen, es claro que la interpolación lineal no es adecuada. Además, como intervienen áreas, parece conveniente trabajar con la interpolación cuadrática. Llamando *x* al número (en decenas) de almendros, e *y,* a los miles de kilos de almendras producidos, se debe encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(4, 20)$, $B(6, 24)$ y $C(9; 22{,}5)$.

Dicha parábola es $f(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 7x$.

a) Con 50 almendros plantados se espera una producción de $f(5) = -0{,}5 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 = 22{,}5$, es decir, 22 500 kg.

b) Como la parábola está abierta hacia abajo, el máximo se alcanzará en su vértice, que es el punto $V(7; 24{,}5)$.

Es decir, plantando 70 almendros se espera conseguir la máxima producción, que asciende a 24 500 kg de almendras.

69. Las ventas de un determinado producto han variado en función de su precio de acuerdo a los datos de la tabla.

Precio (miles de €)	Unidades vendidas
100	20 000
110	23 000
120	21 500
130	18 500

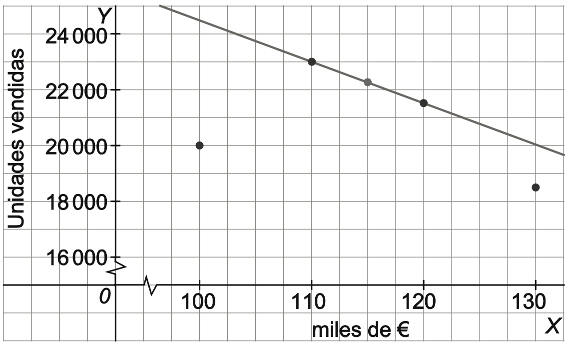
a) Halla la función de interpolación que se ajuste a los datos dados y calcula las ventas esperadas para un precio de 115 000 €.

b) Representa gráficamente los datos y la curva de interpolación en esa zona de valores.

a) Para hacer la interpolación se usarán los datos más próximos a 115 000 €, (110, 23000) y (120, 21500). La función de interpolación lineal es $f(x) = -150x + 39\,500$.

Las ventas esperadas para un precio de 115 000 € son $f(115) = -150 \cdot 115 + 39500 = 22\,250$ artículos.

b)



70. Una oruga está atacando a un bosque de pinos y los forestales están anotando el número de árboles afectados en función de los días transcurridos desde la irrupción de la plaga:

Días desde el comienzo de la plaga	2	4	6
Número de pinos infectados	10	14	22

a) Empleando técnicas de extrapolación lineal basándose en los datos de los días 4.º y 6.º, ¿cuál será la estimación de pinos infectados al cabo de nueve días?

b) Empleando técnicas de extrapolación cuadrática, ¿cuál será la estimación de pinos infectados tras nueve días?

c) Los forestales han estimado que si se infectan 430 ejemplares, habrá que comenzar a talar el bosque para que no se expanda la oruga. Si no se controla la plaga, ¿cuándo habrá que comenzar la indeseada tala, si trabajamos con la extrapolación cuadrática?

a) La función de interpolación para los datos (4, 14) y (6, 22) es $f(x) = 4x - 2$ así que al cabo de 9 días el número de pinos infectados será $f(9) = 4 \cdot 9 - 2 = 34$.

b) La función de interpolación cuadrática para los tres datos es: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 10$ y el número estimo de pinos infectados a los 9 días sería $g(9) = \frac{1}{2} \cdot 9^2 - 9 + 10 = 41{,}5$, es decir, estaría entre 41 y 42.

c) Resolvemos $\frac{1}{2}x^2 - x + 10 = 430$ cuyas soluciones son $x = -28$ y $x = 30$. Desechamos la solución negativa y concluimos que habrá que comenzar a talar a los 30 días de comenzada la plaga.

CUESTIONES

71. Determina si las expresiones $f(x)=x-1$ y $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ corresponden a la misma función.

Como $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}$, $f(x)$ y $g(x)$ coinciden en todos sus puntos excepto en $x=2$, donde $f(2)=1$ y la función $g(x)$ no está definida, ya que $D(f)=\mathbb{R}$ y $D(g)=\mathbb{R}-\{2\}$. Luego no es la misma función.

72. ¿Puede haber funciones cuya gráfica sea simétrica respecto del eje de abscisas?

No, pues eso significaría que todos los valores del dominio tendrían más de una imagen.

73. ¿Qué tipo de gráfica tiene una función con dominio todos los números reales y recorrido un único número real?

Si la función *f* verifica que $D(f)=\mathbb{R}$ y $R(f)=\{a\}$, su gráfica es la recta $y=a$.

74. ¿Una función que incluya un valor absoluto con la variable en su interior, ¿se puede escribir siempre como una función definida a trozos?

No, pues puede ocurrir que las expresiones dentro del valor absoluto no cambien de signo con lo que no tiene sentido definirla a trozos. Por ejemplo: $f(x)=|x^2+1|=x^2+1$

75. La gráfica de la función $f(x)=|g(x)|+|h(x)|$, siendo *g* y *h* polinomios de primer grado, ¿está formada por segmentos de recta?

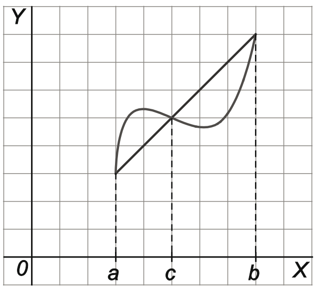
Sí, pues si $g(x)$ cambia de signo en a y $h(x)$ lo hace en b con, por ejemplo, $\begin{cases} g(x)>0 & \text{si} \quad x<a \\ g(x)<0 & \text{si} \quad x>a \end{cases}$, $\begin{cases} h(x)>0 & \text{si} \quad x<b \\ h(x)<0 & \text{si} \quad x>b \end{cases}$ con $a<b$, la función $f(x)=|g(x)|+|h(x)|$ sería: $\begin{cases} g(x)+h(x) & \text{si } x\le a \\ -g(x)+h(x) & \text{si } a<x\le b \\ -g(x)-h(x) & \text{si } x>bx \end{cases}$

que, al ser *g* y *h* polinomios de primer grado, verificaría que su gráfica estaría formada por segmentos de rectas.

76. Razona si es verdadera o inexacta la siguiente afirmación:

"Si *f* es una función definida en el intervalo [*a*, *b*] y *c* es un número de ese intervalo, el valor de *f*(*c*) obtenido por interpolación lineal entre *a* y *b* coincide con el verdadero valor de *f*(*c*) sólo si la gráfica de *f* es rectilínea en ese intervalo".

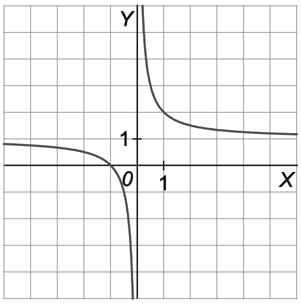
La afirmación es falsa, pues la gráfica de *f* puede cortar al segmento de extremos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ en el punto $(c,f(c))$ como muestra la figura.



77. ¿Qué grado debería tener un polinomio de interpolación si queremos que pase exactamente por cinco puntos que correspondan a datos experimentales?

El grado de dicho polinomio $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ debería ser menor o igual que 4 pues sus coeficientes a, b, c, d, e serían las incógnitas de un sistema lineal con cinco ecuaciones. Si $a=0$, el grado sería menor que 4.

78. La gráfica de la figura representa una función que es cociente de dos polinomios P y Q, esto es, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. ¿Qué se puede decir sobre las raíces del polinomio Q?



La única raíz de $Q(x)$ es $x = 0$, pues $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

79. ¿Tiene inversa la función $f(x) = x^3 - x$?

$f(x)$ no tiene inversa, pues como $f(-1) = f(1) = 0$, f^{-1} debería tener dos imágenes en $x = 0$, es decir $f^{-1}(0) = -1$ y a la vez $f^{-1}(0) = 1$.

80. Si las gráficas de las funciones f y g, ambas con dominio todos los números reales, coinciden para todos los valores del intervalo [0, 4] pero luego no coinciden, ¿pueden ser ambas funciones polinómicas?

La función $f - g$ es idénticamente nula en [0, 4], luego ambas no pueden ser polinómicas, pues si lo fueran el polinomio $f - g$ tendría infinitas raíces.

PROBLEMAS

81. Las funciones de oferta y demanda de un tipo de ordenador portátil vienen dadas, respectivamente, por $q(p) = 0{,}50p - 30$ y $r(p) = 600 - 0{,}25p$; p en €.

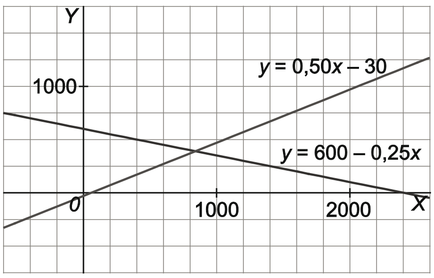
a) ¿Cuáles son las cantidades ofertadas y demandadas si el precio es de 500, 700 o 900 €?

b) Represéntalas y halla el precio de equilibrio (aquel en el que el valor de ambas funciones coincide).

a) Oferta: $q(500) = 220$; $q(700) = 320$; $q(900) = 420$. Demanda: $r(500)=475$; $r(700)=425$; $r(900)=493{,}75$

b) El precio de equilibrio, p, que vendrá dado por la solución de la ecuación $q(p) = r(p)$, es decir:

$0{,}50p - 30 = 600 - 0{,}25p$ da como solución $p = 840$ €.



82. El franqueo de las cartas varía según su peso, como se indica en la tabla:

Peso (g)	Precio (€)
Hasta 20	0,38
Hasta 50	0,54
Hasta 100	0,92
Hasta 500	2,03
Hasta 1000	4,58
Hasta 2000	5,19

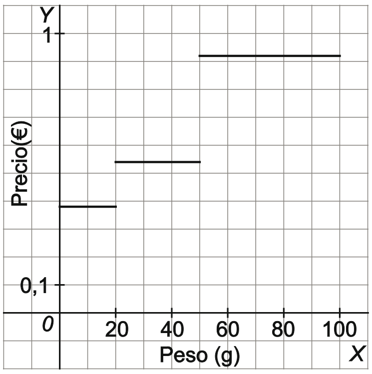
a) ¿Cuánto costaría franquear una carta de 145g?

b) Representa la gráfica de la función que nos indica el precio del franqueo según el peso de la carta. Elige adecuadamente la escala de los ejes para que se refleje toda la información.

c) ¿Es continua dicha función? ¿De qué tipo es?

a) Como 145 g se encuentra entre 100 y 500 gramos, costaría 2,03€.

b)

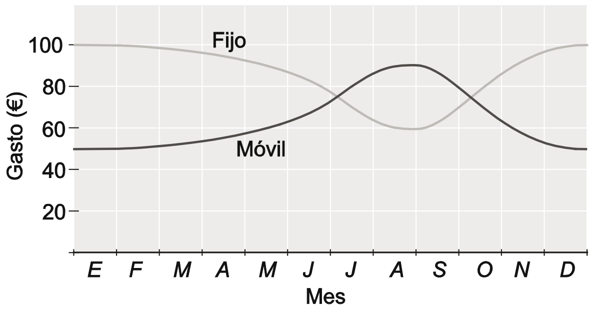


c) En la gráfica se observa que la función no es continua.Es una función escalonada, definida a trozos.

83. Esteban tiene dos teléfonos, uno fijo y uno móvil. Las curvas de la figura representan el gasto mensual en euros de cada uno de los dos teléfonos.

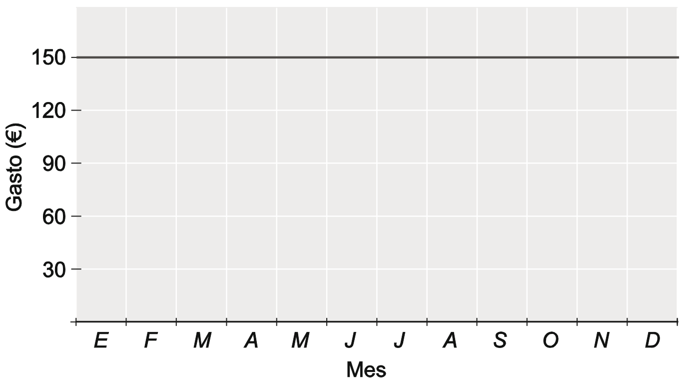
a) Explica en qué meses es más elevado el gasto en el teléfono móvil que en el fijo. ¿Por qué es así?

b) Dibuja la gráfica del gasto total mensual en teléfono de Esteban.



a) El gasto en el teléfono móvil es mayor que en el fijo en los meses de julio, agosto y septiembre, es decir, durante el verano. Resulta bastante razonable, pues es cuando más tiempo se pasa fuera de casa.

b)



84. Una empresa produce ratones inalámbricos para ordenadores de sobremesa y portátiles. Atendiendo a los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, al salario de sus trabajadores y a otros factores, se ha llegado a la conclusión de que producir ratones tiene un coste total, en euros, de $C(p) = 10p + 100\,000$.

a) Encuentra la expresión de la función C_m que nos da el precio unitario medio de un ratón al fabricar p unidades.

b) Calcula $C_m(10)$ y $C_m(1000)$. ¿A qué es debido que haya tanta diferencia entre un coste y otro?

a) $C_m(p) = \dfrac{C(p)}{p} = \dfrac{10p + 100000}{p} = 10 + \dfrac{100000}{p}$

b) $C_m(10) = 10010$; $C_m(1000) = 20$.

La diferencia está en los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, salario de los trabajadores, etc., que son fijos, independientemente del número de ratones producidos, y que serían un auténtico derroche si se produjeran sólo 10 ordenadores.

85. Se designa por x la temperatura expresada en grados Fahrenheit y por $f(x)$ la misma temperatura expresada en grados Celsius. Sabiendo que f es una función lineal de x y que $f(40) = \dfrac{40}{9}$ y $f(50) = 10$, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la temperatura Celsius correspondiente a 35 grados Fahrenheit?

b) ¿A qué temperatura expresada en grados Fahrenheit hierve el agua?

c) ¿A qué temperatura expresada en grados Fahrenheit se congela el agua?

a) Como f es una función lineal será de la forma $f(x) = ax + b$, por lo que:

$40a + b = \dfrac{40}{9}$ y $50a + b = 10$. Restando ambas ecuaciones se obtiene $10a = \dfrac{50}{9}$, $a = \dfrac{5}{9}$, $b = -\dfrac{160}{9}$.

Así pues, $f(x) = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$. Si $x = 35$, $f(x) = \dfrac{5}{9}35 - \dfrac{160}{9} = 1{,}7$ºC

b) Si $f(x) = 100$ºC, se tiene $100 = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$, $x = 212$ºF.

c) Si $f(x) = 0$ºC, resulta $0 = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$, $x = 32$ºF.

86. En una gran reserva natural hay una población de antílopes pertenecientes a una especie en peligro de extinción. Se piensa que el número de estos animales durante el período 2000– 2015 ha evolucionado aproximadamente según la siguiente función $f(x) = -2300x + 54\,000$, donde x representa el tiempo en años, de forma que $x = 0$ corresponde a 2000, y $f(x)$ denota el número de antílopes a final de año.

a) Calcula el número de antílopes en 2005.

b) ¿Cuántos antílopes mueren cada año?

c) Si la población continúa evolucionando de este modo, ¿en qué año se extinguirá?

a) $f(5) = -2300 \cdot 5 + 54\,000 = 42\,500$ antílopes.

b) El números de antílopes que mueren cada año es $f(x) - f(x+1)$, es decir:

$[-2300x + 54000] - [-2300(x+1) + 54000] = 2300$ antílopes.

c) A ese ritmo la población se extinguiría cuando $f(x) = 0$, es decir $x = \dfrac{54000}{2300} = 23{,}4$ años, o sea, por el año 2023.

87. Un parque natural ha tenido durante el verano pasado más visitantes de los esperados, por lo que el servicio de limpieza ordinario no ha podido retirar toda la suciedad que la masiva afluencia de público ha generado. Llegado el otoño, los encargados del parque se plantean hacer una inversión extraordinaria para eliminar la suciedad acumulada. El coste de eliminar el *p* % de esos restos expresado en miles de € es:

$$C(p) = \frac{16p}{110 - p}$$

a) Sin hacer ningún cálculo, indica si esta función es creciente o decreciente.

b) Calcula cuánto costaría no eliminar ningún residuo, eliminar el 50% de los residuos y eliminarlos todos.

c) ¿Para qué puntos del dominio de *C* interesa en la práctica estudiar esta función? ¿Qué valores toma *C* en esa parte de su dominio?

d) Dibuja la gráfica de la función *C*.

e) ¿Qué proporción de la suciedad acumulada se podrá retirar si se aprueba una partida presupuestaria especial de 100 000 € destinada a tal fin?

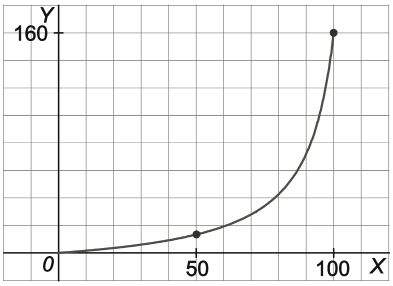
a) La función es naturalmente creciente, ya que cuántos más restos queramos eliminar más nos costarán. Sip aumenta, el numerador es más grande y el denominador más pequeño, por lo que la función crece.

b) Si $p = 0$, $C(0) = 0$. Si $p = 50$, $C(p) = \frac{16 \cdot 50}{60} = 13{,}3$ mil €.

Si $p = 100$, $C(p) = \frac{16 \cdot 100}{10} = 160$ mil €.

c) Los valores p que interesan son los del intervalo [0, 100], donde C toma valores entre 0 y 160 mil €.

d)



d) Si $C(p) = 100$, entonces $100 = \frac{16p}{110 - p}$, $11000 = 116p$, $p = \frac{11000}{116} \simeq 95\ \%$.

88. El coste de la energía eléctrica se obtiene mediante una cantidad fija sumada a una variable proporcional a la cantidad de energía consumida. En dos meses distintos, Blanca ha pagado 71,40 € por 340 kWh, y 62,28 €,por 283 kWh.

- **En marzo pagó 71,40 € por 340 kW consumidos.**
- **En abril la factura fue de 62,28 €por 283 kWh.**

a) ¿Cuál es la cantidad fija que paga Blanca independientemente de su consumo mensual?

b) ¿Cuál es el importe de la factura en mayo si el consumo fue un 25 % más alto que el de abril?

a) Llamando b a la cantidad fija y a al precio del kWh,la función de coste, en euros, es $C(x) = ax + b$ donde x representa el gasto mensual en kWh.

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 71{,}40 = a \cdot 340 + b \\ 62{,}28 = a \cdot 283 + b \end{array}\right\}$, y se obtiene que $a = \frac{9{,}12}{57} = 0{,}16$ y $b = 17$.

Por tanto Blanca paga una cantidad fija de 17 €.

b) El consumo en mayo será de $283 + 25\%$ de $283 = 353{,}75$ kWh.

La función coste $C(x) = 0{,}16x + 17$ evaluada con ese consumo es de $C(353{,}75) = 0{,}16 \cdot 353{,}75 + 17 = 73{,}6$ Por tanto, en mayo, el importe es de 73,6 €.

89. Un estudio de residuos urbanos recogidos en España ofrece los siguientes datos.

Años	Residuos urbanos (kg per cápita)
1995	510
1997	561
1999	615
2001	658

a) Estima cuántos kilogramos per cápita de residuos se recogieron en 1998 en España.

b) Estima cuántos kilogramos per cápita de residuos se recogieron en 2004 en España.

c) Estudios posteriores revelaron que en 2004 se recogieron 662 kilogramos de residuos per cápita en España. ¿Se ajusta el dato real al obtenido en la estimación anterior? ¿A qué crees que es debido?

a) A la vista de la tabla, las diferencias de residuos son proporcionales a las diferencias de años, es razonable pensar en obtener el resultado por interpolación lineal, por lo que si en 1997 fueron 561 kg y en 1999 fueron 615 kg, en 1998 serán aproximadamente $561+\frac{615-561}{2}=588$ kg.

b) Por extrapolación lineal, la ecuación de la recta, tomando como datos los años más próximos a 2004, a saber, 1999 y 2001 sería $y=mx+n$, con lo que tomando año cero a 1999 y año 2 a 2001, tendríamos el sistema $\begin{cases}615=n\\658=2m+n\end{cases}$, cuyas soluciones son $n=615$ y $m=21{,}5$,

con lo que al 2004, año 5, le corresponderían $21{,}5\cdot 5+615=722{,}5$ kg.

c) El dato real es muy inferior a la estimación anterior, la razón estaba en que los ciudadanos han entendido que se pueden reciclar mucho material desechable.

90. La DGT ha hecho un estudio sobre la distancia media que recorre un vehículo al detenerse en función de su velocidad.

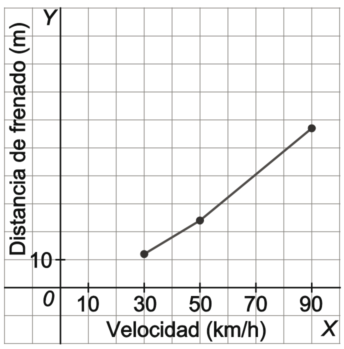
Velocidad (km/h)	Distancia de frenado (m)
30	12
50	24
90	57,6

a) Representa estos datos y decide qué tipo de interpolación es la adecuada para este problema.

b) Estima la distancia de frenado para un vehículo que circula a 80 kilómetros por hora.

c) Calcula la distancia de frenado para un coche que lleva una velocidad de 150 km/h.

a) A la vista de la gráfica, se observa que la interpolación cuadrática es la adecuada.



b) Podemos construir la parábola $y=ax^2+bx+c$ con los datos (30, 12), (50, 24) y (90, 57,6) mediante el sistema: $\begin{cases}12=900a+30b+c\\24=2500a+50b+c\\57{,}6=8100a+90b+c\end{cases}$

Resolviendo se obtiene $a=0{,}004$, $b=0{,}28$, $c=0$. Por tanto, la parábola en cuestión es $y=0{,}004x^2+0{,}28x$.

Si $x=80$, $y=0{,}004\cdot 6400+0{,}28\cdot 80=48$ m.

c) Si la velocidad es de 150 km/hora, la distancia de frenado será: $y=0{,}004\cdot 22\,500+0{,}28\cdot 150=132$ m.

91. Furbi, una cría de chimpancé, gana peso semana tras semana según muestra la siguiente tabla.

Tiempo	Peso (kg)
Nacimiento	1,5
Semana 1	2,1
Semana 2	2,5
Semana 3	
Semana 4	3,3

Por un fallo de la báscula, su peso en la tercera semana no pudo determinarse. Calcúlalo por interpolación lineal.

$\left.\begin{array}{l}\text{semana 2: } 2{,}5 \text{ kg}\\ \text{semana 4: } 3{,}3 \text{ kg}\end{array}\right\}$, así que en la semana 3 pesaría aproximadamente $2{,}5+\frac{3{,}3-2{,}5}{2}=2{,}9$ kg.

92. La tabla siguiente muestra las temperaturas tomadas cada cuatro horas en una ciudad a lo largo de un día.

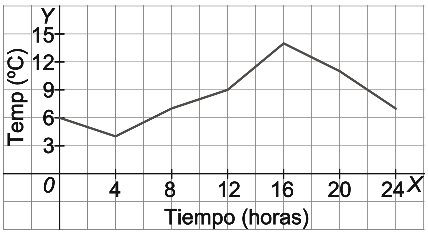
a) Representa los datos gráficamente.

b) Une los puntos obtenidos con segmentos y estima gráfica y analíticamente la temperatura a las 2 y a las 15 horas.

c) Señala los momentos del día en que la temperatura fue de 13 ºC aproximadamente.

Tiempo (horas)	Temperatura (ºC)
0	6
4	4
8	7
12	9
16	14
20	11
24	7

a)



b) Gráficamente:

2 horas → 5ºC

15 horas → 13ºC

Analíticamente (Interpolación lineal):

2 horas: $4+\frac{6-4}{2}=5$ºC

15horas: $\frac{T-9}{15-12}=\frac{14-9}{16-12}, T=9+\frac{15}{4}=12{,}75$ºC

c) A la vista de la gráfica, habría 13 ºC aproximadamente a las 17:30 y a las 15 horas.

93. Los aparcamientos públicos de cierta ciudad se rigen según una tarifa que explican en esta tabla.

Tiempo de estancia	Tarifa
De 0 a 30 minutos	0,0412 €/min
De 31 a 90 minutos	0,0370 €/min
De 91 a 660 minutos	0,0494 €/min
De 661 minutos hasta un máximo de 24 horas	31,6 €

a) ¿Cuánto habrá que pagar por una estancia de dos horas? Recuerda que se redondea siempre en el último cálculo.

b) ¿Cuánto habrá que pagar por una estancia de una hora?

c) Escribe la expresión analítica de la función que relaciona el precio con el tiempo de estacionamiento.

d) Con ayuda de algún programa informático, dibuja la gráfica correspondiente (de 0 hasta 800 minutos).

a) $120 \cdot 0{,}0494 = 5{,}928 \simeq 5{,}93$ **€**.

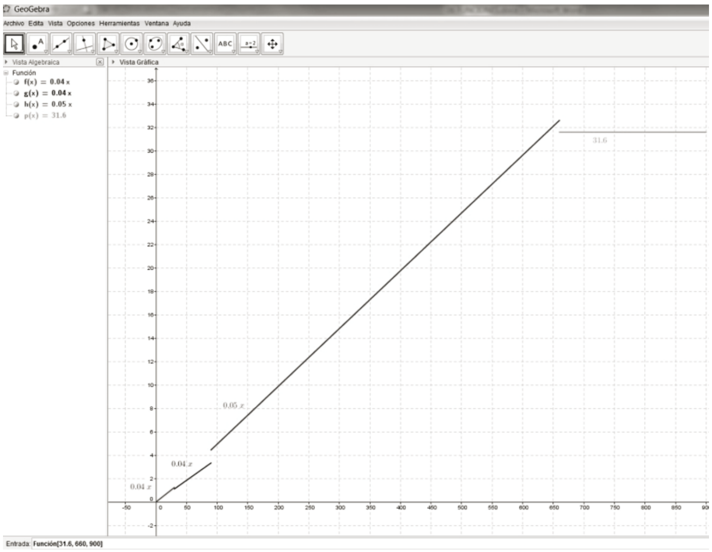
b) $60 \cdot 0{,}0370 = 2{,}22$ **€**.

c) Si x viene dado en minutos y $f(x)$ en €:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}0412x & \text{si} \quad 0 < x \le 30 \\ 0{,}0370x & \text{si} \quad 30 < x \le 90 \\ 0{,}0494x & \text{si} \quad 90 < x \le 660 \\ 31{,}6 & \text{si} \quad 660 < x \le 1440 \end{cases}$$

donde x viene dado en minutos y $f(x)$ en euros**.**

d) La gráfica siguiente está hecha con el programa GeoGebra:



94. La entrenadora de un delfinario ha tomado algunos datos sobre los saltos que realiza el delfín Flipper.

Tiempo (décimas de segundo)	Altura (m)
0	0
4	4
8	7
12	9
16	14
20	11
24	7

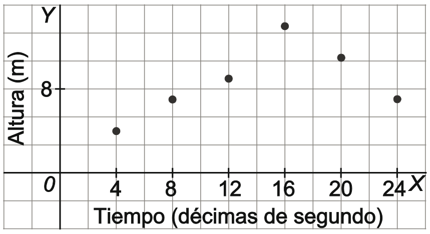
a) Razona qué tipo de interpolación usarías para calcular la altura que alcanza el delfín en determinados instantes.

b) Estima la altura que alcanza Flipper a los 1,5 segundos de iniciar su salto.

c) ¿Cuándo crees que consigue su altura máxima?

d) ¿Cuándo cae al agua?

a) Si representamos los datos gráficamente resulta una gráfica como la de la figura que sugiere que la interpolación cuadrática es la aconsejable.



b) Tomando como datos (4, 4), (16, 14) y (24, 7) la parábola

$y=ax^2+bx+c$ que pasa por esos puntos se calcula resolviendo el sistema $\begin{cases} 16a+4b+c=4 \\ 256a+16b+c=14 \\ 576a+24b+c=7 \end{cases}$.

$a=-\dfrac{41}{480},\ b=\dfrac{61}{24},\ c=-\dfrac{72}{15}$, por lo que $y=-\dfrac{41}{480}x^2+\dfrac{61}{24}x-\dfrac{72}{15}$

Si $x=15$, la altura alcanzada es $y=-\dfrac{41}{480}\cdot 15^2+\dfrac{61}{24}\cdot 15-\dfrac{72}{15}=14{,}1$ m.

c) La altura máxima alcanzada sería la ordenada del vértice de la parábola anterior, cuya abscisa sería $x=\dfrac{33}{2}=16{,}5$ por lo que la ordenada es 14,06 m.

d) Siguiendo con la parábola anterior, el delfín cae al agua aproximadamente en el mayor valor de x solución de la ecuación $-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{33}{2}x-54=0$, es decir $x=2{,}9$ segundos.

95. Una empresa se dedica a la fabricación de tapas metálicas para depósitos, cuyo coste depende, obviamente, del diámetro de la tapa. En la tabla de precios aparecen estos ejemplos:

Diámetro (cm)	115	155	205
Precio de la tapa (€)	46,80	66,70	102,5

Utilizando la interpolación cuadrática, contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué precio tendrá una tapa de 170 cm de diámetro?

b) ¿Y de tres metros de diámetro?

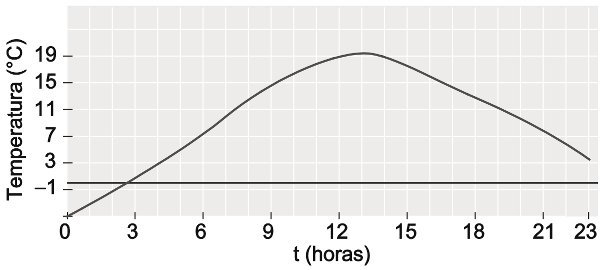
a) La parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos (115; 46,8), (155; 66,7) y (205; 102,5) tiene por coeficientes la solución del sistema: $\begin{cases} 13\,225a + 115b + c = 46{,}8 \\ 24\,025a + 155b + c = 66{,}7 \\ 42\,025a + 205b + c = 102{,}5 \end{cases}$ que es $\begin{matrix} a = 0{,}001\,86 \\ b = -0{,}0047 \\ c = 21{,}661 \end{matrix}$,

con lo que si x= 170 cm de diámetro, el precio de la tapa sería

y= 0,00186 · 170^2– 0,0047 · 170 + 21,661 = 74,616= 74,62€.

b) Si x = 300 cm, el precio de la tapa será: y = 0,00186 · 300^2– 0,0047 · 300 + 21,661 = 187,651 ≃ 187,65 €.

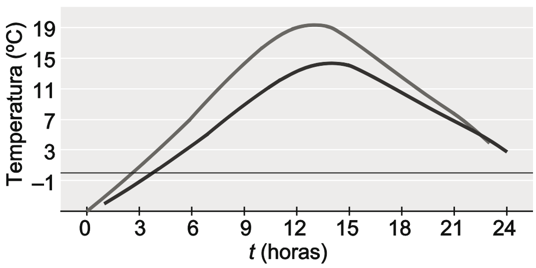
96. La gráfica representa la temperatura en el exterior de una nave industrial a lo largo de un día. Se ha observado que, debido al aislamiento, las temperaturas exteriores se suavizan en un 25 %, y las variaciones de la temperatura en el exterior son percibidas en el interior una hora después. Representa la gráfica de las temperaturas en el interior de la nave.



Que las temperaturas se suavicen un 25 % significa que la curva se contrae verticalmente al 75 %, es decir, que para una misma abscisa, la ordenada es el 75 % de la ordenada de la temperatura exterior.

Que las temperaturas se perciban una hora después significa que la gráfica se desplaza una unidad a la derecha, es decir, que la misma ordenada (temperatura) tiene la abscisa incrementada en una unidad.

La gráfica, por tanto, es la siguiente:



97. Las funciones "parte entera" y "parte decimal".

Como seguramente sabes, cualquier número real está entre dos enteros consecutivos; así, por ejemplo,

$1 \le 1{,}8 < 2$; $4 \le 4 < 5$; $-4 \le -\pi < -3$; ...

Si el número real x verifica $n \le x < n + 1$, siendo n un entero, se dice que n es la parte entera de x y se denota por $E(x) = n$.

a) Completa la siguiente tabla:

x	–3,4	–0,7	–0,5	0	0,3	0,9	1	1,3	$\sqrt{2}$	1,7	2,3	2,9
$E(x)$												

b) Representa gráficamente los puntos obtenidos en la tabla anterior.

c) ¿Cuáles son todos los números x tales que $E(x) = 3$? ¿Y $E(x) = -1$?

d) Representa gráficamente la función $E(x)$ en el intervalo $[-4, 3]$.

La función $D(x) = x - E(x)$ se llama parte decimal.

e) Calcula las imágenes por D de los números 1,7; 5 y –2,4.

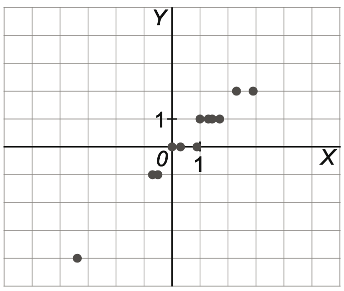
f) Escribe cinco números reales x tales que $D(x) = 0{,}4$.

g) Representa gráficamente la función $D(x)$ en el intervalo $[-4, 3]$.

a)

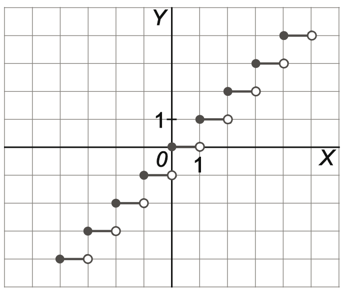
x	–3,4	–0,7	–0,5	0	0,3	0´9	1	1,3	$\sqrt{2}$	1,7	2,3	2,9
$E(x)$	–4	–1	–1	0	0	0	1	1	1	1	2	2

b)



c) Si $E(x) = 3$, entonces $3 \le x < 4$. Si $E(x) = -1$, entonces $-1 \le x < 0$.

d)



e) $D(1{,}7) = 1{,}7 - E(1{,}7) = 1{,}7 - 1 = 0{,}7$. $D(5) = 5 - E(5) = 5 - 5 = 0$. $D(-2{,}4) = -2{,}4 - E(-2{,}4) = -2{,}4 - (-3) = 0{,}6$.

f) 0,4, 1,4, –0,6, –3,6, –5,6.

g) Si $-4 \le x < -3$, $D(x) = x - (-4) = x + 4$

Si $-3 \le x < -2$, $D(x) = x - (-3) = x + 3$

Si $-2 \le x < -1$, $D(x) = x - (-2) = x + 2$

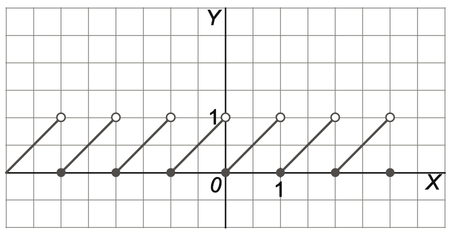
Si $-1 \le x < 0$, $D(x) = x - (-1) = x + 1$

Si $0 \le x < 1$, $D(x) = x$

Si $1 \le x < 2$, $D(x) = x - 1$

Si $2 \le x < 3$, $D(x) = x - 2$

Si $x = 3$, $D(x) = 3 - 3 = 0$



ENTORNO MATEMÁTICO

El “ratón inteligente”

Alicia es una emprendedora. Cuando terminó sus estudios de informática y marketing decidió montar un negocio que estuviera “a la última” y que fuera muy atractivo para los consumidores. Así surgió “El ratón inteligente”, una tienda de ordenadores y dispositivos móviles que incluye un rincón en dónde los clientes pueden probar los últimos productos del mercado mientras charlan tomando un refresco o un café.

Aunque el negocio va bien, la venta de portátiles está bajando y Alicia decide estudiar una nueva oferta que haga que las ventas se recuperen. El jueves a las siete de la tarde no había clientes y, ni corta ni perezosa, echa el cierre, pone el cartel de “Cerrado por trance intelectual de la dueña” y se pone a leer informes y reflexionar: “Ahora compro los portátiles a 500 € la unidad y los vendo a 800 €. Así, estoy vendiendo 40 unidades al mes. Los estudios de mercado que he leído parecen indicar que por cada 25€ que baje el precio del ordenador, las ventas podrían aumentar en 5 unidades“. Tras dos horas de leer papeles y reflexionar, Alicia se acomoda en el sillón y cierra losojos: “no tengo claro qué hacer”.
Mientras Alicia se recupera, vamos a intentar solucionar su problema. Para ello:

a) Escribe la función de ganancia mensual que tendrá Alicia en función del precio de venta de cada portátil.
(AYUDA: llama *x* al número de veces que disminuye 25 € el precio de venta)

b) Calcula el precio ideal de venta para maximizar la ganancia y el precio para el que la ganancia no cambiaría respecto de la actual.

a) El precio de venta de cada portátil es $V = 800 - 25x$.
El precio de compra de cada portátil es $C = 500$.
El número de unidades vendidas es $N = 40 + 5x$.
Por tanto la función *f*(*x*)que expresa la ganancia mensual *G* será $f(x) = N(V - C)$ por lo que:

$$f(x) = (40 + 5x)\left[(800 - 25x) - 500\right] = -125x^2 + 500x + 12000$$

b) En la siguiente tabla se observa que el precio ideal de venta es de $V = 750$ €, pues es donde la ganancia es máxima: $G = 12\,500$ €; y que para un precio de venta de $V = 700$ €, la ganancia es la misma que la actual de $G = 120\,00$€.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C	500	500	500	500	500	500	500	500	500
V	800	775	750	725	700	675	650	625	600
N	40	45	50	55	60	65	70	75	80
G	12 000	12 375	12 500	12 375	12 000	11 375	10 500	9375	8000

El cerrajero

Los padres de Mario se han ido unos días fuera y, aunque su madre no las tenía todas consigo "tiene 16 años pero a veces actúa como si tuviera 10" su padre le apoyó y, al final, le han dejado solo en la casa. El viernes, Mario quedó con los colegas del instituto para jugar un partido por la tarde. Cuando llega a casa a eso de las 8, muerto de hambre y deseando darse una buena ducha se da de bruces con la cruda realidad: "¡He olvidado las llaves dentro de casa!" Tras unos minutos de pánico, se tranquiliza e intenta recordar si alguien tiene llaves, baja al portal y allí se encuentra con la solución a su grave problema: dos anuncios de cerrajeros que decían así:

Abroya

25 € por reparación más 16 por cada cuarto de hora de trabajo.

Rapidez y garantía.

Cobropoco

31 € por reparación más 14 por cada cuarto de hora de trabajo.

Eficacia y sorpresa garantizada.

Al leer los anuncios, Mario vuelve a entrar en fase pánico: las matemáticas nunca han sido lo suyo. Se sienta en el suelo y empieza a pensar qué oferta será mejor.

¿Puedes ayudar a Mario y hacer un estudio que decida con claridad a partir de cuántos minutos de trabajo es más económico uno u otro cerrajero?

a) Escribe la función que da el precio de cada cerrajero en función de los minutos de trabajo.

b) Calcula el tiempo en minutos para el que el precio de ambos cerrajeros es el mismo.

c) Si el trabajo dura media hora, ¿cuál es la opción más económica? ¿Y si fuera necesaria una hora?

a) El precio por minuto de la empresa *Abroya* es $f(x) = 25 + \frac{16}{15}x$, siendo x el número de minutos, y el de la empresa *Cobropoco* es $g(x) = 31 + \frac{14}{15}x$.

b) El precio de ambos cerrajeros será el mismo para aquel valor de x que verifique que $f(x) = g(x)$, es decir: $25 + \frac{16}{15}x = 31 + \frac{14}{15}x$, cuya solución es $x = 45$, por tanto, el precio coincidirá a los tres cuartos de hora.

c) $f(30) = 25 + \frac{16}{15}30 = 57$, $g(30) = 31 + \frac{14}{15}30 = 59$, por lo que la opción más económica, si el trabajo dura media hora, es la de la empresa *Abroya* que cobraría 57€.

$f(60) = 25 + \frac{16}{15}60 = 89$, $g(60) = 31 + \frac{14}{15}60 = 87$, por lo que la opción más económica, si el trabajo dura una hora, es la de la empresa *Cobropoco* que cobraría 87€.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Si la función $y = f(x)$ está definida solamente en el intervalo $[0, 4]$ y la función $y = g(x)$ está definida solamente en el intervalo $[1, 7]$, ¿para qué números reales puedes asegurar que existe $f(x) + g(x)$?

Deben existir $f(x)$ y $g(x)$ en los mismos valores, así que $x \in [0, 4] \cap [1, 7] = [1, 4]$.

2. Dadas las funciones $f(x) = 5x^2 - 3x$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ halla la expresión y el dominio de $f \circ g$, $g \circ f$ y $\frac{g}{f}$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-1}\right) = 5(x-1) - 3\sqrt{x-1}$.

$D(f \circ g) = [1, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x^2 - 3x) = \sqrt{5x^2 - 3x - 1}$.

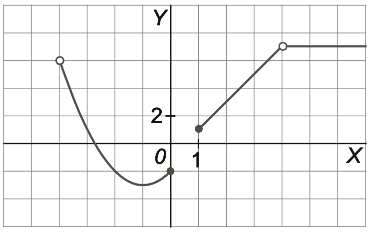
Como $D(f) = \mathbb{R}$, x estará en $D(g \circ f)$ si $5x^2 - 3x - 1 \geq 0$, por lo que

$$D(g \circ f) = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{3-\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)x = \frac{\sqrt{x-1}}{5x^2 - 3x}.$$

$$D\left(\frac{g}{f}\right) = [1, \infty) - \left\{0, \frac{3}{5}\right\} = [1, \infty).$$

3. Observa la siguiente gráfica y determina el dominio y el recorrido de la función representada:



$D(f) = (-4, 0] \cup [1, 4) \cup (4 + \infty)$ $R(x) = [-3;\ 7]$

4. Escribe como una función definida a trozos $f(x) = |x^2 - 1|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

5. Calcula la función inversa de $f(x)=\dfrac{x+5}{x-1}$.

$y=\dfrac{x+5}{x-1}$; se despeja x: $x=\dfrac{5+y}{y-1}$, así que $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{x-1}$.

6. A partir de $f(x)=x^2-4x+1$, halla la expresión de las funciones cuya gráfica, respecto de la de *f*:

a) Está desplazada dos unidades hacia arriba.

b) Está desplazada tres unidades hacia la izquierda.

c) Se ha dilatado verticalmente en un factor 2.

d) Se ha comprimido horizontalmente en un factor 2.

a) $g(x)=f(x)+2=x^2-4x+3$

b) $g(x)=f(x+3)=(x+3)^2-4(x+3)+1=x^2+2x-2$

c) $g(x)=2f(x)=2x^2-8x+2$

d) $g(x)=f(2x)=4x^2-8x+1$

7. Utilizando la interpolación lineal, obtén aproximadamente $\sqrt{29}$ sin utilizar la calculadora.

Tomando como datos $\sqrt{25}=5$ y $\sqrt{36}=6$, $\sqrt{29}=5+h$ siendo $\dfrac{h}{29-25}=\dfrac{6-5}{36-25}$, es decir $h=\dfrac{4}{11}$,

por lo que $\sqrt{29}\simeq 5+\dfrac{4}{11}=\dfrac{59}{11}\simeq 5{,}36$. La calculadora nos da un valor de 5,385…

8. Determina la función cuadrática que pasa por los puntos A(1, 0), B(2, −4) y C(4, 0).

$y=ax^2+bx+c$. Si la parábola pasa por (1, 0) y (4, 0) la abscisa del vértice es $x=\dfrac{5}{2}$, por lo que dicha parábola será

$y=p\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+k$. Al pasar por (1, 0), $0=\dfrac{9}{4}p+k$ y al pasar por (2, –4), $-4=\dfrac{p}{4}+k$, con lo que, restando

$4=2p$, y por tanto $p=2$, $k=-\dfrac{9}{2}$ y la parábola es $y=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{9}{2}$, es decir $y=2x^2-10x+8$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada uno de los siguientes apartados

1. ¿Qué verifican las funciones *f* y *g* dadas por $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 0 \\ -1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **y** $g(x)=\begin{cases} 3x-3 & \text{si } x\le 0 \\ -3 & \text{si } x>0 \end{cases}$**?**

A. Sus gráficas se cortan en los puntos de abscisas 1 y 2.

B. Sus gráficas no tienen ningún punto en común.

C. Las gráficas de g y $\frac{f}{g}$ son paralelas.

D. $f(x)\cdot g(x) < 0$ si x >0.

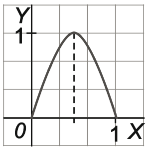
A. Es falso, pues $f(1) = -1$ y $g(1) = -3$.

B. Es verdadero, ya que si $x \le 0$, $x^2 - 1 = 3x - 3$ tiene por soluciones 1 y 2, ninguna menor o igual que cero y si $x > 0$, tampoco se cortan pues $-1 \ne -3$.

C. Es falso pues si $x \le 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-1}{3x-3} = \frac{x+1}{3}$, recta que no es paralela a $y = 3x - 3$.

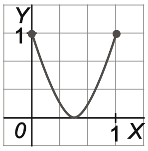
D. Es falso pues $(-1)(-3) > 0$.

2. Si la gráfica de $f(x)$ en [0, 1] es

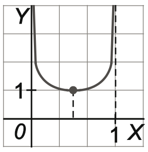


la de $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **podría ser:**

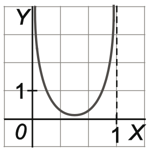
A.



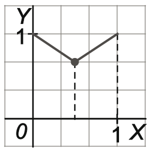
B.



C.



D.

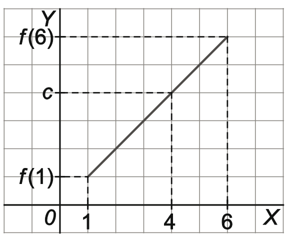


Como $g(0)$ y $g(1)$ no existen, se descartan las respuestas A) y D). Finalmente, como $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$, se descarta la respuesta C) La respuesta correcta es la B.

3. Por interpolación lineal de la función $y = f(x)$ en el intervalo [1, 6], se obtiene el valor *c* para $x = 4$, entonces:

A. $2(c - f(1)) = 3(f(6) - c)$ **B.** $\frac{c-f(1)}{3} < \frac{f(6)-c}{2}$ **C.** $\frac{c-f(1)}{3} > \frac{f(6)-c}{2}$ **D.** $c = f(4)$

Si interpretamos los datos del enunciado en la siguiente gráfica:



Se deduce que $\frac{c-f(1)}{3} = \frac{f(6)-c}{2}$, es decir $2(c - f(1)) = 3(f(6) - c)$. La respuesta correcta es la A.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Para la función inversa de $f(x) = x^3$, se verifica:

A. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ **B.** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^3}$ **C.** $f^{-1}(-8) = -2$ **D.** $f^{-1}(x)$ no es una función.

Si $y = x^3$, $x = \sqrt[3]{y}$, por lo que la inversa será $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, y una respuesta correcta es A.

Como $f^{-1}(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$ también se verifica C.

5. Sea $f(x) = ax + b$ con $a \neq 0$ y $g(x) = cx + d$ con $c \neq 0$. Si $f \circ g = g$, entonces se verifica que:

A. $a = 1$ **B.** $b = 0$ **C.** $a = 1$ y $b = 0$ **D.** $a = c$ y $b = d$

$(f \circ g)(x) = g(x)$ nos lleva a $f(cx + d) = cx + d$, es decir, $a(cx + d) + b = cx + d$, $acx + ad + b = cx + d$, por lo que

$ac = c$, $ad + b = d$. Como $c \neq 0$, $a = 1$ y $b = 0$, una respuesta correcta es C.

También se verifican las respuestas A y B.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sean f y g funciones con dominio todo $\mathbb{R}$ con $g(x) \geq 0$ para cualquier valor de x. Entonces si:

1) $f(x) \geq g(x)$ **para todo** x **2)** $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

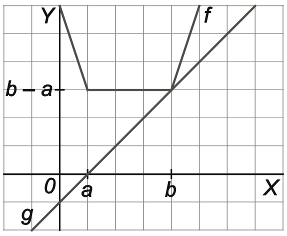
Si $f(x) \geq g(x)$ y $g(x) \geq 0$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$, por lo que $1 \Rightarrow 2$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$, al ser $g(x) \geq 0$, es $f(x) \geq g(x)$, con lo que $2 \Rightarrow 1$ y la respuesta correcta es la C.

Razona cuál de los siguientes datos es innecesario

7. Sean a y b números positivos con $a < b$. Para hallar el número de puntos de corte entre las gráficas de $f(x) = |x - a| + |x - b|$ y $g(x) = x - a$, nos dan los siguientes datos:

1. Valor de a **2. Valor de b**

A. Podemos prescindir de 1 pero no de 2.
B. Podemos prescindir de 2 pero no de 1.
C. Podemos prescindir de 1 y de 2.
D. No podemos prescindir ni de 1 ni de 2.



Dibujemos las gráficas de ambas funciones:

$$f(x) = \begin{cases} a - x + b - x = -2x + (a + b) & \text{si } x < a \\ x - a + b - x = b - a & \text{si } a \leq x \leq b \\ x - a + x - b = 2x - (a + b) & \text{si } b < x \end{cases}$$

El número de puntos de corte de ambas gráficas es 1, independientemente del valor de a y de b (con $0 < a < b$), por lo que la respuesta correcta es la C.