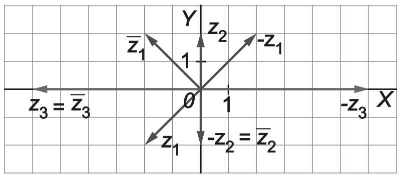
7 Números complejos

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Representa gráficamente los números $z_1 = -2-2i$, $z_2 = 2i$ y $z_3 = -6$. Halla su módulo y su argumento. Haz lo mismo con sus respectivos conjugados y opuestos.



$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha_1 = \dfrac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow \text{Arg}\,z_1 = \alpha_1 = 225º$

$|z_2| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$ $\quad$ $\text{Arg}\,z_2 = 90º$

$|z_3| = \sqrt{(-6)^2+0^2} = 6$ $\quad$ $\text{Arg}\,z_3 = 180º$

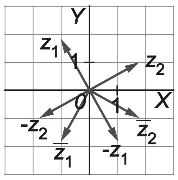
$|\overline{z_1}| = |-z_1| = |z_1| = 2\sqrt{2}$ $\quad$ $|\overline{z_2}| = |-z_2| = |z_2| = 2$ $\quad$ $|\overline{z_3}| = |-z_3| = |z_3| = 6$

$\text{Arg}\,\overline{z_1} = 360º - \text{Arg}\,z_1 = 135º$ $\quad$ $\text{Arg}\,\overline{z_2} = 360º - \text{Arg}\,z_2 = 270º$ $\quad$ $\text{Arg}\,\overline{z_3} = 360º - \text{Arg}\,z_3 = 180º$

$\text{Arg}(-z_1) = \text{Arg}\,z_1 - 180º = 45º$ $\quad$ $\text{Arg}(-z_2) = \text{Arg}\,z_2 + 180º = 270º$ $\quad$ $\text{Arg}(-z_3) = \text{Arg}\,z_3 - 180º = 0º$

3. Dados $z_1 = -1+\sqrt{3}i$ y $z_2 = \sqrt{3}+i$, represéntalos gráficamente y halla su módulo y su argumento. Haz lo mismo con sus respectivos conjugados y opuestos.

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \text{Arg}\,z_1 = \alpha_1 = 120º$



$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = 2$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Arg}\,z_2 = \alpha_2 = 30º$

$|\overline{z_1}| = |-z_1| = |z_1| = 2$ $\quad$ $|\overline{z_2}| = |-z_2| = |z_2| = 2$

$\text{Arg}\,\overline{z_1} = 360º - \text{Arg}\,z_1 = 240º$ $\quad$ $\text{Arg}\,\overline{z_2} = 360º - \text{Arg}\,z_2 = 330º$

$\text{Arg}(-z_1) = \text{Arg}\,z_1 + 180º = 300º$ $\quad$ $\text{Arg}(-z_2) = \text{Arg}\,z_2 + 180º = 210º$

4. Ejercicio resuelto.

5. Si $z_1 = -1+\sqrt{3}i$ y $z_2 = \sqrt{3}+i$, halla el módulo y el argumento de los números:

a) z_1z_2 **b)** z_1^2 **c)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **d)** z_2^{-1}

a) $z_1z_2 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right) = -\sqrt{3} - i + 3i + \sqrt{3}i^2 = -2\sqrt{3} + 2i$

$|z_1z_2| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$ $\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{-2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Arg}\left(z_1z_2\right) = \alpha = 150°$

b) $z_1^2 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^2 = 1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

$\left|z_1^2\right| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = 4$ $\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{Arg}\left(z_1^2\right) = 240°$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} = \dfrac{-\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}i^2}{3+1} = \dfrac{4i}{4} = i$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ $\quad \text{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = 90°$

d) $z_2^{-1} = \dfrac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$

$\left|z_2^{-1}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$ $\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Arg}\left(z_2^{-1}\right) = \alpha = 330°$

6. Determina qué número real *a* sitúa el afijo del complejo $(2+i)(a-i)$ en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. ¿Cuáles son su módulo y su argumento?

$(2+i)(a-i) = 2a - 2i + ai - i^2 = (2a+1) + (a-2)i$. Para que el afijo esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, la parte real e imaginaria deben coincidir, por tanto, $2a+1 = a-2 \Rightarrow a = -3$.

El número complejo resulta ser $-5-5i$, de módulo $\sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$ y argumento $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{-5}{-5} = 1 \Rightarrow \alpha = 225°$.

7. Demuestra las propiedades 2, 4 y 6 de las operaciones con complejos conjugados.

Las demostraciones son directas sin más que escribir los complejos y sus conjugados en forma binómica y operar:

Propiedad 2: $z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}\,z$

$z - \overline{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi = 2i\,\text{Im}\,z$

Propiedad 4: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(a+bi)-(c+di)} = \overline{(a-c)+(b-d)i} = (a-c)-(b-d)i = (a-bi)-(c-di) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

Propiedad 6: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; $z_2 \neq 0$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\right)} = \overline{\left(\dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1\overline{z_2}}}{|z_2|^2} = \dfrac{\overline{z_1}z_2}{|z_2|^2} = \dfrac{\overline{z_1}z_2}{\overline{z_2}z_2} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, en donde se ha aplicado la propiedad 3 y 5.

8. Opera y escribe en forma binómica estos complejos:

a) $(1+i)(3-2i)$ **b)** $2i(3+4i)$ **c)** $\frac{1+i}{i}$ **d)** $\frac{2-3i}{4+2i}$ **e)** $\frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}$ **f)** $\frac{1}{4+3i}\cdot\frac{1+i}{i}$

a) $(1+i)(3-2i)=3-2i+3i-2i^2=5+i$

b) $2i(3+4i)=6i+8i^2=-8+6i$

c) $\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)i}{i^2}=\frac{i+i^2}{-1}=1-i$

d) $\frac{2-3i}{4+2i}=\frac{(2-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\frac{8-4i-12i+6i^2}{16+4}=\frac{2-16i}{20}=\frac{1}{10}-\frac{4}{5}i$

e) $\frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}=\frac{2(1-i)-3(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i-3-3i}{1+1}=\frac{-1-5i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

f) $\frac{1}{4+3i}\cdot\frac{1+i}{i}=\frac{1+i}{-3+4i}=\frac{(1+i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\frac{-3-4i-3i-4i^2}{9+16}=\frac{1-7i}{25}=\frac{1}{25}-\frac{7}{25}i$

9. Calcula *a* para que $\frac{a+2i}{5+12i}$ sea imaginario puro.

$$\frac{a+2i}{5+12i}=\frac{(a+2i)(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)}=\frac{5a-12ai+10i-24i^2}{25+144}=\frac{24+5a}{169}+\frac{10-12a}{169}i\Rightarrow\frac{24+5a}{169}=0\Rightarrow a=-\frac{24}{5}$$

10. Escribe en forma binómica $1+i+i^2+i^3+...+i^{100}$.

$$1+i+i^2+i^3+...+i^{100}=\frac{i^{101}-1}{i-1}=\frac{i^{4\cdot25+1}-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1$$

11 a 13. Ejercicios resueltos.

14. Utilizando la forma polar, prueba que el inverso del complejo *z* es $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Si $z=r_\alpha$, tenemos $\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{r_{-\alpha}}{r^2_{0^\circ}}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha-0^\circ}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$ y $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1_{0^\circ}}{r_\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{0^\circ-\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$, por tanto, z^{-1} y $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ coinciden.

15. Expresa en las tres formas habituales los complejos:

a) $(1+i)^2$ **b)** $\frac{1}{i}$ **c)** i^7+i^{17} **d)** $\frac{1}{2}(1+i)\left(1+i^{-4}\right)$

a) $(1+i)^2=1+i^2+2i=2i=2_{90^\circ}=2(\cos 90^\circ+i\,\mathrm{sen}\,90^\circ)$

b) $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i=1_{270^\circ}=1(\cos 270^\circ+i\,\mathrm{sen}\,270^\circ)$

c) $i^7+i^{17}=i^3+i^1=-i+i=0$, no tiene forma polar ni trigonométrica.

d) $1+i^{-4}=1+\frac{1}{i^4}=1+\frac{1}{1}=2\Rightarrow\frac{1}{2}(1+i)\left(1+i^{-4}\right)=1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}=\sqrt{2}\left(\cos 45^\circ+i\,\mathrm{sen}\,45^\circ\right)$

16. Resuelve las operaciones indicadas para los complejos: $z_1 = 2_{60^\circ}$, $z_2 = -1+i$ y $z_3 = 2(\cos 210^\circ + i\,\text{sen}\,210^\circ)$.

a) $z_1z_2z_3$ **b)** $\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_3}$ **c)** $z_3{}^4$ **d)** $z_2{}^{-2}$

$z_1 = 2_{60^\circ}$, $z_2 = -1+i = \sqrt{2}_{135^\circ}$ y $z_3 = 2(\cos 210^\circ + i\,\text{sen}\,210^\circ) = 2_{210^\circ}$

a) $z_1z_2z_3 = 2_{60^\circ}\cdot\sqrt{2}_{135^\circ}\cdot 2_{210^\circ} = \left(4\sqrt{2}\right)_{405^\circ} = \left(4\sqrt{2}\right)_{45^\circ} = 4\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ) = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4+4i$

b) $\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_3} = \dfrac{2_{60^\circ}\cdot\sqrt{2}_{-135^\circ}}{2_{210^\circ}} = \sqrt{2}_{-285^\circ} = \sqrt{2}_{75^\circ} = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + \text{sen}\,75^\circ) = \sqrt{2}\left[\cos(45^\circ+30^\circ) + i\,\text{sen}(45^\circ+30^\circ)\right] =$

$= \sqrt{2}\left[(\cos 45^\circ\cos 30^\circ - \text{sen}\,45^\circ\,\text{sen}\,30^\circ) + i(\text{sen}\,45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\,\text{sen}\,30^\circ)\right] =$

$= \sqrt{2}\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\right) + i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\right)\right] = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$

c) $z_3{}^4 = \left(2_{210^\circ}\right)^4 = 16_{840^\circ} = 16_{120^\circ} = 16(\cos 120^\circ + i\,\text{sen}\,120^\circ) = 16\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -8+8\sqrt{3}i$

d) $z_2{}^2 = \left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^2 = 2_{270^\circ} \Rightarrow z_2{}^{-2} = \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1_{0^\circ}}{2_{270^\circ}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{-270^\circ} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{90^\circ} = \dfrac{1}{2}i$

17. Escribe en forma polar $z = -2(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ)$.

$z = -2(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ) = 2(-\cos 30^\circ - i\,\text{sen}\,30^\circ) = 2(\cos 210^\circ + i\,\text{sen}\,210^\circ) = 2_{210^\circ}$

También podríamos haber observado que z es el opuesto de $2(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ) = 2_{30^\circ}$ y, por tanto, $z = 2_{180^\circ+30^\circ} = 2_{210^\circ}$.

18. Expresa en forma polar todos los complejos z que cumplen:

a) $(2z+3)(iz+5)=0$ **c)** $3\overline{z} = 1+i$ **e)** $\dfrac{z}{z-2i} = 1+i$

b) $2+3iz = 4iz+9$ **d)** $(1+2i)z = 3-5i$ **f)** $2z + i\overline{z} = 1$

a) $(2z+3)(iz+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2z+3=0 \Rightarrow z = -\dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_{180^\circ} \\ iz+5=0 \Rightarrow z = -\dfrac{5}{i} = -\dfrac{5i}{i^2} = 5i = 5_{90^\circ} \end{cases}$

b) $2+3iz = 4iz+9 \Rightarrow iz = -7 \Rightarrow z = -\dfrac{7}{i} = 7i = 7_{90^\circ}$

c) $3\overline{z} = 1+i \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i \Rightarrow z = \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)_{315^\circ}$

d) $(1+2i)z = 3-5i \Rightarrow z = \dfrac{3-5i}{1+2i} = \dfrac{(3-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{-7-11i}{5} = -\dfrac{7}{5}-\dfrac{11}{5}i = \left(\sqrt{\dfrac{34}{5}}\right)_{237,53^\circ}$

e) $\dfrac{z}{z-2i} = 1+i \Rightarrow z = (1+i)z - 2i(1+i) \Rightarrow iz = -2+2i \Rightarrow z = \dfrac{-2+2i}{i} = 2+2i = \left(2\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$

f) $2z + i\overline{z} = 1 \Rightarrow 2(a+bi) + i(a-bi) = 1 \Rightarrow (2a+b)+(2b+a)i = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{2}{3},\ b = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}i = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)_{333,43^\circ}$

19. Halla todos los números reales x e y tales que $\frac{x+yi}{x-yi} = x - yi$. Expresa en forma polar y trigonométrica $x+yi$ y $x-yi$.

$$\frac{x+yi}{x-yi} = x - yi \Rightarrow x + yi = (x-yi)^2 = x^2 + y^2i^2 - 2xyi = (x^2-y^2) - 2xyi \Rightarrow \begin{cases} x = x^2 - y^2 \\ y = -2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 1,\ y = 0 \\ x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Se obtiene, por tanto, cuatro posibilidades para $z = x + yi$ y $\overline{z} = x - yi$:

$z = \overline{z} = 0$, que no tiene forma polar ni trigonométrica.

$z = \overline{z} = 1 = 1_{0^\circ} = 1(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ)$

$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{120^\circ} = 1(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$ y $\overline{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1_{240^\circ} = 1(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$

$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{240^\circ} = 1(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$ y $\overline{z} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1_{120^\circ} = 1(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$

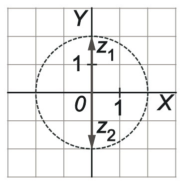
20 y 21. Ejercicios resueltos.

22. Calcula las raíces quintas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ expresando el resultado en forma polar.

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{60^\circ} \Rightarrow \sqrt[5]{1_{60^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[5]{1} = 1$ y $\beta = \frac{60^\circ + 360^\circ k}{5} = 12^\circ + 72^\circ k\ (k = 0, 1, 2, 3, 4)$, así, las raíces quintas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ son $z_1 = 1_{12^\circ}$, $z_2 = 1_{84^\circ}$, $z_3 = 1_{156^\circ}$, $z_4 = 1_{228^\circ}$ y $z_5 = 1_{300^\circ}$.

23. Calcula y representa gráficamente las raíces cuadradas de –4.

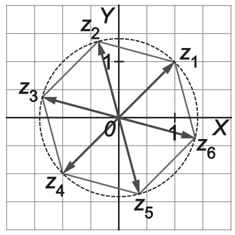
$-4 = 4_{180^\circ} \Rightarrow \sqrt{4_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt{4} = 2$ y $\beta = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{2} = 90^\circ + 180^\circ k\ (k = 0, 1)$, por tanto, las raíces cuadradas de –4 son $z_1 = 2_{90^\circ} = 2i$ y $z_2 = 2_{270^\circ} = -2i$.



24. Halla los números complejos z que cumplen que: $z = \sqrt[4]{-16}$

$-16 = 16_{180^\circ} \Rightarrow \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{16} = 2$ y $\beta = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{4} = 45^\circ + 90^\circ k\ (k = 0, 1, 2, 3)$, por tanto, obtenemos cuatro soluciones: $z_1 = 2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_2 = 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_3 = 2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ y $z_4 = 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

25. Si una raíz sexta de *z* es 1 + *i*, calcula y representa gráficamente las otras cinco raíces sextas de *z*.



Tenemos $z=(1+i)^6=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^6=8_{270^\circ}$, por tanto, las raíces sextas de z son de la forma s_β con $s=\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$ y $\beta=\dfrac{270^\circ+360^\circ k}{6}=45^\circ+60^\circ k$ $(k=0,1,2,3,4,5)$, obtenemos así las raíces sextas de z: $z_1=\sqrt{2}_{45^\circ}=1+i$, $z_2=\sqrt{2}_{105^\circ}$, $z_3=\sqrt{2}_{165^\circ}$, $z_4=\sqrt{2}_{225^\circ}$, $z_5=\sqrt{2}_{285^\circ}$ y $z_6=\sqrt{2}_{345^\circ}$.

Podemos resolver el problema de manera más simple recordando que si $1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}$ es una raíz sexta de z, las otras cinco raíces se obtienen multiplicando $\sqrt{2}_{45^\circ}$ por 1_{60°, 1_{120°, 1_{180°, 1_{240° y 1_{300°, obteniéndose el mismo resultado que con el método anterior.

26. Un vértice de un octógono regular inscrito en una circunferencia centrada en el origen es el punto *A*(12, 5). Calcula los vértices adyacentes.

El ángulo central de un octógono regular es $\dfrac{360^\circ}{8}=45^\circ$, así, para encontrar los vértices adyacentes pedidos, basta girar el vértice A respecto del origen de coordenadas 45º y –45º.

Es decir, basta multiplicar $12+5i$ por $1_{45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ y $1_{-45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, siendo los vértices adyacentes los afijos de los números que se obtienen. De este modo:

$$(12+5i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{17\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow \text{Vértice: }\left(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{17\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(12+5i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{17\sqrt{2}}{2}-\frac{7\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow \text{Vértice: }\left(\frac{17\sqrt{2}}{2},-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$$

27. Demuestra que si $k=cn+r$ con $r=0, 1, 2, \ldots, n-1$ entonces las razones trigonométricas del ángulo $\dfrac{\alpha+360^\circ k}{n}$ coinciden con las del $\dfrac{\alpha+360^\circ r}{n}$.

Observemos que ambos ángulos se diferencian en un múltiplo de 360º, por lo que sus razones trigonométricas coincidirán.

En efecto: $\dfrac{\alpha+360^\circ k}{n}-\dfrac{\alpha+360^\circ r}{n}=\dfrac{360^\circ(k-r)}{n}=\dfrac{360^\circ cn}{n}=360^\circ c$.

28. Ejercicio interactivo.

29 y 30. Ejercicios resueltos.

31. Resuelve las siguientes ecuaciones dando las soluciones en forma binómica.

a) $x^2+ix+1=0$ **b)** $x^2+2ix-1=0$ **c)** $x^4+x^2+1=0$ **d)** $x^3-x^2-x-2=0$

a) $x^2+ix+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-i\pm\sqrt{i^2-4}}{2}=\dfrac{-i\pm\sqrt{-5}}{2}=\dfrac{-i\pm\sqrt{5}i}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}i \\ x_2=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}i \end{cases}$

b) $x^2+2ix-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2i\pm\sqrt{4i^2+4}}{2}=-i$

c) Haciendo el cambio $z=x^2$ tenemos $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\begin{cases} z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{120^\circ} \\ z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{240^\circ} \end{cases}$

Deshaciendo el cambio, haciendo las raíces cuadradas de z_1 y z_2, obtenemos las soluciones $x_1=1_{60^\circ}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_2=1_{240^\circ}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3=1_{120^\circ}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x_4=1_{300^\circ}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

d) Al ser una ecuación polinómica con coeficientes reales, para cada solución su conjugada también será solución, por tanto, una de las tres soluciones es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como solución $x_1=2$ y $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$, por lo que las otras dos soluciones se obtienen resolviendo $x^2+x+1=0 \Rightarrow x_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

32. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} ix-(1+i)y=3 \\ (2+i)x+iy=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+4y^2=-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} ix-(1+i)y=3 \\ (2+i)x+iy=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i^2x-(1+i)iy=3i \\ (1+i)(2+i)x+(1+i)iy=4(1+i) \end{cases}$

Sumando las ecuaciones tenemos: $-x+(1+3i)x=3i+4+4i \Rightarrow 3ix=4+7i \Rightarrow x=\dfrac{4+7i}{3i}=\dfrac{7}{3}-\dfrac{4}{3}i$.

Sustituyendo en la segunda ecuación: $(2+i)\left(\dfrac{7}{3}-\dfrac{4}{3}i\right)+iy=4 \Rightarrow \dfrac{18}{3}-\dfrac{1}{3}i+iy=4 \Rightarrow iy=-2+\dfrac{1}{3}i \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}+2i$.

b) $x-2y=2 \Rightarrow x=2+2y$

$(2+2y)^2+4y^2=-1 \Rightarrow 8y^2+8y+5=0 \Rightarrow y=\dfrac{-8\pm\sqrt{-96}}{16}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}i \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{4}i,\ x=1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i \\ y=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}i,\ x=1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i \end{cases}$

33. Factoriza completamente en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ los polinomios:

a) $P(x)=x^3-2x^2+9x-18$ **b)** $Q(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$

a) $P(x)=(x-2)(x^2+9)$ en $\mathbb{R}$ $P(x)=(x-2)(x+3i)(x-3i)$ en $\mathbb{C}$

b) $Q(x)=(x+2)(x-2)(x^2+x+1)$ en $\mathbb{R}$ $Q(x)=(x+2)(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ en $\mathbb{C}$

34. Determina los números reales b y c sabiendo que una raíz del polinomio $P(z) = 2z^3 + bz^2 - 4z + c$ es $1 - i$.

$$P(1-i) = 0 \Rightarrow 2(1-i)^3 + b(1-i)^2 - 4(1-i) + c = 0 \Rightarrow -4-4i+2bi-4+4i+c = 0 \Rightarrow \begin{cases} -8+c=0 \\ 2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=8 \end{cases}$$

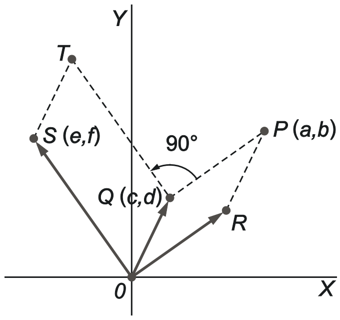
35. Ejercicio interactivo.

36 a 43. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Los números complejos

44. Sean los números complejos señalados en la figura.



a) Halla su forma binómica.

b) Calcula su módulo.

c) Determina su argumento.

d) ¿Hay algún par que sean conjugados entre sí?

Identificamos puntos y vectores con el número complejo correspondiente.

a) $P = a + bi$, $Q = c + di$ y $S = e + fi$. Observemos que R se obtiene trasladando P según el vector $-\overrightarrow{OQ}$, por tanto, $R = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$. Análogamente, T se obtiene trasladando S según el vector $\overrightarrow{OQ}$, por tanto, $T = (e+fi) + (c+di) = (e+c) + (f+d)i$

b) $|P| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|Q| = \sqrt{c^2+d^2}$, $|R| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$, $|S| = \sqrt{e^2+f^2}$ y $|T| = \sqrt{(e+c)^2+(f+d)^2}$

c) $\text{Arg}\,P = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$, hay que tomar la solución del primer cuadrante.

$\text{Arg}\,Q = \text{arctg}\left(\frac{d}{c}\right)$, hay que tomar la solución del primer cuadrante.

$\text{Arg}\,R = \text{arctg}\left(\frac{b-d}{a-c}\right)$, hay que tomar la solución del primer cuadrante.

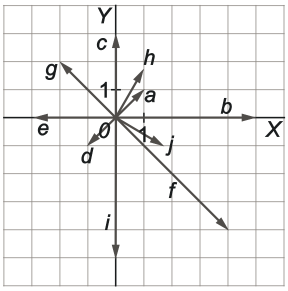
$\text{Arg}\,S = \text{arctg}\left(\frac{f}{e}\right) = 90^\circ + \text{Arg}\,R$ $\qquad$ $\text{Arg}\,T = \text{arctg}\left(\frac{f+d}{e+c}\right) = 90^\circ + \text{Arg}\,R = \text{Arg}\,S$

e) Si hubiera algún par conjugados entre sí serían simétricos respecto del eje X, lo que no ocurre.

45. Representa los siguientes números complejos y, sin ningún cálculo, obtén sus argumentos.

a) $1+i$ **c)** $3i$ **e)** -3 **g)** $-2+2i$ **i)** $-5i$

b) 5 **d)** $-1-i$ **f)** $4-4i$ **h)** $1+\sqrt{3}i$ **j)** $\sqrt{3}-i$



a) $\text{Arg}(1+i)=45^\circ$ **f)** $\text{Arg}(4-4i)=315^\circ$

b) $\text{Arg}(5)=0^\circ$ **g)** $\text{Arg}(-2+2i)=135^\circ$

c) $\text{Arg}(3i)=90^\circ$ **h)** $\text{Arg}\left(1+\sqrt{3}i\right)=60^\circ$

d) $\text{Arg}(-1-i)=225^\circ$ **i)** $\text{Arg}(-5i)=270^\circ$

e) $\text{Arg}(-3)=180^\circ$ **j)** $\text{Arg}\left(\sqrt{3}-i\right)=330^\circ$

46. Sean los números complejos: $z_1=-2+i$, $z_2=1+4i$, $z_3=-3-2i$, $z_4=-5i$, $z_5=4$, $z_6=2-3i$.

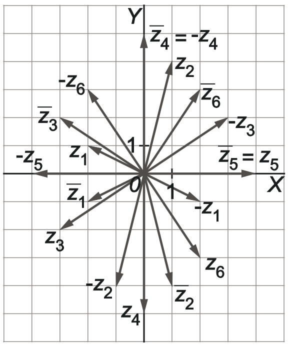
a) Represéntalos junto con sus opuestos y conjugados.

b) Halla su módulo y su argumento.

c) Determina el módulo y el argumento de sus opuestos.

d) Determina el módulo y el argumento de sus conjugados.

a)



b) $|z_1|=\sqrt{5}$, $|z_2|=\sqrt{17}$, $|z_3|=\sqrt{13}$, $|z_4|=5$, $|z_5|=4$ y $|z_6|=\sqrt{13}$

$\text{Arg}\,z_1=\text{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)=153{,}43^\circ$, $\text{Arg}\,z_2=\text{arctg}(4)=75{,}96^\circ$, $\text{Arg}\,z_3=\text{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)=213{,}69^\circ$, $\text{Arg}\,z_4=270^\circ$,

$\text{Arg}\,z_5=0^\circ$ y $\text{Arg}\,z_6=\text{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right)=303{,}69^\circ$

c) El módulo de cada opuesto coincide con el módulo del número complejo del que es opuesto y los argumentos se diferencian en 180º:

$|-z_1|=|z_1|=\sqrt{5}$, $|-z_2|=|z_2|=\sqrt{17}$, $|-z_3|=|z_3|=\sqrt{13}$, $|-z_4|=|z_4|=5$, $|-z_5|=|z_5|=4$ y $|-z_6|=|z_6|=\sqrt{13}$

$\text{Arg}(-z_1)=\text{Arg}(z_1)+180^\circ=333{,}43^\circ$, $\text{Arg}(-z_2)=\text{Arg}(z_2)+180^\circ=225{,}96^\circ$, $\text{Arg}(-z_3)=\text{Arg}(z_3)-180^\circ=33{,}69^\circ$

$\text{Arg}(-z_4)=\text{Arg}(z_4)-180^\circ=90^\circ$, $\text{Arg}(-z_5)=\text{Arg}(z_5)+180^\circ=180^\circ$ y $\text{Arg}(-z_6)=\text{Arg}(z_6)-180^\circ=123{,}69^\circ$

d) El módulo de cada conjugado coincide con el módulo del número complejo del que es conjugado y los argumentos suman 360º:

$|\overline{z_1}|=|z_1|=\sqrt{5}$, $|\overline{z_2}|=|z_2|=\sqrt{17}$, $|\overline{z_3}|=|z_3|=\sqrt{13}$, $|\overline{z_4}|=|z_4|=5$, $|\overline{z_5}|=|z_5|=4$ y $|\overline{z_6}|=|z_6|=\sqrt{13}$

$\text{Arg}\left(\overline{z_1}\right)=360^\circ-\text{Arg}(z_1)=206{,}57^\circ$, $\text{Arg}\left(\overline{z_2}\right)=360^\circ-\text{Arg}(z_2)=314{,}04^\circ$, $\text{Arg}\left(\overline{z_3}\right)=360-\text{Arg}(z_3)=146{,}31^\circ$,

$\text{Arg}\left(\overline{z_4}\right)=360^\circ-\text{Arg}(z_4)=90^\circ$, $\text{Arg}\left(\overline{z_5}\right)=360^\circ-\text{Arg}(z_5)=360^\circ=0^\circ$ y $\text{Arg}\left(\overline{z_6}\right)=360^\circ-\text{Arg}(z_6)=56{,}31^\circ$

47. Escribe en la forma $a+bi$, con a y b reales, los siguientes números complejos:

a) $z = 12 - 3i - 4(-5 + 8i)$

b) $z = \left(3 + i\sqrt{5}\right)\left(3 - i\sqrt{5}\right)$

c) $z = \left(4 + 3i\right)^2$

d) $z = \left(2 + i\right)^2\left(1 - 2i\right)$

e) $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

f) $z = \frac{5 + 15i}{1 + 2i}$

g) $z = \frac{3 - 6i}{3 + i} + \frac{4}{3 - 4i}$

h) $z = \frac{1 - 2i}{5 + 3i} + \left(\frac{3}{1 - i}\right)^2$

i) $z = \left(\frac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$

a) $z = 12 - 3i - 4(-5 + 8i) = 12 - 3i + 20 - 32i = 32 - 35i$

b) $z = \left(3 + i\sqrt{5}\right)\left(3 - i\sqrt{5}\right) = 9 - 5i^2 = 9 + 5 = 14$

c) $z = \left(4 + 3i\right)^2 = 16 + 9i^2 + 24i = 16 - 9 + 24i = 7 + 24i$

d) $z = \left(2 + i\right)^2\left(1 - 2i\right) = \left(4 + i^2 + 4i\right)\left(1 - 2i\right) = \left(3 + 4i\right)\left(1 - 2i\right) = 3 - 6i + 4i - 8i^2 = 11 - 2i$

e) $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i^2 + i\right) = -i$

f) $z = \frac{5 + 15i}{1 + 2i} = \frac{(5 + 15i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{5 - 10i + 15i - 30i^2}{1 + 4} = \frac{35 + 5i}{5} = 7 + i$

g) $z = \frac{3 - 6i}{3 + i} + \frac{4}{3 - 4i} = \frac{(3 - 6i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} + \frac{4(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 - 21i}{10} + \frac{12 + 16i}{25} = \frac{3}{10} - \frac{21}{10}i + \frac{12}{25} + \frac{16}{25}i = \frac{39}{50} - \frac{73}{50}i$

h) $z = \frac{1 - 2i}{5 + 3i} + \left(\frac{3}{1 - i}\right)^2 = \frac{(1 - 2i)(5 - 3i)}{(5 + 3i)(5 - 3i)} + \left(\frac{3(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}\right)^2 = \frac{-1 - 13i}{34} + \left(\frac{3 + 3i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{34} - \frac{13}{34}i + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}i^2 + \frac{9}{2}i =$

$= -\frac{1}{34} + \frac{70}{17}i$

i) $z = \left(\frac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right) = \left(\frac{2(2 - 3i)}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right) = 2\frac{(1 + 3i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = 2\frac{9 + 7i}{13} = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$

48. Si $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ y $z_3 = 1 - i$, calcula:

a) $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

b) $\operatorname{Im}\left(z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3\right)$

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{-1 + 3i} = \frac{(3 + 2i)(-1 - 3i)}{(-1 + 3i)(-1 - 3i)} = \frac{3 - 11i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{11}{10}i \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{3}{10}$

b) $z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3 = 3 + 2i + 2 - 6i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{11}{2} - \frac{9}{2}i \Rightarrow \operatorname{Im}\left(z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3\right) = -\frac{9}{2}$

49. Justifica que $(1 + i)^8$ es un número real positivo.

$(1 + i)^2 = 2i \Rightarrow (1 + i)^8 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$

Otra posible respuesta sería:

$\operatorname{Arg}(1 + i) = 45^\circ \Rightarrow \operatorname{Arg}\left((1 + i)^8\right) = 8 \cdot 45^\circ = 360^\circ = 0^\circ \Rightarrow (1 + i)^8$ es un número real positivo.

50. **Para cada complejo $z = x + iy$, definimos el complejo $Z = z^2 - z$. Prueba que $\operatorname{Re} Z = x^2 - y^2 - x$ y que $\operatorname{Im} Z = y(2x - 1)$.**

$$Z = (x+iy)^2 - (x+iy) = x^2 + i^2y^2 + 2xyi - x - iy = (x^2 - y^2 - x) + y(2x-1)i \Rightarrow \operatorname{Re} Z = x^2 - y^2 - x,\ \operatorname{Im} Z = y(2x-1)$$

51. **Resuelve las ecuaciones siguientes de incógnita *z*.**

a) $(1+i)z = 3 - i$

b) $2z + 1 - i = iz + 2$

c) $(2z + 1 - i)(z+3) = 0$

d) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$

a) $(1+i)z = 3 - i \Rightarrow z = \dfrac{3-i}{1+i} = \dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2-4i}{2} = 1 - 2i$

b) $2z + 1 - i = iz + 2 \Rightarrow (2-i)z = 1 + i \Rightarrow z = \dfrac{1+i}{2-i} = \dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{1+3i}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

c) $(2z+1-i)(z+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2z + 1 - i = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ z + 3 = 0 \Rightarrow z = -3 \end{cases}$

d) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i \Rightarrow z + 1 = 2iz - 2i \Rightarrow (1-2i)z = -1 - 2i \Rightarrow z = \dfrac{-1-2i}{1-2i} = \dfrac{(-1-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{3-4i}{5} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$

52. **Considera el polinomio: $P(z) = z^3 + (-2+3i)z^2 + (13-i)z - 6 - 10i$**

¿Son los números complejos *i*, 3 y $1+i$ raíces de $P(z)$?

$P(i) = i^3 + (-2+3i)i^2 + (13-i)i - 6 - 10i = -i + 2 - 3i + 13i + 1 - 6 - 10i = -3 - i \neq 0 \Rightarrow$ *i* no es raíz de *P*.

$P(3) = 3^3 + (-2+3i)\cdot 3^2 + (13-i)\cdot 3 - 6 - 10i = 27 - 18 + 27i + 39 - 3i - 6 - 10i = 42 + 14i \neq 0 \Rightarrow$ 3 no es raíz de *P*.

$P(1+i) = (1+i)^3 + (-2+3i)(1+i)^2 + (13-i)(1+i) - 6 - 10i = -2 + 2i - 4i - 6 + 14 + 12i - 6 - 10i = 0 \Rightarrow 1+i$ es raíz de *P*.

53. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de incógnitas z_1 y z_2:**

a) $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 2 - 5i \\ z_1 - z_2 = -2 + i \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 5 + 2i \\ -z_1 + z_2 = 1 - 2i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2iz_1 + z_2 = 2i \\ 3z_1 - iz_2 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3z_1 + 2iz_2 = 3 + 11i \\ z_1 - (i-1)z_2 = -3 + 5i \end{cases}$

a) Sumando las ecuaciones tenemos $4z_1 = -4i \Rightarrow z_1 = -i$ y, sustituyendo, $-i - z_2 = -2 + i \Rightarrow z_2 = 2 - 2i$.

b) Restando las ecuaciones tenemos $4z_1 = 4 + 4i \Rightarrow z_1 = 1 + i$ y, sustituyendo, $-1 - i + z_2 = 1 - 2i \Rightarrow z_2 = 2 - i$.

c) Multiplicando la primera ecuación por i y sumándole la segunda ecuación tenemos $z_1 = -1$ y, sustituyendo, $-2i + z_2 = 2i \Rightarrow z_2 = 4i$.

d) Restándole a la primera ecuación el triple de la segunda tenemos

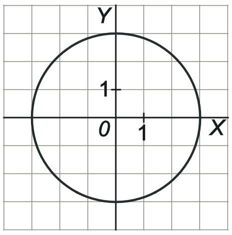
$(-3+5i)z_2 = 12 - 4i \Rightarrow z_2 = \dfrac{12-4i}{-3+5i} = \dfrac{(12-4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \dfrac{-56-48i}{34} = -\dfrac{28}{17} - \dfrac{24}{17}i$ y, sustituyendo,

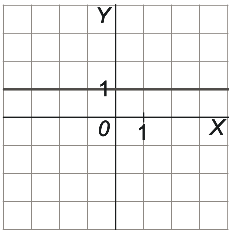
$z_1 - (i-1)\left(-\dfrac{28}{17} - \dfrac{24}{17}i\right) = -3 + 5i \Rightarrow z_1 - \dfrac{52}{17} + \dfrac{4}{17}i = -3 + 5i \Rightarrow z_1 = \dfrac{1}{17} + \dfrac{81}{17}i$.

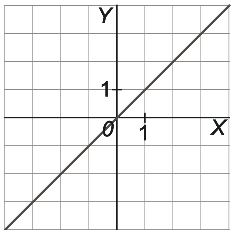
54. En cada uno de los casos siguientes, representa el conjunto de afijos de los números complejos *z* que verifican las siguientes condiciones:

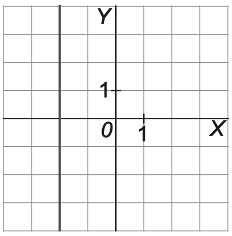
a) $|z| = 3$ **c)** $\operatorname{Im} z = 1$ **e)** $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

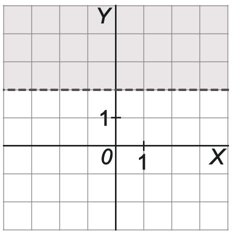
b) $\operatorname{Re} z = -2$ **d)** $\operatorname{Im} z > 2$ **f)** $\operatorname{Re} z < -1$

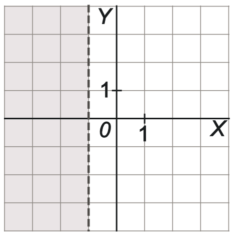
a)


c)


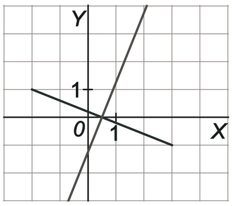
e)


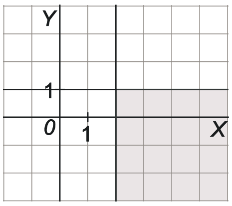
b)


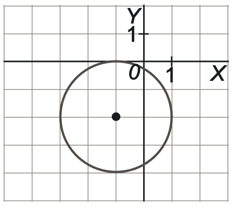
d)


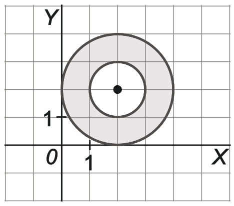
f)


55. Escribe la condición que cumplen los números complejos cuyos afijos se encuentran en la región representada en cada caso.

a)


b)


c)


d)


a) $|z - (3 - i)| = |z - (-2 + i)|$

c) $|z - (-1 - 2i)| = 2$

b) $\operatorname{Re} z \geq 2$ e $\operatorname{Im} z \leq 1$

d) $1 \leq |z - (2 + 2i)| \leq 2$

56. Escribe en función de $\overline{z}$ el conjugado de los complejos *w* siguientes.

a) $w = 2 + 3z$ **b)** $w = (1 + iz)(1 + 2z)$ **c)** $w = \dfrac{1 + iz}{3 + z}$ **d)** $w = z^3 + 2iz^2 + 1 - 3i$

a) $\overline{w} = 2 + 3\overline{z}$ **b)** $\overline{w} = (1 - i\overline{z})(1 + 2\overline{z})$ **c)** $\overline{w} = \dfrac{1 - i\overline{z}}{3 + \overline{z}}$ **d)** $\overline{w} = \overline{z}^3 - 2i\overline{z}^2 + 1 + 3i$

57. Sea $z = x + iy$ y $w = iz + \overline{z} - z - 2i$.

a) Comprueba que $w - \overline{w} = 2i(x - 2y - 2)$.

b) Demuestra que la afirmación "el afijo de *w* está sobre el eje de abscisas" es equivalente a "el afijo de *z* está en la recta $2y = x - 2$".

a) $\overline{w} = -i\overline{z} + z - \overline{z} + 2i \Rightarrow w - \overline{w} = i\left(z + \overline{z}\right) + 2\left(\overline{z} - z\right) - 4i = 2i \operatorname{Re} z - 4i \operatorname{Im} z - 4i = 2i\left(\operatorname{Re} z - 2\operatorname{Im} z - 2\right) = 2i\left(x - 2y - 2\right)$

b) Si el afijo de *w* está sobre el eje de abscisas tenemos $w = \overline{w}$ y, por tanto, $x - 2y - 2 = 0$, es decir, el afijo de *z* está en la recta $2y = x - 2$. Recíprocamente, si el afijo de *z* está en la recta $2y = x - 2$ tenemos $w - \overline{w} = 0$, es decir, $w = \overline{w}$ y, por tanto, el afijo de *w* está sobre el eje de abscisas.

58. Determina todos los complejos *z* que hagan que $\dfrac{iz}{z-2}$ sea un número imaginario puro.

Si $z = a + bi$ tenemos $\dfrac{iz}{z-2} = \dfrac{-b+ai}{(a-2)+bi} = \dfrac{(-b+ai)\big((a-2)-bi\big)}{\big((a-2)+bi\big)\big((a-2)-bi\big)} = \dfrac{2b+(b^2+a^2-2a)i}{(a-2)^2+b^2}$, que será imaginario puro si y solo si $b = 0$, por tanto, los complejos *z* buscados son los números reales.

Formas polar y trigonométrica. Operaciones

59. Escribe en forma polar los complejos siguientes.

a) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

b) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 4 - 4i$

d) $z = -2i$

e) $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

f) $z = \dfrac{4}{1-i}$

g) $z = -2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$

h) $z = \sqrt{2}\,(-\cos 45^\circ - i \operatorname{sen} 45^\circ)$

i) $z = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ$

j) $z = \operatorname{sen}(\alpha + \pi) + i\cos(\pi - \alpha)$

a) $|z| = \sqrt{4+12} = 4$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ \Rightarrow z = 4_{60^\circ}$

b) $|z| = \sqrt{2+2} = 2$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(-1) = 135^\circ \Rightarrow z = 2_{135^\circ}$

c) $|z| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(-1) = 315^\circ \Rightarrow z = \left(4\sqrt{2}\right)_{315^\circ}$

d) $|z| = \sqrt{0+4} = 2$, $\operatorname{Arg} z = 270^\circ \Rightarrow z = 2_{270^\circ}$

e) $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{16}} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = 120^\circ \Rightarrow z = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{120^\circ}$

f) $z = \dfrac{4}{1-i} = \dfrac{4_{0^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)_{0^\circ-315^\circ} = \left(2\sqrt{2}\right)_{-315^\circ} = \left(2\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$

g) *z* es el opuesto de 2_{150°, por tanto, $z = 2_{150^\circ+180^\circ} = 2_{330^\circ}$.

h) *z* es el opuesto de $\sqrt{2}_{45^\circ}$, por tanto, $z = \sqrt{2}_{45^\circ+180^\circ} = \sqrt{2}_{225^\circ}$.

i) $z = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{45^\circ}$

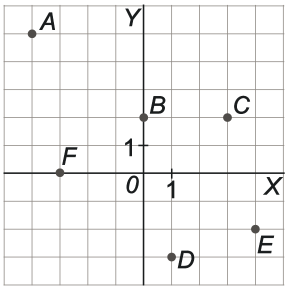
j) $z = \operatorname{sen}(\alpha + \pi) + i\cos(\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha = 1_\beta$, donde $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$, por tanto, $\beta = 90^\circ - \alpha$ o $\beta = 270^\circ - \alpha$.

Observemos que el primer caso no es posible, ya que entonces la parte real de *z* sería $\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, que no coincide con $\operatorname{sen}(\alpha + \pi) = -\operatorname{sen}\alpha$ salvo que $\alpha = 0^\circ$.

Así, debe ser $z = 1_{270^\circ-\alpha}$, y, en efecto, $1_{270^\circ-\alpha} = \cos(270^\circ - \alpha) + i\operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) = -\cos(90^\circ - \alpha) - i\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) =$

$-\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha = z$.

60. Escribe en forma binómica, polar y trigonométrica los números complejos cuyos afijos se señalan en la figura.



$A = -4 + 5i = \sqrt{41}_{128,66^\circ} = \sqrt{41}\left(\cos 128,66^\circ + i \operatorname{sen} 128,66^\circ\right)$

$B = 2i = 2_{90^\circ} = 2\left(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ\right)$

$C = 3 + 2i = \sqrt{13}_{33,69^\circ} = \sqrt{13}\left(\cos 33,69^\circ + i \operatorname{sen} 33,69^\circ\right)$

$D = 1 - 3i = \sqrt{10}_{288,43^\circ} = \sqrt{10}\left(\cos 288,43^\circ + i \operatorname{sen} 288,43^\circ\right)$

$E = 4 - 2i = \left(2\sqrt{5}\right)_{333,43^\circ} = 2\sqrt{5}\left(\cos 333,43^\circ + i \operatorname{sen} 333,43^\circ\right)$

$F = -3 = 3_{180^\circ} = 3\left(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ\right)$

61. Escribe en forma trigonométrica el complejo: $z = \dfrac{3-7i}{2+5i}$.

$$z = \frac{3-7i}{2+5i} = \frac{(3-7i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{-29-29i}{29} = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ\right)$$

62. Dados los complejos: $z_1 = \sqrt{2}(1+i)$ y $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$.

a) Escribe z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

b) Si $w = \dfrac{z_1}{z_2}$, escribe w en forma binómica y trigonométrica y deduce el valor exacto de cos 75º y sen 75º.

a) $z_1 = \sqrt{2}(1+i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ\right) \qquad z_2 = 1\left(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ\right)$

b) $w = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\left(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ\right)}{1\left(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ\right)} = 2\left(\cos(-285^\circ) + i \operatorname{sen}(-285^\circ)\right) = 2\left(\cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ\right)$

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i}{1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$$

Por tanto se deduce que $2\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ y $2\operatorname{sen} 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

63. Si $z = \sqrt{3} - i$, calcula z^2, $\left|z^2\right|$ y $|z|^2$.

$z = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ} \Rightarrow z^2 = 4_{660^\circ} = 4_{300^\circ}$, $\left|z^2\right| = 4$ y $|z|^2 = 2^2 = 4$

64. Si $z=\sqrt{6}+\sqrt{2}-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, escribe en forma binómica los complejos z^2, z^6, z^9 y z^{12}.

Se escribe z en forma polar:

$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6+2+2\sqrt{12}+6+2-2\sqrt{12}}=\sqrt{16}=4$, por otra parte, en el ejercicio 62 se ha probado que $\operatorname{sen}75º=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ y $\cos 75º=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, de donde $\operatorname{tg}75º=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. Así, si $\operatorname{Arg} z=\alpha$, se tiene $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\operatorname{tg}75º}=-\operatorname{cotg}75º\Rightarrow\alpha=345º$, por tanto, $z=4_{345º}$.

De este modo:

$$z^2=\left(4_{345º}\right)^2=16_{690º}=16_{330º}=16\left(\cos 330º+i\operatorname{sen}330º\right)=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=8\sqrt{3}-8i$$

$$z^6=\left(4_{345º}\right)^6=4096_{2070º}=4096_{270º}=-4096i$$

$$z^9=\left(4_{345º}\right)^9=\left(2^{18}\right)_{3105º}=\left(2^{18}\right)_{225º}=2^{18}\left(\cos 225º+i\operatorname{sen}225º\right)=2^{18}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-2^{17}\sqrt{2}-2^{17}\sqrt{2}i$$

$$z^{12}=\left(z^6\right)^2=\left(-4096i\right)^2=\left(-2^{12}i\right)^2=2^{24}i^2=-2^{24}$$

65. Calcula el siguiente número complejo: $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$.

$1+i\sqrt{3}=2_{60º}$ y $1+i=\sqrt{2}_{45º}$, por tanto, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\dfrac{2_{60º}}{\sqrt{2}_{45º}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{15º}=\sqrt{2}_{15º}$ y $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}=\left(\sqrt{2}_{15º}\right)^{30}=\left(2^{15}\right)_{450º}=$

$=\left(2^{15}\right)_{90º}=2^{15}i$

66. Decide los valores del entero *n* para que el complejo $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ sea:

a) Un número real **b)** Un número real positivo **c)** Un número imaginario puro

$\sqrt{3}+i=2_{30º}\Rightarrow\left(\sqrt{3}+i\right)^n=\left(2_{30º}\right)^n=\left(2^n\right)_{30ºn}$

a) $30ºn=180ºk\Rightarrow n=6k$ para algún entero k.

b) $30ºn=360ºk\Rightarrow n=12k$ para algún entero k.

c) $30ºn=90º+180ºk\Rightarrow n=3+6k$ para algún entero k.

67. Resuelve la siguiente ecuación: $2z-(1+i)\overline{z}=-1+5i$.

Sea $z=a+bi$:

$$2(a+bi)-(1+i)(a-bi)=-1+5i\Rightarrow 2a+2bi-a+bi-ai-b=-1+5i\Rightarrow(a-b)+(3b-a)i=-1+5i\Rightarrow\begin{cases}a-b=-1\\-a+3b=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=-1\\-a+3b=5\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=2\Rightarrow z=1+2i$$

Otra manera de resolver la ecuación es tomar conjugados, obteniendo un sistema lineal con incógnitas z y $\overline{z}$.

68. **a)** Determina el conjunto de los afijos de los complejos z tales que $|z-1| = |\bar{z}+1|$.

b) Sea n un entero positivo. Encuentra los complejos z tales que $(z-1)^n = (\bar{z}+1)^n$.

a) Si $z = a + bi$ tenemos:

$$|z-1| = |\bar{z}+1| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Rightarrow (x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x = x^2 + 1 + 2x \Rightarrow x = 0$$

Por tanto, los complejos buscados son los imaginarios puros, es decir, los afijos son el eje Y.

b) Tomando módulos y usando el apartado previo deducimos que z debe ser imaginario puro, digamos $z = bi$.

Entonces $z-1 = -1+bi$ y $\bar{z}+1 = 1-bi$ son opuestos, con lo que si $\text{Arg}(z-1) = \alpha$ tendremos $\text{Arg}(\bar{z}+1) = 180° + \alpha$ y, por tanto, $n\alpha = 180°n + n\alpha \Rightarrow 180°n = 0° \Rightarrow n$ par.

En conclusión, si n es impar la ecuación no tiene solución, y si n es par, las soluciones son los complejos imaginarios puros.

Radicación de números complejos

69. **Resuelve las siguientes ecuaciones y escribe sus soluciones en forma binómica.**

a) $z^3 - i = 0$ **c)** $z^4 + 1 = 0$ **e)** $z^6 - 1 = 0$

b) $z^6 - 64 = 0$ **d)** $z^4 + 81 = 0$ **f)** $z^4 - 81 = 0$

a) $z^3 - i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1_{90°}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[3]{1} = 1$ y $\beta = \dfrac{90° + 360°k}{3} = 30° + 120°k \ (k = 0, 1, 2)$, así:

$z_1 = 1_{30°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $z_2 = 1_{150°} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ y $z_3 = 1_{270°} = -i$.

b) $z^6 - 64 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0°}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[6]{64} = 2$ y $\beta = \dfrac{0° + 360°k}{6} = 60°k \ (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, así:

$z_1 = 2_{0°} = 2$, $z_2 = 2_{60°} = 1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = 2_{120°} = -1 + \sqrt{3}i$, $z_4 = 2_{180°} = -2$, $z_5 = 2_{240°} = -1 - \sqrt{3}i$ y $z_6 = 2_{300°} = 1 - \sqrt{3}i$.

c) $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180°}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{1} = 1$ y $\beta = \dfrac{180° + 360°k}{4} = 45° + 90°k \ (k = 0, 1, 2, 3)$, obteniendo:

$z_1 = 1_{45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = 1_{135°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = 1_{225°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ y $z_4 = 1_{315°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

d) $z^4 + 81 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180°}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{81} = 3$ y $\beta = \dfrac{180° + 360°k}{4} = 45° + 90°k \ (k = 0, 1, 2, 3)$, así:

$z_1 = 3_{45°} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = 3_{135°} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = 3_{225°} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$ y $z_4 = 3_{315°} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$.

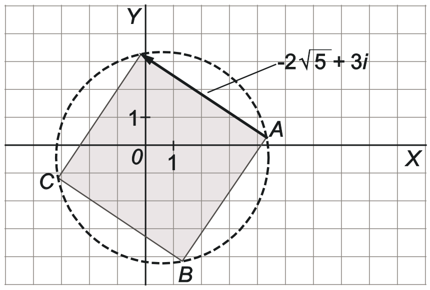
e) $z^6 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0°}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[6]{1} = 1$ y $\beta = \dfrac{0° + 360°k}{6} = 60°k \ (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, obteniendo:

$z_1 = 1_{0°} = 1$, $z_2 = 1_{60°} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = 1_{120°} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = 1_{180°} = -1$, $z_5 = 1_{240°} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_6 = 1_{300°} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

f) $z^4 - 81 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{81_{0°}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{81} = 3$ y $\beta = \dfrac{0° + 360°k}{4} = 90°k \ (k = 0, 1, 2, 3)$, por tanto:

$z_1 = 3_{0°} = 3$, $z_2 = 3_{90°} = 3i$, $z_3 = 3_{180°} = -3$ y $z_4 = 3_{270°} = -3i$.

70. A partir de los datos de la figura, calcula de forma exacta y razonada, la forma binómica de los afijos correspondientes a los vértices del cuadrado que se representa.



Se identifican puntos y vectores con el complejo correspondiente.

Calculando en primer lugar el centro de la circunferencia se observa que los puntos $P=-1+3i$ y $Q=2-4i$ son los extremos de un diámetro, por lo que el centro será el punto medio del segmento *PQ*, $R=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

Haciendo una traslación que lleve el punto *R* al origen de coordenadas *O*, es decir, una traslación de vector $\overrightarrow{RO}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ los puntos *A*, *B*, *C* y *D* se trasforman en los puntos *A'*, *B'*, C' y *D'*, vértices de un cuadrado centrado en *O*, por tanto, $D'=iA'$, $C'=iD'=-A'$ y $B'=iC'=-D'$. Además, $D'=-2\sqrt{5}+3i+A'$, por tanto:

$iA'=-2\sqrt{5}+3i+A' \Rightarrow (-1+i)A'=-2\sqrt{5}+3i \Rightarrow A'=\frac{-2\sqrt{5}+3i}{-1+i}=\frac{2\sqrt{5}+3}{2}+\frac{2\sqrt{5}-3}{2}i$, $\quad D'=-\frac{2\sqrt{5}-3}{2}+\frac{2\sqrt{5}+3}{2}i$,

$C'=-\frac{2\sqrt{5}+3}{2}-\frac{2\sqrt{5}-3}{2}i$ y $B'=\frac{2\sqrt{5}-3}{2}-\frac{2\sqrt{5}+3}{2}i$.

Finalmente, deshaciendo la traslación anterior, obtenemos $A=\left(\sqrt{5}+2\right)+\left(\sqrt{5}-2\right)i$, $D=\left(2-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}+1\right)i$, $C=-\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(1-\sqrt{5}\right)i$ y $B=\left(\sqrt{5}-1\right)-\left(\sqrt{5}-2\right)i$.

71. Si $P\left(\sqrt{3},1\right)$ es un vértice de un hexágono regular inscrito en la circunferencia centrada en el origen y de radio 2, calcula los restantes de las dos formas siguientes.

a) Multiplicando $z=\sqrt{3}+i$ por determinados números complejos.

b) Calculando las raíces sextas de $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

a) Los restantes vértices se obtienen girando *P* 60º reiteradamente respecto del origen de coordenadas, es decir, multiplicando $z=\sqrt{3}+i=2_{30^\circ}$ por 1_{60°, 1_{120°, 1_{180°, 1_{240° y 1_{300°, obteniéndose los puntos:

$2_{30^\circ}\cdot 1_{60^\circ}=2_{90^\circ}=2i\Rightarrow(0,\,2)$, $2_{30^\circ}\cdot 1_{120^\circ}=2_{150^\circ}=-\sqrt{3}+i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},\,1\right)$, $2_{30^\circ}\cdot 1_{180^\circ}=2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},\,-1\right)$,

$2_{30^\circ}\cdot 1_{240^\circ}=2_{270^\circ}=-2i\Rightarrow(0,\,-2)$ y $2_{30^\circ}\cdot 1_{300^\circ}=2_{330^\circ}=\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(\sqrt{3},\,-1\right)$

b) Los vértices del hexágono son los afijos de las raíces sextas de $\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left(2_{30^\circ}\right)^6=64_{180^\circ}$, es decir, son los afijos de los complejos s_β con $s=\sqrt[6]{64}=2$ y $\beta=\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}=30^\circ+60^\circ k$ $(k=0,1,2,3,4,5)$:

$2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i\Rightarrow P\left(\sqrt{3},\,1\right)$, $\quad 2_{90^\circ}=2i\Rightarrow(0,\,2)$, $\quad 2_{150^\circ}=-\sqrt{3}+i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},\,1\right)$, $\quad 2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},\,-1\right)$,

$2_{270^\circ}=-2i\Rightarrow(0,\,-2)$ y $2_{330^\circ}=\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(\sqrt{3},\,-1\right)$

72. Encuentra los números reales *a* y *b* para que se cumpla la relación $(a+bi)^2 = i$ de dos formas:

a) Calculando las raíces cuadradas de *i*.

b) Desarrollando $(a+bi)^2$.

a) $a+bi = \sqrt{i} = \sqrt{1_{90^\circ}} = 1_{\frac{90^\circ+360^\circ k}{2}} = 1_{45^\circ+180^\circ k} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow 1_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ k=1 \Rightarrow 1_{225^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow a=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

b) $(a+bi)^2 = a^2+b^2i^2+2abi = (a^2-b^2)+2abi \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm b \\ 2ab=1 \end{cases}$

Si $a=b$ obtenemos $2a^2=1 \Rightarrow a^2=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir, obtenemos dos soluciones, $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $a=b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si $a=-b$ obtenemos $-2a^2=1$, que no tiene solución real.

73. Sea *z* un número complejo.

a) Calcula los números reales, *a*, *b*, *c*, para que se verifique la igualdad: $z^3+8=(z+2)(az^2+bz+c)$.

b) Halla de dos formas distintas las raíces cúbicas de –8.

a) $(z+2)(az^2+bz+c) = az^3+(2a+b)z^2+(c+2b)z+2c \Rightarrow a=1,\ 2a+b=0,\ c+2b=0,\ 2c=8 \Rightarrow a=1,\ b=-2,\ c=4$

b) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s=\sqrt[3]{8}=2$ y $\beta = \frac{180^\circ+360^\circ k}{3} = 60^\circ+120^\circ k\ (k=0,1,2)$, por tanto, las raíces cúbicas de –8 son $2_{60^\circ}=1+\sqrt{3}i$, $2_{180^\circ}=-2$ y $2_{300^\circ}=1-\sqrt{3}i$.

Otra manera de calcular las raíces cúbicas de –8 es observar que son las soluciones de $z^3+8=0$, es decir, según el apartado anterior, $z+2=0 \Rightarrow z=-2$ y $z^2-2z+4=0 \Rightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{3}i}{2}=1\pm\sqrt{3}i$.

74. a) Justifica que $(1+i)^6=-8i$.

b) Considera la ecuación $z^2=-8i$:

i) Deduce del aparado a) una solución de la ecuación.

ii) Deduce del apartado a) una solución de $z^3=-8i$.

a) $(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^6 = 8_{270^\circ} = -8i$

b) i) Según el apartado a), una solución es $z=(1+i)^3=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^3=\left(2\sqrt{2}\right)_{135^\circ}=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-2+2i$.

ii) Según el apartado a), una solución es $z=(1+i)^2=2i$.

Teorema fundamental del álgebra. Raíces de una ecuación polinómica

75. Calcula las raíces de los siguientes polinomios.

a) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 9x$

b) $x^4 + 26x^2 + 25$

c) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 35x^2 + 12x + 60$

d) $x^5 + x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 144x + 144$

a) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 9x = x\left(x^3 - x^2 + 9x - 9\right)$, por tanto una raíz es $x = 0$ y las otras tres son las raíces del polinomio $x^3 - x^2 + 9x - 9$.

Al ser $x^3 - x^2 + 9x - 9$ un polinomio con coeficientes reales, para cada raíz su conjugada también será raíz, por tanto, una de las tres raíces es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como raíz $x = 1$ y $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x-1)(x^2+9)$, por lo que las otras dos raíces se obtienen resolviendo $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = 3i,\ x = -3i$.

b) Resolvemos $x^4 + 26x^2 + 25 = 0$ haciendo el cambio $z = x^2$:

$$z^2 + 26z + 25 = 0 \Rightarrow z = \frac{-26 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-26 \pm 24}{2} = \begin{cases} z = -1 \\ z = -25 \end{cases}.$$

Deshaciendo el cambio obtenemos las cuatro raíces $x = i$, $x = -i$, $x = 5i$ y $x = -5i$.

c) Al ser $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 35x^2 + 12x + 60$ un polinomio con coeficientes reales, para cada raíz su conjugada también será raíz, por tanto, una de las cinco raíces es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como raíz $x = -5$ y $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 35x^2 + 12x + 60 = (x+5)(x^4 + 7x^2 + 12)$, por lo que las otras cuatro raíces se obtienen resolviendo $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$.

Haciendo el cambio $z = x^2$ tenemos $z^2 + 7z + 12 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} z = -3 \\ z = -4 \end{cases}$.

Deshaciendo el cambio obtenemos las cuatro raíces restantes: $x = \sqrt{3}i$, $x = -\sqrt{3}i$, $x = 2i$ y $x = -2i$.

d) Al ser $x^5 + x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 144x + 144$ un polinomio con coeficientes reales, para cada raíz su conjugada también será raíz, por tanto, una de las cinco raíces es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como raíz $x = -1$ y $x^5 + x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 144x + 144 = 0 = (x+1)(x^4 + 25x^2 + 144)$, por lo que las otras cuatro raíces se obtienen resolviendo $x^4 + 25x^2 + 144 = 0$.

Haciendo el cambio $z = x^2$ tenemos $z^2 + 25z + 144 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-25 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{-25 \pm 7}{2} = \begin{cases} z = -9 \\ z = -16 \end{cases}$.

Deshaciendo el cambio obtenemos las cuatro raíces restantes: $x = 3i$, $x = -3i$, $x = 4i$ y $x = -4i$.

76. a) Resuelve en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

b) Si representamos por z_1 la solución en las que la parte imaginaria es positiva y por z_2 la otra solución, escribe en forma polar z_1, z_2 y $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.

a) $$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i}{2} = \begin{cases} z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases}$$

b) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2_{45^\circ}$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{315^\circ}$ y $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\dfrac{2_{45^\circ}}{2_{315^\circ}}\right)^2 = \left(1_{-270^\circ}\right)^2 = \left(1_{90^\circ}\right)^2 = 1_{180^\circ}$

77. **a)** Escribe en forma polar las soluciones de la ecuación: $z^2-2z+2=0$.

b) Deduce del aparatado anterior las soluciones de la ecuación: $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$.

a) $z^2-2z+2=0 \Rightarrow z=\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{2\pm 2i}{2}=\begin{cases} z=1+i=\sqrt{2}_{45^\circ} \\ z=1-i=\sqrt{2}_{315^\circ}\end{cases}$

b) Por el apartado anterior $-iz+3i+3=1+i$ o $-iz+3i+3=1-i$, obtenemos, por tanto, dos soluciones:

$-iz+3i+3=1+i \Rightarrow iz=2+2i \Rightarrow z=\dfrac{2+2i}{i}=2-2i$ y $-iz+3i+3=1-i \Rightarrow iz=2+4i \Rightarrow z=\dfrac{2+4i}{i}=4-2i$.

78. **Para cada número complejo *z* escribimos:**

$$P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1$$

a) Obtén $P(1+i)$.

b) Demuestra que si z_0 es solución de la ecuación $P(z)=0$, entonces $z_0\neq 0$ y $\dfrac{1}{z_0}$ también es solución de dicha ecuación.

c) Obtén las cuatro soluciones de la ecuación $P(z)=0$.

a) $P(1+i)=(1+i)^4-3(1+i)^3+\dfrac{9}{2}(1+i)^2-3(1+i)+1=-4-3(-2+2i)+\dfrac{9}{2}2i-3(1+i)+1=0$

b) Si $P(z_0)=0$ no puede ser $z_0=0$, ya que $P(0)=1$.

Además, si $P(z_0)=0$ tenemos $P\left(\dfrac{1}{z_0}\right)=\dfrac{1}{z_0^{\,4}}-\dfrac{3}{z_0^{\,3}}+\dfrac{9}{2z_0^{\,2}}-\dfrac{3}{z_0}+1=\dfrac{1-3z_0+\frac{9}{2}z_0^{\,2}-3z_0^{\,3}+z_0^{\,4}}{z_0^{\,4}}=\dfrac{P(z_0)}{z_0^{\,4}}=0$.

c) Según los apartados anteriores $z_1=1+i$ y $z_2=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ son soluciones, además, como se trata de una ecuación polinómica con coeficientes reales, el conjugado de cualquier solución también será solución, por lo que las dos raíces restantes son $z_3=1-i$ y $z_4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

79. **Sea *z* un número complejo.**

a) Desarrolla el producto: $(z^2-6z+13)(z^2+4z+13)$

b) Resuelve en $\mathbb{C}$: $z^4-2z^3+2z^2-26z+169=0$

c) Si representamos por z_1 la solución en la que las partes real e imaginaria son positivas, demuestra que las otras soluciones de dicha ecuación son: $\overline{z_1}$, $z_1 i$ y $-\overline{z_1}i$

a) $(z^2-6z+13)(z^2+4z+13)=z^4+4z^3+13z^2-6z^3-24z^2-78z+13z^2+52z+169=z^4-2z^3+2z^2-26z+169$

b) $z^4-2z^3+2z^2-26z+169=0 \Rightarrow (z^2-6z+13)(z^2+4z+13)=0 \Rightarrow z^2-6z+13=0$ o $z^2+4z+13=0$.

De $z^2-6z+13=0$ obtenemos dos soluciones $z=\dfrac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{6\pm 4i}{2}=\begin{cases} z=3+2i \\ z=3-2i\end{cases}$

De $z^2+4z+13=0$ obtenemos las otras dos soluciones $z=\dfrac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\dfrac{-4\pm 6i}{2}=\begin{cases} z=-2+3i \\ z=-2-3i\end{cases}$

c) $z_1=3+2i$, por tanto, $\overline{z_1}=3-2i$, $z_1 i=-2+3i$ y $-\overline{z_1}i=-2-3i$.

80. **a)** Resuelve la ecuación $z^2+z+1=0$ y deduce las soluciones de la ecuación $z^3-1=0$.

b) Si designamos por *w* al número complejo $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

i) Calcula w^2, w^3 y w^{2000}.

ii) Calcula $S=1+w+w^2+...+w^{2000}$.

a) $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\begin{cases} z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

$z^3-1=0 \Rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow z=1,\ z^2+z+1=0 \Rightarrow z=1,\ z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) **i)** Observemos que $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una de las soluciones de $z^2+z+1=0$ y $z^3-1=0$, por tanto,

$w^2=-w-1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w^3=1$ y $w^{2000}=w^{1998}w^2=\left(w^3\right)^{666}w^2=w^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ii) Observemos que la suma $1+w+w^2=0$ se repite 667 veces en los 2001 sumandos de *S*, por tanto,

$S=667(1+w+w^2)=0$.

81. **Considera la ecuación $z^2-4z+a=0$ donde *a* es un número complejo. Determina el valor de *a* para que el número complejo $2+i$ sea solución de dicha ecuación y, sin hacer ningún calculo más, escribe la otra solución de dicha ecuación.**

Si $2+i$ es solución de la ecuación, tenemos $(2+i)^2-4(2+i)+a=0 \Rightarrow 3+4i-8-4i+a=0 \Rightarrow a=5$.

Como los coeficientes de la ecuación son reales, si $2+i$ es una solución, su conjugado, $2-i$ es la otra solución.

82. **Para cada número complejo *z*: $P(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$**

a) Si *b* es un número real, escribe en función de *b* las partes real e imaginaria de $P(ib)$.

b) Deduce que la ecuación $P(z)=0$ admite como soluciones dos números que son imaginarios puros.

c) Encuentra los números reales α y β para los que: $P(z)=(z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)$.

d) Resuelve la ecuación $P(z)=0$.

a) $P(ib)=b^4+10b^3i-38b^2-90bi+261=\left(b^4-38b^2+261\right)+\left(10b^3-90b\right)i$, por tanto, $\mathrm{Re}\left[P(ib)\right]=b^4-38b^2+261$ e $\mathrm{Im}\left[P(ib)\right]=10b^3-90b$.

b) Si $b=3$ o $b=-3$ tenemos $\mathrm{Re}\left[P(ib)\right]=\mathrm{Im}\left[P(ib)\right]=0$, por tanto $z=3i$ y $z=-3i$ son soluciones de $P(z)=0$.

c) $(z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)=z^4+\alpha z^3+\left(\beta+9\right)z^2+9\alpha z+9\beta \Rightarrow \alpha=-10,\ \beta=29$

d) $P(z)=0 \Rightarrow (z^2+9)(z^2-10z+29)=0 \Rightarrow z^2+9=0$ o $z^2-10z+29=0$. De $z^2+9=0$ obtenemos las soluciones ya encontradas en b), $z=3i$ y $z=-3i$, de $z^2-10z+29=0$ encontramos las dos soluciones restantes, $z=5+2i$ y $z=5-2i$.

CUESTIONES

83. Si z es un número complejo tal que $|1+iz|=|1-iz|$, ¿puedes asegurar que z es un número real?

Si $z=a+bi$ tenemos $|1+iz|=|1-iz| \Rightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2}=\sqrt{(1+y)^2+x^2} \Rightarrow (1-y)^2=(1+y)^2 \Rightarrow -2y=2y \Rightarrow y=0$, por lo que, efectivamente, z es un número real.

84. Justifica que si $z \neq 0$ y $z+\frac{1}{z}=1$, entonces $\mathrm{Re}\, z=\frac{1}{2}$.

$z+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow z^2+1=z \Rightarrow z^2-z+1=0 \Rightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, en cualquier caso, $\mathrm{Re}\, z=\frac{1}{2}$.

85. Si z es real, ¿es cierto que $|z|=z$?

No, sólo es cierto si $z > 0$.

86. Para cualquier complejo z, ¿se verifica que $\mathrm{Re}(z^4)=4\,\mathrm{Re}\, z$?

No, por ejemplo, si $z=i$ tenemos $\mathrm{Re}(z^4)=1$ y $4\,\mathrm{Re}\, z=0$.

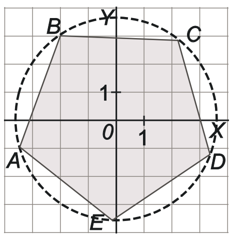
87. Si $z-\overline{z}$ es un número real, ¿qué puedes decir de z?

Recordemos que $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}\, z$, por tanto, si es un número real debe ser $\mathrm{Im}\, z=0$, es decir, z es real.

88. Un polinomio de grado 3, ¿puede tener las tres raíces imaginarias puras?

Sí, por ejemplo, el polinomio $P(z)=(z-i)(z+i)(z-2i)=z^3-2iz^2+z-2i$. La respuesta sería negativa si quisiéramos que además los coeficientes fueran reales, ya que entonces una de las raíces debería ser real.

89. Observa la figura y razona si los afijos correspondientes a los vértices del pentágono pueden corresponder a las raíces quintas de un número real.



Las raíces quintas de un número real positivo tienen como argumento $\frac{0^\circ+360^\circ k}{5}=72^\circ k\ (k=0, 1, 2, 3, 4)$ y las raíces quintas de un número real negativo tienen como argumento $\frac{180^\circ+360^\circ k}{5}=36^\circ+72^\circ k\ (k=0, 1, 2, 3, 4)$. En ninguno de los casos se corresponden con los argumentos de los vértices del pentágono de la figura, por tanto, estos no pueden ser las raíces quintas de un número real.

90. ¿Es cierto que si $z^4 = 1$, entonces $z = 1$ o $z = -1$?

Si $z^4 = 1$, z es una de las raíces cuartas de 1, pero no necesariamente $z = 1$ o $z = -1$, también podría ser $z = i$ o $z = -i$.

91. Justifica que si $w = 2iz$, entonces $\left|\frac{w}{z}\right| = 2$ y $\text{Arg}\left(\frac{w}{z}\right) = 90°$.

$\frac{w}{z} = \frac{2iz}{z} = 2i$, por tanto, $\left|\frac{w}{z}\right| = |2i| = 2$ y $\text{Arg}\left(\frac{w}{z}\right) = \text{Arg}(2i) = 90°$.

92. Si $\left|\frac{w}{z}\right| = 2$ y $\text{Arg}\left(\frac{w}{z}\right) = 90°$, ¿es necesario que $w = 2iz$?

Sí es necesario, ya que si $\left|\frac{w}{z}\right| = 2$ y $\text{Arg}\left(\frac{w}{z}\right) = 90°$ entonces $\frac{w}{z} = 2_{90°} = 2i$, es decir, $w = 2iz$.

93. ¿Es cierto que si *n* es un entero positivo, el complejo $z = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2}$ es un número real?

No, de hecho, z es siempre imaginario puro, ya que $(1+i)^n$ y $(1-i)^n$ son conjugados, por lo tanto,

$$z = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2} = \frac{2i\,\text{Im}\left[(1+i)^n\right]}{2} = i\,\text{Im}\left[(1+i)^n\right].$$

PROBLEMAS

94. Sean *a*, *b*, *c*, *d* números reales. Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$:

a) Calcula el módulo z_1z_2 de dos formas diferentes y demuestra que $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

b) Demuestra que 34 · 122 puede escribirse como la suma de dos cuadrados de números enteros.

a) $|z_1z_2| = |z_1||z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$

$z_1z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \Rightarrow |z_1z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$

Por tanto, $\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

b) $34 \cdot 122 = (5^2 + 3^2)(11^2 + 1^2) = (5 \cdot 11 - 3 \cdot 1)^2 + (5 \cdot 1 + 3 \cdot 11)^2 = 52^2 + 38^2$

95. **a)** Demuestra que el polinomio $P(z) = 2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9$ admite una raíz de la forma $\alpha(1+i)$ siendo α un número real. Determina el valor de α.

b) Demuestra que: $P(z) = 2(z - \alpha(1+i))(z - \alpha(1-i))\left(z^2 - \sqrt{3}z + 3\right)$.

c) Escribe en forma polar todas las raíces de $P(z)$.

a) $P[\alpha(1+i)] = 2[\alpha(1+i)]^4 + 3[\alpha(1+i)]^2 + 3\sqrt{3}[\alpha(1+i)] + 9 = \left(-8\alpha^4 + 3\sqrt{3}\alpha + 9\right) + \left(6\alpha^2 + 3\sqrt{3}\alpha\right)i$

La parte imaginaria se anula si $\alpha = 0$ o $\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, en el primer caso la parte real no se anula, pero sí en el segundo, ya que $-8\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 3\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 9 = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{9}{2} + 9 = 0 \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$ es una raíz de $P(z)$ y $\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Al ser los coeficientes de $P(z)$ números reales, también $\alpha(1-i)$ es raíz de $P(z)$, con lo que se tendrá $P(z) = 2(z - \alpha(1+i))(z - \alpha(1-i))\left(z^2 + bz + c\right)$. Para calcular *b* y *c*, en vez de multiplicar e identificar coeficientes, es mejor dividir $P(z)$ entre $2(z - \alpha(1+i))(z - \alpha(1-i)) = 2z^2 + 2\sqrt{3}z + 3$ para obtener que $z^2 + bz + c = z^2 - \sqrt{3}z + 3$, lo que demuestra b).

c) Las raíces de $P(z)$ son $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+i) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)_{225°}$, $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-i) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)_{135°}$ y

$$z^2 - \sqrt{3}z + 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm 3i}{2} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i = \sqrt{3}_{60°} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i = \sqrt{3}_{300°} \end{cases}.$$

96. En cada uno de los casos siguientes, halla el conjunto de afijos de los *z* que verifican las condiciones dadas:

a) $\lvert z-2\rvert = 3$	**d)** $\lvert z+4i+iz\rvert = 1$	**g)** $\lvert z-3i\rvert = \lvert\bar{z}+1\rvert$
b) $\lvert z-1\rvert = \lvert z+2i\rvert$	**e)** $\lvert z+i\rvert = 1$	**h)** $\lvert z-1+i\rvert = 2$
c) $\lvert\bar{z}+i\rvert = \sqrt{2}$	**f)** $\lvert z\rvert = \lvert 2+z\rvert$	**i)** $\lvert\bar{z}-1+i\rvert = 2$

a) Puntos cuya distancia al punto (2, 0) es 3, es decir, la circunferencia de centro (2, 0) y radio 3.

b) Puntos que equidistan de (1, 0) y de (0, –2), es decir, la mediatriz del segmento de extremos (1, 0) y (0, –2).

c) $\lvert\bar{z}+i\rvert = \lvert\overline{\bar{z}+i}\rvert = \lvert z-i\rvert$, luego la condición dada equivale a $\lvert z-i\rvert = \sqrt{2}$, que representa la circunferencia de centro (0, 1) y radio $\sqrt{2}$.

d) $\lvert z+4i+iz\rvert = \lvert z(1+i)+4i\rvert = \left\lvert(1+i)\left(z+\dfrac{4i}{1+i}\right)\right\rvert = \lvert 1+i\rvert\lvert z+2+2i\rvert = \sqrt{2}\lvert z+2+2i\rvert$, luego la condición dada equivale a $\lvert z+2+2i\rvert = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, que representa la circunferencia de centro (–2, –2) y radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Circunferencia de centro (0, –1) y radio 1.

f) Mediatriz del segmento de extremos (0, 0) y (–2, 0).

g) $\lvert\bar{z}+1\rvert = \lvert z+1\rvert$, luego la condición dada equivale a $\lvert z-3i\rvert = \lvert z+1\rvert$, que representa la mediatriz del segmento de extremos (0, 3) y (–1, 0).

h) Circunferencia de centro (1, –1) y radio 2.

i) $\lvert\bar{z}-1+i\rvert = \lvert\overline{\bar{z}-1+i}\rvert = \lvert z-1-i\rvert$, luego la condición dada equivale a $\lvert z-1-i\rvert = 2$, que representa la circunferencia de centro (1, 1) y radio 2.

97. Para todo número complejo $z \neq 1$, se considera el siguiente complejo $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.

Demuestra que $|z| = 1 \Leftrightarrow w$ es imaginario puro.

Pongamos $z = a + bi$, entonces $w = \dfrac{(a+1)+bi}{(a-1)+bi} = \dfrac{[(a+1)+bi][(a-1)-bi]}{[(a-1)+bi][(a-1)-bi]} = \dfrac{(a^2+b^2-1)-2bi}{(a-1)^2+b^2}$.

Si $|z| = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow a^2+b^2-1 = 0 \Rightarrow w = -\dfrac{2b}{(a-1)^2+b^2}i$ es imaginario puro.

Recíprocamente, si w es imaginario puro, tenemos $\dfrac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} = 0 \Rightarrow a^2+b^2-1 = 0 \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

98. Para cada número complejo $z \neq 2i$ consideramos el número complejo $w = \dfrac{z+1}{z-2i}$. Determina el conjunto de los afijos de los z tales que:

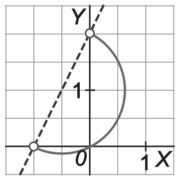
a) w es imaginario puro. **b)** w es un número real. **c)** $\operatorname{Arg} w = \dfrac{\pi}{2}$ **d)** $\operatorname{Arg} w = \dfrac{\pi}{4}$

Pongamos $z = x + yi$, entonces $w = \dfrac{(x+1)+yi}{x+(y-2)i} = \dfrac{[(x+1)+yi][x-(y-2)i]}{[x+(y-2)i][x-(y-2)i]} = \dfrac{(x^2+y^2+x-2y)+(2x-y+2)i}{x^2+(y-2)^2}$.

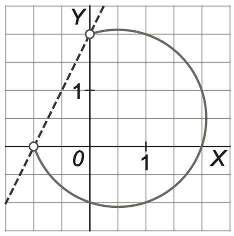
a) Si w es imaginario puro tenemos $x^2+y^2+x-2y = 0$, ecuación de la circunferencia de centro $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ y radio $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Si w es un número real tenemos $2x-y+2 = 0$, ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 2) y (–1, 0).

c) Si $\operatorname{Arg} w = \dfrac{\pi}{2}$, w es imaginario puro y su parte real es positiva, es decir, los afijos buscados son los puntos (x, y) de la circunferencia hallada en a) que además cumplen $2x-y+2 > 0$, es decir, forman el arco de circunferencia representados en la figura.

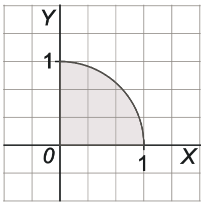


d) Si $\operatorname{Arg} w = \dfrac{\pi}{4}$, la parte real e imaginaria de w coinciden y son positivas, es decir, los afijos buscados son los puntos (x, y) que cumplen $x^2+y^2+x-2y = 2x-y+2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2+y^2-x-y-2 = 0$ y, además, $2x-y+2 > 0$, es decir, forman el arco de circunferencia representados en la figura, de centro $C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$

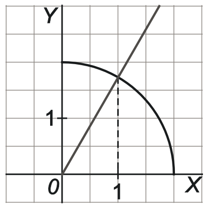


99. *Expresa en forma polar los afijos que están en las zonas coloreadas (excluidas las fronteras).

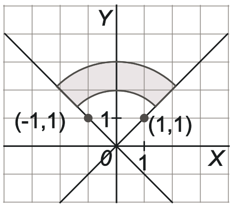
a)



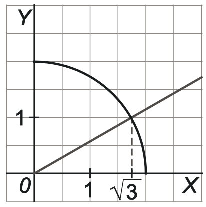
c)



b)



d)



a) r_α con $0 < r < 1$ y $0° < \alpha < 90°$

c) $r_{60°}$ con $r > 0$

b) $1_{45°}$, $1_{135°}$ y r_α con $2 < r < 3$ y $45° < \alpha < 135°$

d) $r_{30°}$ con $r > 2$

100. Al plantearle a un estudiante que resolviera la ecuación $(1+i)z-(3+2i)\overline{z}=1+5i$, el estudiante respondió así:

"Si $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$, por lo que:

$$(1+i)z=(3+2i)(a-bi)+1+5i$$

de donde $z=\dfrac{5a-b+6}{2}+\dfrac{4-a-5b}{2}i$, con lo que, dando a *a* y *b* cualesquiera valores reales, obtenemos infinitos complejos *z* soluciones de dicha ecuación".

a) ¿Qué puedes decir sobre la respuesta del estudiante?

b) Prosigue sus cálculos y halla la respuesta correcta.

a) La respuesta es incorrecta, ya que $z=\dfrac{5a-b+6}{2}+\dfrac{4-a-5b}{2}i$ debe ser precisamente $z=a+bi$, por lo que no vale cualquier par (*a*, *b*) sino aquellos que verifiquen $\dfrac{5a-b+6}{2}=a$ y $\dfrac{4-a-5b}{2}=b$.

b) Continuando el razonamiento anterior:

$$\begin{cases}\dfrac{5a-b+6}{2}=a\\[2mm] \dfrac{4-a-5b}{2}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a-b=-6\\ a+7b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{19}{11}\\[2mm] b=\dfrac{19}{11}\end{cases}\Rightarrow z=-\frac{19}{11}+\frac{19}{11}i$$

PARA PROFUNDIZAR

101. Si el afijo de $z=x+iy$ está alineado con los afijos de *i* y de *iz*, ¿qué relación existe entre *x* e *y*?

$z=x+iy\Rightarrow iz=-y+ix$ y nos piden la relación entre *x* e *y* sabiendo que los puntos *A*(*x*, *y*), *B* (0, 1) y *C* (–*y*, *x*) están alineados.

De este modo, $\dfrac{-x}{-y-x}=\dfrac{1-y}{x-y}\Rightarrow x^2+y^2-x-y=0$, es decir, (*x*, *y*) son las coordenadas de un punto de la circunferencia de centro $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ y radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

102. Si z y w son dos números complejos cualesquiera, demuestra que $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$ e interpreta geométricamente el resultado.

$$|z+w|^2=(z+w)\left(\overline{z+w}\right)=(z+w)\left(\bar{z}+\bar{w}\right)=z\bar{z}+z\bar{w}+w\bar{z}+w\bar{w}=|z|^2+z\bar{w}+w\bar{z}+|w|^2$$

$$|z-w|^2=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=(z-w)\left(\bar{z}-\bar{w}\right)=z\bar{z}-z\bar{w}-w\bar{z}+w\bar{w}=|z|^2-z\bar{w}-w\bar{z}+|w|^2$$

Sumando se obtiene $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$

Como $|z-w|$ representa la distancia entre los afijos de z y w y $|z+w|$ representa la distancia entre los afijos de z y $-w$, $|z+w|^2+|z-w|^2$ representa la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo cuyos lados son $|z|$ y $|w|$. Así pues, en cualquier paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados.

103. Encuentra los menores enteros positivos m y n que verifican que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^m=(1-i)^n$.

$$1+i\sqrt{3}=2_{60^\circ}\Rightarrow\left(1+i\sqrt{3}\right)^m=\left(2^m\right)_{60^\circ m}\ \text{ y }\ 1-i=\sqrt{2}_{315^\circ}\Rightarrow(1-i)^n=\left(\sqrt{2}^n\right)_{315^\circ n}$$

Para que ambos números sean iguales debe verificarse que $2^m=\sqrt{2}^n\Rightarrow n=2m$ y que $315^\circ n-60^\circ m$ sea múltiplo de 360º, es decir, $630^\circ m-60^\circ m=570^\circ m$ debe ser múltiplo de 360º, el menor entero para el que esto sucede es $m=12$ y, por tanto, $n=24$.

104. Si z_1 y z_2 son dos números complejos de módulo 1, demuestra que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ es un número real no negativo.

Como $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=\dfrac{z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+2z_1z_2}{z_1z_2}=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}+2$, basta demostrar que $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ es un número real mayor o igual que –2.

Para ello observemos que $\dfrac{z_1}{z_2}$ y $\dfrac{z_2}{z_1}$ son dos números complejos inversos y de módulo 1, por lo que deben ser conjugados, pongamos $\dfrac{z_1}{z_2}=w$ y $\dfrac{z_2}{z_1}=\bar{w}$, así $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=2\operatorname{Re}w$ es un número real.

Por otra parte, como w tiene módulo 1, tenemos $\operatorname{Re}w\geq-1$, por lo que $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=2\operatorname{Re}w\geq-2$.

105. Demuestra que para cualquier entero positivo n se verifican estas dos igualdades:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\qquad\qquad\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...=2^{\frac{n}{2}}\,sen\,\frac{n\pi}{4}$$

Sea el número complejo $z=1+i=\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$. Por un lado, $z^n=\left(\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}^n\right)_{\frac{n\pi}{4}}=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$.

Por otra parte, desarrollando por el binomio de Newton:

$$z^n=(1+i)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\binom{n}{4}i^4+...+\binom{n}{n}i^n=\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...\right]+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...\right]i$$

Igualando las partes reales e imaginarias de ambas expresiones obtenemos las igualdades deseadas:

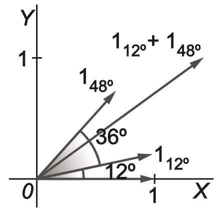
$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\qquad\qquad\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...=2^{\frac{n}{2}}\,sen\,\frac{n\pi}{4}$$

106. Si z no es 1 y verifica la ecuación $z^3 = 1$, calcula $\left(1 - z + z^2\right)\left(1 + z - z^2\right)$.

Como $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$, si $z^3 = 1$ y $z \neq 1$ tendemos $z^2 + z + 1 = 0$, por tanto, $1 - z + z^2 = -2z$ y $1 + z - z^2 = -2z^2$, con lo que $\left(1 - z + z^2\right)\left(1 + z - z^2\right) = 4z^3 = 4$.

107. Calcula la parte imaginaria del complejo:

$$z = \left(\cos 12^\circ + i \,\text{sen}\, 12^\circ + \cos 48^\circ + i \,\text{sen}\, 48^\circ\right)^6$$



Queremos calcular la parte imaginaria de $z = \left(1_{12^\circ} + 1_{48^\circ}\right)^6$, para ello, observemos que $48^\circ - 12^\circ = 36^\circ$, por lo que el argumento de $1_{12^\circ} + 1_{48^\circ}$ es $12^\circ + \dfrac{36^\circ}{2} = 30^\circ$ (ver figura).

Por tanto, $1_{12^\circ} + 1_{48^\circ} = r_{30^\circ}$ y $z = \left(r_{30^\circ}\right)^6 = \left(r^6\right)_{180^\circ}$, con lo que $\text{Im}\, z = 0$.

108. Sea $z_0 = \cos 72^\circ + i \,\text{sen}\, 72^\circ$.

a) Comprueba que z_0 es raíz del polinomio $P(z) = z^5 - 1$.

b) Prueba la relación:

$$\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) - 1 = 0$$

c) Comprueba que $z_0 + \dfrac{1}{z_0} = 2\cos 72^\circ$ y demuestra que $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

d) Construye un pentágono regular utilizando solamente el compás y una regla no graduada, basándote en los resultados de los apartados anteriores.

a) $z_0 = \cos 72^\circ + i \,\text{sen}\, 72^\circ = 1_{72^\circ} \Rightarrow P(z_0) = z_0^{\,5} - 1 = 1_{360^\circ} - 1 = 1 - 1 = 0$

b) Como $P(z) = z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ y $z_0 \neq 1$, tenemos $z_0^{\,4} + z_0^{\,3} + z_0^{\,2} + z_0 + 1 = 0$.

Como $z_0 \neq 0$ podemos dividir por $z_0^{\,2}$ para obtener:

$$z_0^{\,2} + z_0 + 1 + \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0^{\,2}} = 0 \Rightarrow z_0^{\,2} + \frac{1}{z_0^{\,2}} + z_0 + \frac{1}{z_0} + 1 = 0 \Rightarrow \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) - 1 = 0$$

c) Como $|z_0| = 1$ tenemos $\dfrac{1}{z_0} = \overline{z_0}$ y, por tanto, $z_0 + \dfrac{1}{z_0} = \left(\cos 72^\circ + i \,\text{sen}\, 72^\circ\right) + \left(\cos 72^\circ - i \,\text{sen}\, 72^\circ\right) = 2\cos 72^\circ$.

De este modo, según el apartado anterior, $2\cos 72^\circ$ es la solución positiva de la ecuación $z^2 + z - 1 = 0$, es decir, $2\cos 72^\circ = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, de donde $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

d) Una vez que tenemos que $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$ y, dado que el ángulo central en un pentágono regular es $\alpha = 72^\circ$, tomando como un vértice del pentágono regular el punto $A(1, 0)$, la construcción de un vértice adyacente es inmediata sin más que construir con el compás $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ y posteriormente $\sqrt{5} - 1$ sobre el eje X.

Dividiendo este último segmento en cuatro partes iguales, levantamos una perpendicular por la primera división y el punto donde corte a la circunferencia centrada en el origen y radio 1 es el vértice buscado.

ENTORNO MATEMÁTICO

Peleas matemáticas

Hoy en clase, Iván y Sara han tenido una fuerte discusión porque ambos decían haber resuelto antes un difícil problema de geometría. El profesor ve que su alta competitividad puede eclipsar su talento para las matemáticas y, a pesar de que a ellos no les hace ninguna gracia, les propone un ejercicio:

Estamos trabajando con números que son una herramienta fundamental en multitud de campos científicos y técnicos. En sus inicios, produjeron una amarga pelea entre dos grandes matemáticos del renacimiento italiano: Cardano y Tartaglia que, a pesar de su ingenio, no supieron reconocer en el otro a un matemático equiparable a ellos. Quiero que reflexionéis sobre esto y que trabajéis sobre el siguiente problema:

Un buen ejemplo de la utilidad de estos números, que llamamos imaginarios, es la resolución de la ecuación cúbica $x^3 + px = q$ que Tartaglia enunció así:

"Para resolver la ecuación $x^3 + px = q$, halla dos números cuya resta sea q y cuyo producto sea $\left(\frac{p}{3}\right)^3$. La solución será la diferencia de las raíces cúbicas de ambos."

En efecto, dados dos números cualesquiera u y v, tenemos que:

$$u^3 - v^3 = (u-v)^3 + 3(u-v)^2 v + 3(u-v)v^2$$

Extrayendo factor común y operando resulta:

$$u^3 - v^3 = (u-v)^3 + 3(u-v)v\left[(u-v)+v\right] = (u-v)^3 + 3(u-v)uv$$

y llamando $x = u - v$, se llega a $x^3 + 3uvx = u^3 - v^3$, que se parece mucho a nuestra ecuación. Basta elegir u y v con la condición: $\begin{cases} 3uv = p \\ u^3 - v^3 = q \end{cases}$. De esta manera, $x = u - v$ será la solución buscada.

Vuestra tarea es revisar el método de Tartaglia, aplicarlo a la resolución de la ecuación $x^3 - 15x = 4$, identificar esos números imaginarios y explicar a vuestros compañeros como lo habéis manejado.

¿Eres capaz de resolver el problema que han planteado a Iván y Sara?

Se quiere resolver el sistema $\begin{cases} 3uv = -15 \\ u^3 - v^3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = -5 \\ u^3 - v^3 = 4 \end{cases}$, para ello, se despeja en la primera ecuación $v = -\frac{5}{u}$ y se sustituye en la segunda para obtener $u^3 - \left(-\frac{5}{u}\right)^3 = 4 \Rightarrow u^3 + \frac{125}{u^3} = 4$.

Llamando $z = u^3$ tenemos $z + \frac{125}{z} = 4 \Rightarrow z^2 - 4z + 125 = 0$ y es al resolver esta ecuación cuando aparecen los números complejos, ya que las soluciones son $z = 2 + 11i$ y $z = 2 - 11i$.

Tomando, por ejemplo, $z = 2 + 11i$ (si se tomara $z = 2 - 11i$ el resultado final sería el mismo), se tiene $u^3 = 2 + 11i$, con lo que se pueden calcular las tres raíces cúbicas de $2 + 11i$, u_1, u_2 y u_3, calcular los correspondientes $v_1 = -\frac{5}{u_1}$, $v_2 = -\frac{5}{u_2}$ y $v_3 = -\frac{5}{u_3}$ y encontrar así las tres soluciones $x_1 = u_1 - v_1$, $x_2 = u_2 - v_2$ y $x_3 = u_3 - v_3$.

Para simplificar los cálculos basta observar que $|2 + 11i| = \sqrt{125} = 5^{\frac{3}{2}}$, por lo que las raíces cúbicas de $2 + 11i$ tienen módulo $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$. Así, si u es una de estas raíces cúbicas, tendremos $v = -\frac{5}{u} = -\frac{5\bar{u}}{|u|^2} = -\bar{u}$ y $u - v = u + \bar{u} = 2\mathrm{Re}(u)$.

Esto prueba, en particular, que las tres soluciones de $x^3 - 15x = 4$ van a ser reales.

Solo se necesita encontrar una raíz cúbica u_1 de $2+11i$, ya que entonces se tendrá $u_2 = u_1 \cdot 1_{120°} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)u_1$ y $u_3 = u_2 \cdot 1_{240°} = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)u_1$.

Se calcula por tanto una raíz cúbica u_1 de $2+11i$, para ello sea $\alpha = \text{Arg}(2+11i)$ el ángulo del primer cuadrante tal que $\text{tg}\,\alpha = \frac{11}{2}$ ($\alpha \simeq 79,695°$), entonces $u_1 = \sqrt{5}_{\frac{\alpha}{3}} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\alpha}{3} + i\,\text{sen}\frac{\alpha}{3}\right) = 2+i$.

Estos cálculos, que son los que hay que realizar con más cuidado si se desea obtener la respuesta correcta, se pueden evitar si se tiene en cuenta que $z_1 = 2+i$ es una raíz cúbica de $2+11i$, ya que $(2+i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot i + 3\cdot 2^2 \cdot i^2 + i^3 = 2+11i$.

Las soluciones de $x^3 - 15x = 4$ son, por tanto: $x_1 = 2\text{Re}\,u_1 = 2\text{Re}(2+i) = 4$, $x_2 = 2\text{Re}\,u_2 = 2\text{Re}\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+i)\right] = -2-\sqrt{3}$ y $x_3 = 2\text{Re}\,u_3 = 2\text{Re}\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+i)\right] = -2+\sqrt{3}$.

El conjunto más bello de las matemáticas

Ana está preocupada, tiene que estudiar para el examen de matemáticas y debe hacer una composición para la asignatura de dibujo, pero no sabe si le va a dar tiempo. De camino al instituto se lo comenta a su compañero Javier, un "friki" de los ordenadores. Sorprendentemente, Javier se echa a reír y le dice "no te preocupes, puedes hacer las dos cosas a la vez". Ana cree que se está riendo de ella y está a punto de dejarle con la palabra en la boca, pero Javier comenta: "Lo digo en serio, se pueden conseguir gráficos espectaculares utilizando los números complejos que tienes que estudiar para mates". Y comienza a explicarle como hacerlo:

A partir de un número complejo *z* debes hacer dos sucesiones: $\begin{cases} z_1 = z \\ z_{n+1} = z_n^{\,2} + z \end{cases}$, y la que forman sus módulos $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$,…

Para un número inicial *z*, puede ocurrir que la sucesión de módulos esté acotada o no lo esté. En el primer caso *z* pertenece al llamado conjunto de Mandelbrot y su afijo correspondiente se colorea de negro. En el segundo caso, *z* no pertenece a dicho conjunto y el punto no se colorea.

Por ejemplo, para $z = 1$ la sucesión de los módulos es 1, 2, 5, 26, 677,… que no es acotada y, por tanto, el punto (1, 0) es blanco. Sin embargo, si se toma $z = -1$, la sucesión de módulos es 1, 0, 1, 0, 1,… que sí es acotada y el afijo de *z*, (–1, 0), es negro. Repitiendo este proceso para un número suficiente de puntos iniciales llegarías a la figura de la derecha.

Si quieres dibujos con distintas tonalidades, como el de la izquierda, puedes dar una coloración distinta según la velocidad a la que crecen los módulos de los términos de la sucesión. En la figura, los valores de *z* para los que la sucesión crece más rápido son de un rojo más intenso que aquellos que llevan a un crecimiento más lento.

Ana decide hacer un gráfico con el conjunto de Mandelbrot. Ayúdala hallando los tres primeros términos de la sucesión para $z = 1+2i$, $z = 3i$ y $z = -1-2i$ y decide cuál de ellos tendrá un rojo más oscuro en la representación.

Si $z = 1+2i$ obtenemos $|z_1| = |1+2i| = \sqrt{5}$, $|z_2| = |-2+6i| = \sqrt{40}$ y $|z_3| = |-31-22i| = \sqrt{1445}$

Si $z = 3i$ obtenemos $|z_1| = |3i| = \sqrt{9}$, $|z_2| = |-9+3i| = \sqrt{90}$ y $|z_3| = |72-51i| = \sqrt{7785}$

Si $z = -1-2i$ obtenemos $|z_1| = |-1-2i| = \sqrt{5}$, $|z_2| = |-4+2i| = \sqrt{20}$ y $|z_3| = |11-18i| = \sqrt{445}$

Ninguna de las tres sucesiones está acotada, la que crece más rápido y se representará con un rojo más intenso es la correspondiente a $z = 3i$, la que crece más despacio y se representará con un rojo menos intenso es la correspondiente a $z = -1-2i$.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Escribe en forma binómica el complejo $z = \dfrac{4-i}{1+2i}$.

$$z = \frac{4-i}{1+2i} = \frac{(4-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-9i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{9}{5}i$$

2. Calcula el módulo y el argumento de $z = \dfrac{-1+i}{-3\sqrt{3}+3i}$.

$-1+i = \sqrt{2}_{135^\circ}$ y $-3\sqrt{3}+3i = 6_{150^\circ}$, por tanto, $z = \dfrac{\sqrt{2}_{135^\circ}}{6_{150^\circ}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)_{-15^\circ} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)_{345^\circ}$, es decir, el módulo de z es $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ y su argumento es 345º.

3. Si $z = x + iy$, calcula en términos de x e y el conjugado de: $w = \dfrac{1-z}{1+i}$.

$$w = \frac{1-x-iy}{1+i} = \frac{(1-x-iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-x-y)-(1-x+y)}{2} = \frac{1-x-y}{2} - \frac{1-x+y}{2}i \Rightarrow \overline{w} = \frac{1-x-y}{2} + \frac{1-x+y}{2}i$$

4. Determina el conjunto M de los afijos de los $z = x + iy$ tales que $w = iz^2 - (1+i)z + 1$ es un número real.

Tenemos $w = i(x+iy)^2 - (1+i)(x+iy) + 1 = (-2xy - x + y + 1) + (x^2 - y^2 - x - y)i$, por tanto, w será un número real si $x^2 - y^2 - x - y = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y-1) = 0$, es decir, el conjunto M está formado por los puntos de las rectas $x + y = 0$ y $x - y - 1 = 0$.

5. Si $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{4}$ y $z_2 = 1 - i$, escribe en forma trigonométrica z_1, z_2 y $\dfrac{z_1}{z_2}$.

$z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{330^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ\right)$, $z_2 = \left(\sqrt{2}\right)_{315^\circ} = \sqrt{2}\left(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ\right)$ y $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2}\left(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ\right)$.

6. Escribe, en forma polar, las raíces cúbicas de *i*.

$i = 1_{90^\circ}$, por tanto, las raíces cúbicas de son $z_1 = 1_{30^\circ}$, $z_2 = 1_{150^\circ}$ y $z_3 = 1_{270^\circ}$.

7. Describe el conjunto de los números complejos *z* tales que $|z - i| = \sqrt{10}$.

Es una circunferencia de centro (0, 1) y radio $\sqrt{10}$.

8. Desarrolla el producto $(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)$ y resuelve la ecuación $z^4+4z^3+6z^2+4z=15$.

$(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)=z^4+4z^3+6z^2+4z-15$, por tanto, las soluciones de $z^4+4z^3+6z^2+4z=15$ son las soluciones de $z^2+2z-3=0$ y $z^2+2z+5=0$, es decir, $z=1$, $z=-3$, $z=-1+2i$ y $z=-1-2i$.

9. Si un vértice de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia centrada en el origen es el punto $A\left(6, \frac{7}{4}\right)$, calcula los otros dos.

Los otros dos vértices se obtienen girando A respecto del origen 120º y 240º, es decir, son los afijos de los complejos que se obtienen al multiplicar $6+\frac{7}{4}i$ por $1_{60°}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y por $1_{120°}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Así:

$$\left(6+\frac{7}{4}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-3-\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)+\left(3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)i \Rightarrow B\left(-3-\frac{7\sqrt{3}}{8}, 3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)$$

$$\left(6+\frac{7}{4}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-3+\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)+\left(-3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)i \Rightarrow C\left(-3+\frac{7\sqrt{3}}{8}, -3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)$$

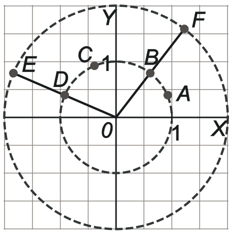
10. Si $q(z)=2z^2-12z+26$, ¿puedes afirmar que para todo $z\in\mathbb{C}$ se verifica que $q(z)$ es siempre positivo como ocurre con $p(x)=2x^2-12x+26$ si x es cualquier número real?

No, ya que $q(z)$ puede tomar valores complejos, por ejemplo, $q(i)=2i^2-12i+26=24-12i$, y para estos números no tiene sentido hablar de si son positivos o negativos.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. El producto de los números complejos cuyos afijos son los puntos *A* y *C* del dibujo es el complejo de afijo:



A. *E* **B.** *B* **C.** *F* **D.** *D*

Como *A* y *C* tienen módulo 1, su producto tendrá también módulo 1 y el argumento del producto será la suma de los argumentos de *A* y *C*, es decir, la respuesta correcta es D.

2. Si $S=\{z\in\mathbb{C}$ tales que $(3+4i)z\in\mathbb{R}\}$, los afijos de z constituyen:

A. Un triángulo equilátero

B. Una circunferencia

C. Una recta

D. Una parábola

Si $z=x+iy$ tenemos $(3+4i)z=(3+4i)(x+iy)=(3x-4y)+(3y+4x)i$, que será un número real si $3y+4x=0$, es decir, la respuesta correcta es C.

3. El valor de $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}$ es:

A. 0 **B.** –1 **C.** –*i* **D.** *i*

$(1+i)^{20}-(1-i)^{20}=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^{20}-\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^{20}=\left(2^{10}\right)_{900^\circ}-\left(2^{10}\right)_{6300^\circ}=\left(2^{10}\right)_{180^\circ}-\left(2^{10}\right)_{180^\circ}=0$, es decir, la respuesta correcta es A.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Si z_0 es una solución de la ecuación $z^2-(1+i)=0$, entonces:

A. $|z_0|^2=2$

B. $|z_0|^2=\sqrt{2}$

C. $(\mathrm{Re}\,z_0)^2-(\mathrm{Im}\,z_0)^2=1$

D. $\overline{z_0}$ también es solución de dicha ecuación.

Como z_0 es una raíz cuadrada de $1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}$, tenemos que $z_0=\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}}$ o $z_0=\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}+180^\circ}$.

En ambos casos, $|z_0|^2=\sqrt{2}$, es decir, A es falsa y B verdadera. Además, al ser $\cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right)=-\cos\left(\frac{45^\circ}{2}+180^\circ\right)$ y $\mathrm{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right)=\mathrm{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}+180^\circ\right)$, en los dos casos el valor de $(\mathrm{Re}\,z_0)^2-(\mathrm{Im}\,z_0)^2$ es el mismo, en concreto $(\mathrm{Re}\,z_0)^2-(\mathrm{Im}\,z_0)^2=\left(\sqrt[4]{2}\cos\frac{45^\circ}{2}\right)^2-\left(\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\frac{45^\circ}{2}\right)^2=\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{45^\circ}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{45^\circ}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 45^\circ=1$, por lo que C también es cierta.

Finalmente, D es falsa, ya que las dos soluciones de la ecuación, $\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}}$ y $\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}+180^\circ}$ no son conjugadas.

5. Para cada entero positivo *n* consideremos el número complejo $z_n=(1+i\sqrt{3})^n-(1-i\sqrt{3})^n$. Entonces, para cualquier valor de *n* podemos asegurar que:

A. z_n es un número real.

B. z_n es un número imaginario puro.

C. $z_n=2^n$

D. $z_n=-\overline{z_n}$

Como $1+i\sqrt{3}$ y $1-i\sqrt{3}$ son conjugados, también lo son $(1+i\sqrt{3})^n$ y $(1-i\sqrt{3})^n$ y, por tanto, z_n es un número imaginario puro, es decir, A y C son falsas y B verdadera.

Por otro lado, $\overline{z_n}=\overline{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n-\left(1-i\sqrt{3}\right)^n}=\left(\overline{1+i\sqrt{3}}\right)^n-\left(\overline{1-i\sqrt{3}}\right)^n=\left(1-i\sqrt{3}\right)^n-\left(1+i\sqrt{3}\right)^n=-z_n$, es decir, D también es verdadera.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Considera la ecuación $P(z)=0$, donde $P(z)$ es un polinomio de grado tres con coeficientes reales y las dos afirmaciones siguientes:

1. $2-3i$ es solución de dicha ecuación.

2. $-2+3i$ es solución de dicha ecuación.

Entonces:

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

Si se verifica 1, entonces $2+3i$ también será solución de la ecuación y la tercera solución será un número real, por lo que no se cumple 2.

Análogamente, si se verifica 2, entonces $-2-3i$ también será solución de la ecuación y la tercera solución será un número real, por lo que no se cumple 1.

Es decir, la relación correcta es D.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Sea $P(z)=z^3+az^2+bz+c$ un polinomio con coeficientes reales. Para determinar los números *a*, *b* y *c* nos dan los siguientes datos:

1. $z_1=2+i$ es una raíz de $P(z)$.

2. $c=5a+20$.

3. Si z_1, z_2 y z_3 son las raíces de $P(z)$ entonces $(z_1z_2z_3)^2=100$.

4. Una de las raíces es un número positivo.

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

El dato 2 se deduce del dato 1, por lo que puede eliminarse. En efecto, si $z_1=2+i$ es una raíz de $P(z)$ tenemos:

$$P(z_1)=0 \Rightarrow (2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)+c=0 \Rightarrow (2+3a+2b+c)+(11+4a+b)i=0 \Rightarrow \begin{cases} 2+3a+2b+c=0 \\ 11+4a+b=0 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 2 y restándole la primera ecuación obtenemos $c=5a+20$.

Veamos que los datos 1, 3 y 4 permiten calcular *a*, *b* y *c*. En efecto:

Como los coeficientes de $P(z)$ son reales, por el dato 1 las soluciones serán $2+i$, $2-i$ y r real. Del dato 3 deducimos que $[(2+i)(2-i)r]^2=100 \Rightarrow 25r^2=100 \Rightarrow r^2=4$, con lo que, según el dato 4, $r=2$.

Por tanto, $P(z)=(z-2-i)(z-2+i)(z-2)=z^3-6z^2+13z-10$, es decir, $a=-6$, $b=13$ y $c=-10$.