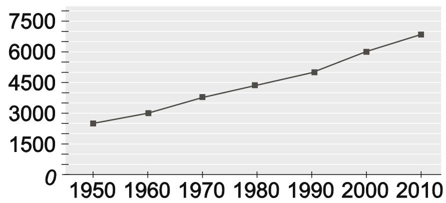
8 Funciones, límites y continuidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

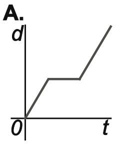
1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Dibuja la gráfica de la función que refleja la población mundial de la tabla de la página anterior.

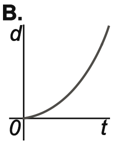


4. Las siguientes gráficas representan la distancia a casa en función del tiempo. ¿Cuál de ellas refleja mejor la siguiente situación: “Salí de casa y tuve que volver al darme cuenta de que había olvidado el atlas"?

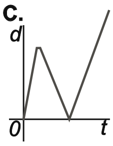
A.



B.



C.



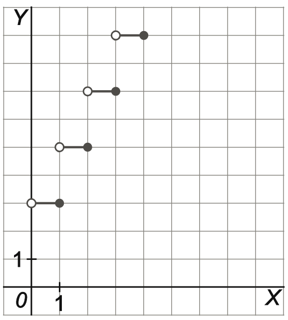
La gráfica que mejor refleja la situación es la c.

5. La tarifa de un aparcamiento es de 3 € la primera hora más 2 € por cada hora o fracción adicional. Representa de todas las formas posibles la función que da el precio del estacionamiento durante las seis horas que puede estar aparcado un coche.

Fórmula

$$f(t)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0<t\le 1 \\ 5 & \text{si} \quad 1<t\le 2 \\ 7 & \text{si} \quad 2<t\le 3 \\ 9 & \text{si} \quad 3<t\le 4 \\ 11 & \text{si} \quad 4<t\le 5 \\ 13 & \text{si} \quad 5<t\le 6 \end{cases}$$

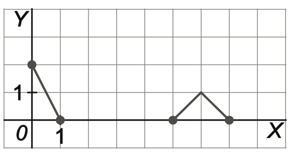
Gráfica



Tabla

Tiempo (en horas)	(0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]
Precio (en euros)	3	5	7	9	11	13

6. Dibuja una posible gráfica para una función *f* siendo $D(f)=[0,1]\cup[5,7]$ y $R(f)=[0,2]$.



Respuesta abierta, por ejemplo, la representada en la gráfica.

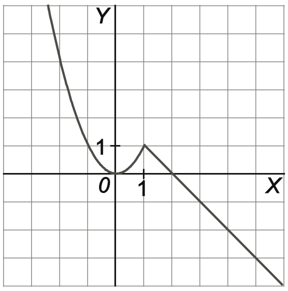
7. Dibuja la gráfica de estas funciones.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1 \\ -x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

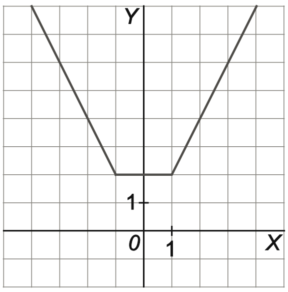
b) $f(x)=|x+1|+|x-1|$

c) $f(x)=x+[x]$, $[x]$ indica la "parte entera de x"

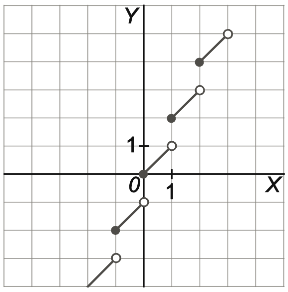
a)



b)

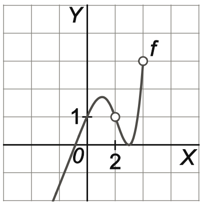


c)



8. Halla el dominio y el recorrido de las funciones:

a)

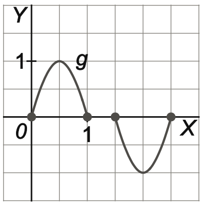


b) $f(x)=x^2+1$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x-6}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

e)



f) $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

h) $f(x)=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$

a) $D(f)=(-\infty,\,2)\cup(2,\,4)$ y $R(f)=(-\infty,\,3)$.

b) $D(f)=\mathbb{R}$. Como $x^2\ge 0$, $R(f)=[1,\,+\infty)$.

c) $D(f)=\mathbb{R}-\{6\}$. Como la ecuación $a=\dfrac{1}{x-6}$ tiene solución si $a\ne 0$, $R(f)=\mathbb{R}-\{0\}$.

d) Para que exista la raíz debe ser $x^2-2x\ge 0$, por tanto, $D(f)=(-\infty,\,0]\cup[2,\,+\infty)$.Como x^2-2x puede tomar cualquier valor real, $R(f)=[0,\,+\infty)$.

e) $D(f)=[0,\,1]\cup[1{,}5;\,2{,}5]$ y $R(f)=[-1,\,1]$.

f) Como x^2+x+2 es siempre positivo, $D(f)=\mathbb{R}$. Como $x^2+x+2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$, $R(f)=\left[\dfrac{\sqrt{7}}{2},\,+\infty\right)$.

g) $D(f)=(0,\,+\infty)$ y $R(f)=(0,\,+\infty)$.

h) Para que exista la raíz debe ser $1-x^2\ge 0$ y $x^2-1\ge 0$, por tanto, $D(f)=\{-1,\,1\}$ y $R(f)=\{0\}$.

9. Sean las funciones $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $g(x)=\sqrt{x+3}$ y $h(x)=x^2-4$. Halla la expresión y el dominio de:

a) $\dfrac{g}{h}$ **b)** $f\circ g$ **c)** $g\circ f$ **d)** $f\circ g\circ h$

Observemos que: $D(f)=\mathbb{R}$, $D(g)=[-3,+\infty)$ y $D(h)=\mathbb{R}$

a) $\left(\dfrac{g}{h}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$, $D\left(\dfrac{g}{h}\right)=[-3,+\infty)-\{-2,2\}$

b) $(f\circ g)(x)=f\left(\sqrt{x+3}\right)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+2}$, $D(f\circ g)=[-3,+\infty)-\{-2\}$

c) $(g\circ f)(x)=g\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=\sqrt{\dfrac{3x^2+x-3}{x^2-1}}$, $D(g\circ f)=\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{37}}{6}\right]\cup(-1,1)\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{37}}{6},+\infty\right)$

d) $(f\circ g\circ h)(x)=(f\circ g)\left(x^2-4\right)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-2}$, $D(f\circ g\circ h)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)-\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$

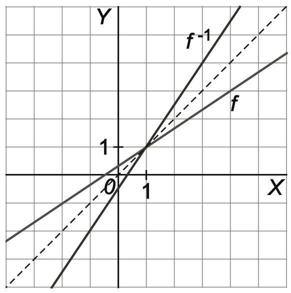
10. Obtén el dominio de la función inversa de $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$.

$D(f^{-1})=R(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

11. Calcula la inversa de $f(x)=\dfrac{2x+1}{3}$, dibuja las gráficas de f y f^{-1} y comprueba que $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$.

$y=\dfrac{2x+1}{3}\Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{2}$

Ambas funciones son rectas y sus gráficas son las que se ven en la figura.



$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)=\dfrac{2\cdot\dfrac{3x-1}{2}+1}{3}=x$

$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)=\dfrac{3\cdot\dfrac{2x+1}{3}-1}{2}=x$

12. Sea $f(x)=x^5-x+1$. Usa la calculadora y aproxima $f^{-1}(10)$.

$f(1)=1$ y $f(2)=31$, por tanto, $f^{-1}(10)$ está entre 1 y dos. Realizando mejores aproximaciones tenemos $f(1,5)\simeq 7,09$; $f(1,6)\simeq 9,89$; $f(1,61)\simeq 10,21$ y $f(1,605)\simeq 10,05$, por tanto, $f^{-1}(10)$ está entre 1,6 y 1,605.

13. Ejercicio interactivo.

14. Ejercicio resuelto.

15. Para cada función, haz una tabla de valores adecuada para obtener los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[5]{5x-3}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}\,3x}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

a)

x	0,99	0,999	1,001	1,01
$f(x)$	0,5025126	0,50025013	0,49975012	0,49751244

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$

b)

x	6,99	6,999	7,001	7,01
$f(x)$	1,9993746	1,9999375	2,0000625	2,00062461

$\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[5]{5x-3}=2$

c)

x	3,99	3,999	4,001	4,01
$f(x)$	3,9974984	3,99974998	4,00024998	4,00249844

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=4$

d)

x	-0,01	-0,001	0,001	0,01
$f(x)$	3,0009003	3,000009	3,000009	3,00090032

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}\,3x}{x}=3$

e)

x	1,99	1,999	2,001	2,01
$f(x)$	1,4000357	1,41279899	1,41562742	1,42832069

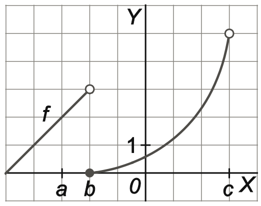
$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2}$

f)

x	7,99	7,999	8,001	8,01
$f(x)$	11,994999	11,9995	12,0005	12,0049986

$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=12$

16. Dada la función de la figura, calcula $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ y los límites laterales y el límite de f en a, b y c.

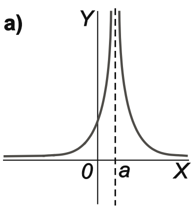


$f(a)=2$, $f(b)=0$ y $f(c)$ no existe.

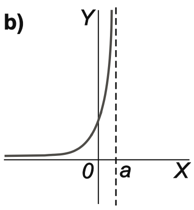
$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to b}f(x)$ no existe, $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=5$, $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)$ no existe y $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ no existe.

17. Halla $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ en estas funciones.

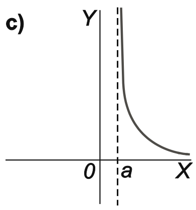
a)



b)



c)



a) $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ no existe.

c) $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ no existe, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$.

18. Dados los siguientes límites, estima su valor utilizando una tabla de valores o su gráfica.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{x+1}{(5-x)^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 7^-} \frac{x+2}{7-x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

En todos los caso el denominador se acerca a cero y el numerador no. Así pues, la función se hará muy grande en valor absoluto. Solo debemos decidir qué signo tendrá.

a) Si x se aproxima a 2 por su izquierda, el numerador es positivo y el denominador negativo, por tanto, $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

b) Si x se aproxima a 7 por su izquierda, el numerador y el denominador son positivos, por tanto, $\lim\limits_{x\to 7^-} \frac{x+2}{7-x} = +\infty$.

c) Si x se aproxima a –1, tanto por su izquierda como por su derecha, el numerador es negativo y el denominador positivo, por tanto, $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4} = -\infty$.

d) Si x se aproxima a 3 por su derecha, el numerador y el denominador son positivos, por tanto, $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty$.

e) Si x se aproxima a 5 por su derecha, el numerador es positivo y el denominador negativo, por tanto, $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{x+1}{(5-x)^3} = -\infty$.

f) Si x se aproxima a 4, tanto por su izquierda como por su derecha, el numerador y el denominador son positivos, por tanto, $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$.

19. Ejercicio resuelto.

20. Estima el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x^2+1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^3+3x^2}{2x^3+8}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x+1}{3x-2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1+7^x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x+1}{6x^3+2x-3}$

a) $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$, que, por ejemplo, para $x = 1000$ vale $0{,}001000999 \simeq 0$. Así, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$.

b) $\frac{5x+1}{3x-2} = \frac{\frac{5x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}} = \frac{5+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}}$, que, por ejemplo, para $x = 1000$ vale $\frac{5{,}001}{2{,}998} \simeq \frac{5}{3}$.Así, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x+1}{3x-2} = \frac{5}{3}$.

c) Tomando $x = 1000$ se tiene $\frac{1}{1+7^{1000}} \simeq \frac{1}{7^{1000}} \simeq 0$.Así, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1+7^x} = 0$.

d) $\dfrac{3x^3+3x^2}{2x^3+8}=\dfrac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{8}{x^3}}=\dfrac{3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{8}{x^3}}$, que, por ejemplo, para $x=1000$ vale $\dfrac{3{,}003000001}{2{,}000000008}\simeq\dfrac{3}{2}$. Así, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+3x^2}{2x^3+8}=\dfrac{3}{2}$.

e) $\dfrac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1}=\dfrac{\frac{x^4}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{x+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale $\dfrac{-1000{,}000001001}{0{,}998998999}\simeq-1000{,}000001\simeq-1000$, así, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1}=-\infty$.

f) $\dfrac{3x+1}{6x^3+2x-3}=\dfrac{\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{3}{x^3}}=\dfrac{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale, $\dfrac{-0{,}000003001}{0{,}999998003}\simeq-0{,}000003001\simeq0$, así, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{6x^3+2x-3}=0$.

21. Estima los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-7}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+1}{3x^7-1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{2^x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x}{7x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7^{-x}}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{2^{-x}}$

a) $\dfrac{2x}{x-7}=\dfrac{2}{1-\frac{7}{x}}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale aproximadamente 2, así $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-7}=2$.

b) $\dfrac{2x^5+1}{3x^7-1}=\dfrac{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^7}}{3-\frac{1}{x^7}}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale aproximadamente 0, así, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+1}{3x^7-1}=0$.

c) $\dfrac{3^x}{2^x}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}$, que, por ejemplo, para $x=-1000$ vale aproximadamente 0, así, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{2^x}=0$.

d) $\dfrac{x^3-2x}{7x^2+1}=\dfrac{x-\frac{2}{x}}{7+\frac{1}{x^2}}$, que, por ejemplo, para $x=1000$ vale aproximadamente $\dfrac{1000}{7}$, así, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x}{7x^2+1}=+\infty$.

e) $\dfrac{7^{-x}}{2}=\dfrac{1}{2\cdot7^x}$, que, por ejemplo, para $x=1000$ vale aproximadamente 0, así, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7^{-x}}{2}=0$.

f) $\dfrac{3^x}{2^{-x}}=3^x\cdot2^x=6^x$, que, por ejemplo, para $x=1000$ vale $6^{1000}\simeq10^{750}$, así, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{2^{-x}}=+\infty$.

22. Calcula $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ en los siguientes casos.

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2+x-6}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{0}{4}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-5)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-5)}{(x+2)}=-\dfrac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)}{(x+1)}=\dfrac{0}{3}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x}{x^2+x-6}$, el numerador tiende a 4 y el denominador a 0, por lo que la función se hace muy grande en valor absoluto cuando x tiende a 2. Estudiando el signo de la función cuando x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha tenemos:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-2x}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-2x}{(x-2)(x+3)}=-\infty \text{ y } \lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-2x}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-2x}{(x-2)(x+3)}=+\infty\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x}{x^2+x-6} \text{ no existe.}$$

23. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, calcula los límites en $x=a$ de fg, $f:g$, f^g y g^f.

$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=3\cdot 0=0$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, el numerador tiende a 3 y el denominador a 0, por lo que $\dfrac{f}{g}$ se hace arbitrariamente grande en valor absoluto cerca de $x=a$. Habría que estudiar el signo de $\dfrac{f}{g}$ cuando x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha, es decir, determinar los límites laterales. Si los límites laterales existen y coinciden, $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ existirá y su valor coincidirá con el de los límites laterales, en caso contrario $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ no existirá.

$\lim\limits_{x\to a}\left(f^g\right)(x)=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=3^0=1$

$\lim\limits_{x\to a}\left(g^f\right)(x)=\left(\lim\limits_{x\to a}g(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}f(x)}=0^3=0$ si $g(x)\geq 0$ $\forall x\in E(a,\varepsilon)$. Por ejemplo, no existe $\lim\limits_{x\to a}\left[-(x-a)^2\right]^{x-a+3}$.

24. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=-\dfrac{1}{2}$, ya que el numerador y el denominador tienen el mismo grado.

Si se quiere ser más riguroso: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x}-2}=\dfrac{1-0+0}{0-0-2}=-\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}=0$, ya que el "grado" del "numerador" es menor que el grado del denominador.

Si se quiere ser más riguroso: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}}{\dfrac{x+6}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{2}{x}}}{1+\dfrac{6}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$

25 y 26. Ejercicios resueltos.

27. Determina el mayor conjunto de números reales donde sean continuas las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^2-1$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

e) $f(x)=[x]$

f) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-7x+12}$

g) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2+1}$

h) $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<1\\ 0 & \text{si } x=1\\ x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica.

b) La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ por ser una función racional y anularse el denominador en $x=1$.

c) La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ por ser una función racional y anularse el denominador en $x=-1$ y $x=1$.

d) La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$,pues la función $|x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y el denominador se anula en $x=0$.

e) La función es continua en $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, ya que la función parte entera "salta" en los números enteros.

f) La función es continua en $\mathbb{R}-\{3,4\}$ por ser una función racional y anularse el denominador en $x=3$ y $x=4$.

g) La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función racional y el denominador no se anula en ningún número real.

h) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)=2$, pero $f(x)=0\neq2$, por tanto la función es discontinua en $x=1$ y continua en el resto por estar definida por polinomios. Así, la función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

28. En cada caso, halla qué valor debe tener la función en el punto indicado para que sea continua en él.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, en $x=1$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$, en $x=2$

a) Como $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ debe ser $f(1)=2$.

b) Como $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$ debe ser $f(2)=\dfrac{3}{4}$.

29. Halla el valor de *k* que hace *f* continua en *x* = 1.

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x\neq1 \text{ y } x\neq2\\ 2k+1 & \text{si } x=1\end{cases}}$$

Como $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$, debe ser $f(1)=-2$ y, por tanto, $k=-\dfrac{3}{2}$.

30. Ejercicio interactivo.

31 y 32. Ejercicios resueltos.

33. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x}$

d) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x}$

a) Asíntotas verticales:

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-3, 3\}$, puede tener asíntotas verticales en $x=-3$ y $x=3$.

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=+\infty$, por tanto, $x=-3$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=+\infty$, por tanto, $x=3$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

Tiene la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es menor o igual al del denominador.

De hecho:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=0$, por lo que $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$.

Asíntotas oblicuas:

No tiene por tener horizontales, o porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

b) Asíntotas verticales:

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2, -1\}$, puede tener asíntotas verticales en $x=-2$ y $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=+\infty$, por tanto, $x=-2$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=+\infty$, por tanto, $x=-1$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

No tiene asíntotas horizontales, ya que el grado del numerador no es menor o igual al del denominador.

De hecho:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=+\infty$

Asíntotas oblicuas:

Tiene la misma asíntota oblicua en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es uno más que el del denominador.

De hecho, dividiendo, tenemos $f(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=(3x-7)+\dfrac{15x+17}{x^2+3x+2}$ y, por tanto, la recta $y=3x-7$ es una asíntota oblicua en $+\infty$ y $-\infty$.

c) Asíntotas verticales:

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$, puede tener asíntotavertical en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+5}{3x}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+5}{3x}=+\infty$, por tanto, $x=0$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

Tiene la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es menor o igual al del denominador.

De hecho:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+5}{3x}=\dfrac{2}{3}$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+5}{3x}=\dfrac{2}{3}$, por lo que $y=\dfrac{2}{3}$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$.

Asíntotas oblicuas:

No tiene por tener horizontales, o porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

d) Asíntotas verticales:

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$, puede tener asíntota vertical en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4x^2+1}{x}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4x^2+1}{x}=+\infty$, por tanto, $x=0$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

No tiene asíntotas horizontales, ya que el grado del numerador no es menor o igual al del denominador.

De hecho:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^2+1}{x}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^2+1}{x}=+\infty$

Asíntotas oblicuas:

Tiene la misma asíntota oblicua en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es uno más que el del denominador.

De hecho, dividiendo, tenemos $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x}=4x+\dfrac{1}{x}$ y, por tanto, la recta $y=4x$ es una asíntota oblicua en $+\infty$ y $-\infty$.

34. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^2+2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x}{x^3-1}$ **c)** $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x+3}}$

a) Asíntotas verticales:Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$, no puede tener asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:Tiene la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ya que el grado del numerador es menor o igual al del denominador.

De hecho, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, por lo que $y=3$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$.

Asíntotas oblicuas: No tiene por tener horizontales, o porque grad (numerador) $\neq$ 1 +grad(denominador).

b) Asíntotas verticales:Como el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{1\}$, puede tener asíntota vertical en $x=1$.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$, por tanto, $x=1$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:Tiene la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ya que grado del numerador es menor o igual al del denominador.

De hecho, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, por lo que $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$.

Asíntotas oblicuas: No tiene por tener horizontales, o porque grad(numerador)$\neq$ 1 + grad(denominador).

c) Asíntotas verticales:Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$, no puede tener asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, por tanto no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:Para calcular las asíntotas oblicuas se debe tener cuidado con los signos.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(-x)^2+3}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{\frac{x^2+3}{x^2}}=-\sqrt{1}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+3}{x^2}}=\sqrt{1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

La recta $y=-x$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y la recta $y=x$ lo es en $+\infty$.

d) El dominio de la función es $(-\infty,-3)\cup[1,+\infty)$

Asíntotas verticales:Como $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$, $x=-3$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x^3+3x^2}}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}+x\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-1}{x+3}-x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}+x\right)}=-\frac{3}{2}$$

La recta $y=x-\dfrac{3}{2}$ es asíntota oblicua en $+\infty$ y análogamente, la recta $y=-x+\dfrac{3}{2}$ es asíntota oblicua en $-\infty$.

35. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \dfrac{3n^2+5}{2n^2-3}$ **c)** $\dfrac{1+n}{1+n^2}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

b) $\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+2}$ **d)** $\dfrac{4n^3}{2-n^2}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{n+5}}{n-5}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+5}{2n^2-3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{3}{n^2}} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+n}{1+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1} = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3}{2-n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n}{\frac{2}{n^2}-1} = -\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2} = 0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+5}}{n-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{1-\frac{5}{n}} = 0$

36. ¿Son convergentes las siguientes sucesiones? En caso de serlo, ¿a qué número convergen?

a) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ **b)** $a_n = \dfrac{1+2^n}{1+3^n}$ **c)** $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{1+\sqrt[3]{n}}$ **d)** $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

a) Convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$

b) Convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^n}{1+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1} = 0$

c) No convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{1+\sqrt[3]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[6]{n^3}+1}{1+\sqrt[6]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[6]{n}+\frac{1}{\sqrt[6]{n^2}}}{\frac{1}{\sqrt[6]{n^2}}+1} = +\infty$.

Se podría decir que es convergente a $+\infty$.

d) La sucesión es decreciente y acotada inferiormente, por tanto es convergente:

$a_{n+1}-a_n = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \dfrac{n^2}{2^n} = \dfrac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}} = \dfrac{2-(n-1)^2}{2^{n+1}} < 0$ si $n>2$ y, claramente, $a_n > 0$ para todo n.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$

37. Halla sucesiones que cumplan las siguientes condiciones.

a) Es creciente y está acotada superiormente.

b) Es creciente y no está acotada superiormente.

c) No es creciente, pero sí está acotada superiormente.

d) No es creciente ni está acotada superiormente.

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ **b)** $a_n = n$ **c)** $a_n = (-1)^n$ **d)** $a_n = (-1)^n n$

38. a) Demuestra que es creciente y acotada superiormente, y, por tanto, es convergente la sucesión: $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

b) Halla su límite.

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0$ y $a_n = \frac{2n+1}{n+2} < \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \le 2+1 = 3$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2$

39. Ejercicio resuelto.

40. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{4n^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-5n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+n}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4-n^2+1} - n^2\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{5n}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n-2} - n\right)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n-8} - \sqrt{n}\right)$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2-6n+2} - 3n + 1\right)$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2-12} - 3n\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{4n^2-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(2n-\sqrt{4n^2-1}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2-1}\right)}{2n+\sqrt{4n^2-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+\sqrt{4n^2-1}} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-5n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-5n}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-5n}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-5n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-5n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}} = \frac{5}{2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+n}\right)}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4n}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = -2$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-n^2+1}-n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4-n^2+1}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4-n^2+1}+n^2\right)}{\sqrt{n^4-n^2+1}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+1}{\sqrt{n^4-n^2+1}+n^2}=-\frac{1}{2}$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{5n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{5n}\right)\left(\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{5n}\right)}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{5n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-8n}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{5n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-8}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+\sqrt{\frac{5}{n}}}=+\infty$

g) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n-2}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+4n-2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4n-2}+n\right)}{\sqrt{n^2+4n-2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{\sqrt{n^2+4n-2}+n}=2$

h) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-8}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n-8}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n-8}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n-8}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8}{\sqrt{n-8}+\sqrt{n}}=0$

i) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-6n+2}-3n+1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n^2-6n+2}-3n+1\right)\left(\sqrt{9n^2-6n+2}+3n-1\right)}{\sqrt{9n^2-6n+2}+3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9n^2-6n+2}+3n-1}=0$

j) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-12}-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n^2-12}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2-12}+3n\right)}{\sqrt{9n^2-12}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-12}{\sqrt{9n^2-12}+3n}=0$

41. Halla los límites de las sucesiones.

a) $a_n=\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+5}$

b) $b_n=\left(\frac{n+8}{n+7}\right)^{-2+n}$

c) $c_n=\left(\frac{n+1}{n+7}\right)^{n}$

d) $d_n=\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{2n}$

e) $e_n=\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+3n}\right)^{n+1}$

f) $f_n=\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+3}\right)^{\frac{n^2+3}{n+1}}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2(n+5)}{n+1}}=e^2$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+8}{n+7}\right)^{-2+n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+7}\right)^{-2+n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+7}\right)^{n+7}\right]^{\frac{n-2}{n+7}}=e^1=e$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+7}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+7}{n+1}\right)^{-n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n+7}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+7}{6}}\right)^{\frac{n+7}{6}}\right]^{\frac{-6n}{n+7}}=e^{-6}$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^{n-3}\right]^{\frac{2n}{n-3}}=e^2$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+3n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+3n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+3n}\right)^{n^2+3n}\right]^{\frac{n+1}{n^2+3n}}=e^0=1$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+3}\right)^{\frac{n^2+3}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2}{2n^2+3}\right)^{\frac{n^2+3}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+3}{n+2}}\right)^{\frac{2n^2+3}{n+2}}\right]^{\frac{n^2+3}{n+1}\cdot\frac{n+2}{2n^2+3}}=e^{1/2}=\sqrt{e}$

42. Ejercicio interactivo.

43 a 52. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Concepto de función. Dominio y recorrido.

53. Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ **e)** $f(x)=\sqrt{(x-1)(2x+3)}$ **g)** $f(x)=1+\sqrt{\dfrac{3-x}{5-x}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ **f)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$ **h)** $f(x)=1+\sqrt{\dfrac{5-x}{3-x}}$

a) $D(f)=\mathbb{R}$, ya que el denominador no se anula en ningún número real.

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$, ya que el denominador se anula en $x=1$.

c) $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$, ya que el denominador se anula en $x=-2$.

d) $D(f)=\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$, ya que el denominador se anula en $x=-2$ y $x=2$.

e) Debe ser $(x-1)(2x+3)\geq 0$, por tanto, $D(f)=\left(-\infty,\ -\dfrac{3}{2}\right]\cup[1,\ +\infty)$.

f) Debe ser $(x-1)(2x+3)>0$, por tanto, $D(f)=\left(-\infty,\ -\dfrac{3}{2}\right)\cup(1,\ +\infty)$.

g) Debe ser $\dfrac{3-x}{5-x}\geq 0$, por tanto, $D(f)=(-\infty,\ 3]\cup(5,\ +\infty)$.

h) Debe ser $\dfrac{5-x}{3-x}\geq 0$, por tanto, $D(f)=(-\infty,\ 3)\cup[5,\ +\infty)$.

54. Determina el dominio de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\leq 0\\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x>0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\leq 2\\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x>2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\leq -2\\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x>-2\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\leq -1\\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x>5\end{cases}$

Observemos que $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ no está definida si $x=1$ y $h(x)=\sqrt{2x+1}$ sólo está definida si $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$, así:

a) $D(f)=\mathbb{R}$

c) $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

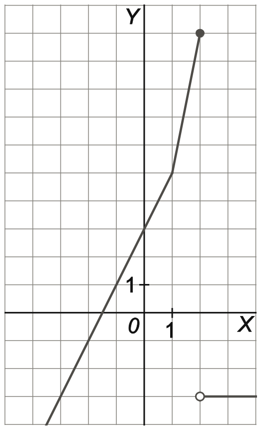
b) $D(f)=\mathbb{R}-\left(-2,\ -\dfrac{1}{2}\right)=(-\infty,\ -2]\cup\left[-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$

d) $D(f)=(-\infty,\ -1]\cup[5,\ +\infty)$

Formas de definir una función

55. Representa la gráfica de la función:

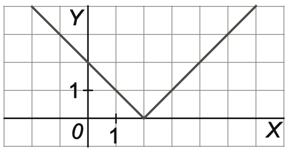
$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si } x<1\\ x^2+2x+2 & \text{si } 1\le x\le 2\\ -3 & \text{si } x>2\end{cases}$$



La gráfica de $f_1(x)=2x+3$ es una recta que pasa por los puntos (0, 3) y (1, 5). La gráfica de $f_2(x)=x^2+2x+2$ es una parábola con vértice en (–1, 1) y que pasa por (1, 5) y (2, 10). La gráfica de $f_3(x)=-3$ es la recta horizontal $y=-3$.

56. Dibuja la gráfica de $f(x)=|2-x|$.

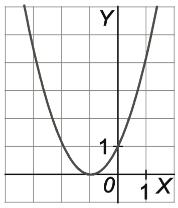
$$f(x)=|2-x|=\begin{cases}2-x & \text{si } x\le 2\\ x-2 & \text{si } x>2\end{cases}$$



57. Representa gráficamente la función que se corresponde con los datos de la siguiente tabla y busca una expresión analítica para dicha función.

x	–2	0	1	3
y	1	1	4	16

Como $f(-2)=f(0)$ podemos pensar que se trata de una parábola con eje de simetría en $x=-1$, es decir, una expresión de la forma $f(x)=a(x+1)^2+b$. Imponiendo que pase por (0, 1) y (1, 4) obtendríamos $f(x)=(x+1)^2$, que también verifica que $f(3)=16$, por lo que la expresión es válida.



58. Escribe la expresión analítica de las funciones definidas por los siguientes enunciados.

a) A cada número real se le asigna el triple de su cuadrado menos el doble de su cubo.

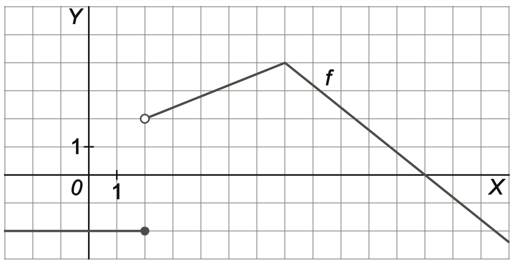
b) A cada número natural se le asocia la raíz cuadrada negativa de la suma de su cuadrado con él mismo.

c) Un comercial cobra un fijo de 500 € al mes más un 2% de la facturación que haya obtenido durante dicho mes. Escribe la función que da el sueldo del comercial en función de dicha facturación mensual.

d) En una clase se tiene un diccionario por cada alumno, un atlas por cada dos alumnos, y un ordenador, por cada tres. Se pide la función que da el número total de materiales de apoyo que hay en la clase en función del número de alumnos de la misma.

a) $f(x)=3x^2-2x^3$ **b)** $f(n)=-\sqrt{n^2+n}$ **c)** $f(x)=500+0{,}02x$ **d)** $f(x)=x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}$

59. Encuentra una expresión analítica de la función cuya gráfica es la siguiente.



$$f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x\le 2\\ \dfrac{2x+6}{5} & \text{si } 2<x<7\\ \dfrac{-4x+48}{5} & \text{si } x\ge 7\end{cases}$$

Operaciones con funciones

60. Definimos dos funciones $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$. Demuestra que $(f\circ g)(x)=x-2$ y justifica que el dominio de esta función no sea $\mathbb{R}$.

$(f\circ g)(x)=f\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=x-2$. Como $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ y $D(g)=\mathbb{R}-\{2\}$, la composición no está definida en $x=2$ ni en los puntos donde se anule *g*. Puesto que la función *g* no se anula en ningún valor, $D(f\circ g)=\mathbb{R}-\{2\}$.

61. A partir de $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$, $h(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ y $t(x)=1-x^2$, calcula las funciones siguientes y halla sus dominios.

a) $(f-t)(x)$	**d)** $(g\circ t)(x)$	**g)** $f^{-1}(x)$	**j)** $t^{-1}(x)$
b) $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$	**e)** $(fh)(x)$	**h)** $g^{-1}(x)$	**k)** $(h\circ g\circ t)(x)$
c) $(h\circ g)(x)$	**f)** $\left(\dfrac{f}{t}\right)(x)$	**i)** $h^{-1}(x)$	**l)** $(t\circ t\circ g)(x)$

a) $(f-t)(x)=f(x)-t(x)=2x^2-x-3$. Como $D(f)=D(t)=\mathbb{R}$, $D(f-t)=\mathbb{R}$.

b) $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{h(x)}=(x^2-x-2)(x^2-4)$. El dominio de $\dfrac{f}{h}$ está formado por los valores para los que existen *f* y *h* y, además, no anulan a *h*. Por tanto, aunque la expresión de $\dfrac{f}{h}$ sea polinómica, $D\left(\dfrac{f}{h}\right)=\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$.

c) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\sqrt{2x-4}\right)=\dfrac{1}{2x-8}$. Tenemos $D(g)=[2,\ +\infty)$, pero si $2x-4=4$, es decir, si $x=4$, no existe $(h\circ g)(x)$, por tanto, $D(h\circ g)=[2,\ 4)\cup(4,\ +\infty)$.

d) $(g\circ t)(x)=g(t(x))=g\left(1-x^2\right)=\sqrt{-2x^2-2}$. Al ser siempre negativo $-2x^2-2$; $D(g\circ t)=\varnothing$.

e) $(fh)(x)=f(x)h(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$ y $D(fh)=\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$.

f) $\left(\dfrac{f}{t}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{t(x)}=\dfrac{x^2-x-2}{1-x^2}$ y $D\left(\dfrac{f}{h}\right)=\mathbb{R}-\{-1,\ 1\}$.

g) Al no ser *f*(*x*) inyectiva, no tiene inversa.

h) $y=\sqrt{2x-4}\Rightarrow x=\dfrac{y^2+4}{2}\Rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{x^2+4}{2}$ y $D(g^{-1})=R(g)=[0,\ +\infty)$.

i) Al no ser *j*(*x*) inyectiva, no tiene inversa.

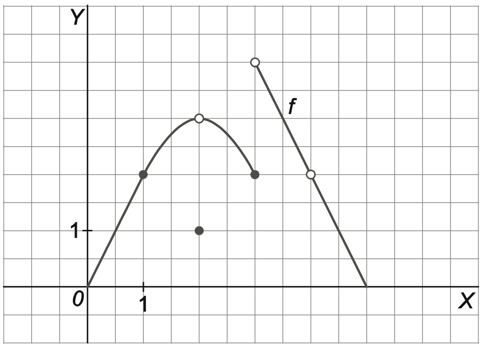
j) Al no ser *t*(*x*) inyectiva, no tiene inversa.

k) El dominio de esta función es vacío, ya que *g*(*x*) sólo está definida si $x\geq 2$ pero el recorrido de *t* es $(-\infty,\ 1]$.

l) $(t\circ t\circ g)(x)=t\left(t(g(x))\right)=t\left(t\left(\sqrt{2x-4}\right)\right)=t(-2x+5)=1-(-2x+5)^2$ y $D(t\circ t\circ g)=D(g)=[2,\ +\infty)$ pese a que la expresión de $t\circ t\circ g$ es polinómica.

Límite de una función en un punto

62. Analiza la siguiente gráfica que representa una función *f*(*x*) y calcula:



a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ e) $\lim_{x\to 4} f(x)$ i) $f(2)$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ f) $\lim_{x\to 5} f(x)$ k) $f(3)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ g) $f(0)$ k) $f(4)$

d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ h) $f(1)$ l) $f(5)$

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe. g) $f(0) = 0$ j) $f(3) = 2$

b) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ e) $\lim_{x\to 4} f(x) = 2$ h) $f(1) = 2$ k) $f(4)$ no existe.

c) $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ f) $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ i) $f(2) = 1$ l) $f(5) = 0$

63. Con ayuda de tu calculadora obtén, si existen, los límites siguientes.

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{3x+2}$ c) $\lim_{x\to 0} (x^2 - 4x - 5)$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-3}$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{x}$

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{3x+2} = 2$ c) $\lim_{x\to 0} (x^2 - 4x - 5) = -5$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ no existe

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-3}$ no existe d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{x} = -1$

Límites infinitos y en el infinito. Cálculo de límites

64. Calcula estos límites.

a) $\lim_{x\to +\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 25x\right)$ e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2+5}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 25x\right)$ f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{x^2-4}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(-5x^2 + 7x - 3\right)$ g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3}{7x-2}$

d) $\lim_{x\to -\infty} \left(-5x^2 + 7x - 3\right)$ h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5-x}{x+5}$

a) $\lim_{x\to +\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 25x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{25}{x^2}\right)\right] = +\infty$ e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2+5} = 0$

b) $\lim_{x\to -\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 25x\right) = -\infty$ f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{x^2-4} = 0$

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(-5x^2 + 7x - 3\right) = -\infty$ g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3}{7x-2} = +\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty} \left(-5x^2 + 7x - 3\right) = -\infty$ h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5-x}{x+5} = -1$

65. Calcula los límites siguientes.

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{2x+5}$ **c)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{5-x}{x+5}$ **e)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2+5}$ **g)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1}{4x^2-3}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{7x-2}$ **d)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x}{x^2+1}$ **f)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^2-4}$ **h)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3-x^2}{x^5+x^2}$

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{2x+5} = \frac{3}{2}$ **c)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{5-x}{x+5} = -1$ **e)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2+5} = 0$ **g)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1}{4x^2-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{7x-2} = -\infty$ **d)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x}{x^2+1} = 0$ **f)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^2-4} = 0$ **h)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3-x^2}{x^5+x^2} = 0$

66. Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-3x^2}-3}{2x+1}$ **c)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x+5}$ **d)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-6}{\sqrt[5]{x^{13}-x^5}}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, ya que el grado del numerador es igual al “grado” del denominador.

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-3x^2}-3}{2x+1} = \frac{\sqrt[3]{8}}{2} = 1$, ya que el “grado” del numerador es igual al grado del denominador.

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x+5} = +\infty$, ya que el “grado” del numerador es mayor que el grado del denominador.

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-6}{\sqrt[5]{x^{13}-x^5}} = 0$, ya que el grado del numerador es menor que el “grado” del denominador.

67. Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3x} - \frac{3}{2x+1}\right)$ **c)** $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)$ **d)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3x} - \frac{3}{2x+1}\right) = 0 - 0 = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2} = +\infty$

68. Calcula los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\sqrt{x-5}$

b) $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$

a) El límite en $-\infty$ no existe pues la función solo está definida si $x\geq 5$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-5}=+\infty$.

b) $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}=\begin{cases}\dfrac{-x}{2-x} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{2-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$, así $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{2-x}=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-x}=-1$

69. Halla, si existen, estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x^2-x}$

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-1}{x^2-x}$

d) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-6x+8}$

f) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-50}{x^2+10x+25}$

g) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-6x+8}=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x^2+4x-1}{(x-4)(x-2)}=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-50}{x^2+10x+25}=\dfrac{75}{100}=\dfrac{1}{4}$

g) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x^3-3)}{x^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3}{x(x-2)}$ no existe, pues el signo del cociente cambia si la aproximación a 2 es por la derecha o por la izquierda.

h) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^3-3}{x(x-2)}=+\infty$

i) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^3-3}{x(x-2)}=-\infty$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=-\infty$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=+\infty$

l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-3}{x(x-2)}$ no existe, pues el signo del cociente cambia según sea la aproximación a derecha o por la izquierda.

70. En caso de existir, calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{x^2-x}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2-x}$ g) $\lim_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}$ j) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{x^2-x}$ e) $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}$ h) $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}$ k) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x}{x^2-x}$ f) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ l) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\frac{10}{2}=5$

b) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\frac{0}{12}=0$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\frac{-2}{2}=-1$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x-1}=-3$

e) $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}=\sqrt{16}=4$

f) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+1=2$

g) $\lim_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}$ no existe, ya que la raíz está definida sólo si $x\in[-3,\,3]$.

h) $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$

i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$

j) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

k) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-9}=\lim_{x\to 9}(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)=114$

l) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}=\frac{-2}{-1}=2$

71. Efectúa el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en el que *f* es la función $f(x)=x^2-3x$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)-(x^2-3x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-3)=2x-3$$

72. Calcula $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(-x^2-x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{-x^2-x-1}=\frac{3}{-3}=-1$$

73. Si existen, halla los siguientes límites en la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2} & \text{si } x<1\\ 2x-1 & \text{si } 1\le x<4\\ \sqrt{x}+x+1 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$
d) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
g) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$
e) $\lim_{x\to 3} f(x)$
h) $\lim_{x\to 4} f(x)$

c) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
f) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$
i) $\lim_{x\to 5} f(x)$

a) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x-2}=0$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe, pues no coinciden los límites laterales.

c) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-2}=-1$

d) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x-1)=1$

e) $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(2x-1)=5$

f) $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(\sqrt{x}+x+1)=7$

g) $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(2x-1)=7$

h) $\lim_{x\to 4} f(x)=7$, pues $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=7$

i) $\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}(\sqrt{x}+x+1)=6+\sqrt{5}$

Continuidad de una función

74. *La función $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$ no está definida para $x=1$ ni para $x=-1$.

a) Estudia su continuidad.

b) ¿Qué valores hay que adjudicar a $f(1)$ y $f(-1)$ para que la función f sea continua en $\mathbb{R}$?

a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

b) Tenemos $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}(x+3)=2$ y $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}(x+3)=4$, por tanto, debemos definir $f(1)=4$ y $f(-1)=2$.

Observemos que los límites anteriores prueban, además, que las discontinuidades en $x=-1$ y $x=1$ son evitables.

75. Encuentra el mayor conjunto de números reales donde sean continuas las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

c) $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 5}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 4x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$

h) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 4}$

i) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 8}$

j) $f(x) = \sqrt{x - x^3}$

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{R} - \{2\}$

d) $\mathbb{R} - \left\{-1 - \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}\right\}$

e) $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

f) $\mathbb{R} - \{-4, -1\}$.

g) $\mathbb{R}$.

h) $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$

i) $\left(-\infty, \dfrac{-3 - \sqrt{73}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{-3 + \sqrt{73}}{4}, +\infty\right)$

j) $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$

76. Investiga para qué valores reales son continuas las siguientes funciones y clasifica las posibles discontinuidades que encuentres.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si} \quad x < 1 \\ x + 7 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 7 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 6}{x} & \text{si} \quad x < 1 \\ x + 7 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

d) $f(x) = 5 - |2x - 6|$

e) $f(x) = |x + 1| - |x + 5|$

f) $f(x) = |x^2 - 3x - 10|$

g) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

a) Las expresiones que definen la función son continuas, por tanto, debemos estudiar qué ocurre en los extremos de los intervalos de definición.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 8$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 8$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -6$, la función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ y tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

c) La función no está definida si $x = 0$, además $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 8$, por tanto, es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

d) La función es continua en $\mathbb{R}$.

e) La función es continua en $\mathbb{R}$.

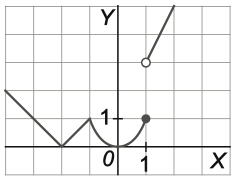
f) La función es continua en $\mathbb{R}$.

g) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que en $x = 0$ no está definida.

77. Estudia la continuidad de la función y dibújala.

$$f(x)=\begin{cases}|x+2| & \text{si } x\le -1\\ x^2 & \text{si } -1<x\le 1\\ 2x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Como cada una de las expresiones que definen f son funciones continuas, debemos ver qué ocurre en los extremos de los intervalos de definición:

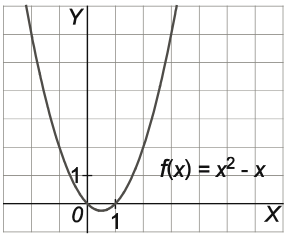


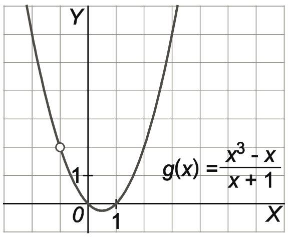
$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}|x+2|=1$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} x^2=1$, por tanto, es continua en $x=-1$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x+1)=3$, por tanto, tiene una discontinuidad de salto finito en $x=1$.

Resumiendo, la función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

78. Como se observa en la figura, al dibujar la gráfica de las funciones $f(x)=x^2-x$ y $g(x)=\dfrac{x^3-x}{x+1}$ se obtiene la misma gráfica para ambas.





Sin embargo, dichas funciones no son iguales. Indica sus diferencias haciendo un estudio de lo que ocurre en el punto de abscisa $x=-1$.

Las funciones no son iguales, ya que $D(f)=\mathbb{R}$ y $D(g)=\mathbb{R}-\{-1\}$.

Sin embargo, en $x=-1$ tenemos:

$$\lim_{x\to -1} g(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x)=\lim_{x\to -1} f(x)$$

En el resto de puntos, obviamente ambas funciones coinciden.

79. Determinar *a* y *b* para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x<0\\ ax+b & \text{si } 0\le x\le 3\\ x-5 & \text{si } x>3\end{cases}$$

Los únicos puntos donde podría no ser continua son los de abscisas $x=0$ y $x=3$. Para que f sea continua en ellos los límites laterales deben ser iguales. Por tanto:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\\ \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=b\\ 3a+b=-2\end{cases}\Rightarrow a=-1,\ b=1.$$

Para estos valores coincide el valor de la función en los puntos considerados con los límites calculados, por lo que la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

80. En cada caso, calcula los valores de *m* y *n* para que las funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x\le 0\\ mx+n & \text{si } 0<x<2\\ -1 & \text{si } x\le 2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3mx-1 & \text{si } x\le -1\\ nx^2-4m & \text{si } -1<x\le 3\\ n+2 & \text{si } x>3\end{cases}$

a) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=n\\ 2m+n=-1\end{cases}\Rightarrow m=-2,\ n=3$

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3m-1=n-4m\\ 9n-4m=n+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m-n=1\\ -4m+8n=2\end{cases}\Rightarrow m=\dfrac{5}{2},\ n=\dfrac{3}{2}$

Asíntotas

81. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^3+3x^2-1$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

c) $f(x)=\dfrac{3}{x+5}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

f) $f(x)=\dfrac{x^3+2x+7}{x^2+x+1}$

g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}}$

h) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

i) $f(x)=2x-3+\dfrac{5}{x-4}$

j) $f(x)=x-\dfrac{x^2}{x-3}$

a) No tiene asíntotas.

b) La recta $y=2$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$.

c) La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$ y la recta $x=-5$ es asíntota vertical.

d) La recta $y=1$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$ y la recta $x=3$ es asíntota vertical.

e) La recta $x=-1$ es asíntota vertical y la recta $y=x-1$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y $+\infty$.

f) La recta $y=x-1$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y $+\infty$.

g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}}=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, por lo que la recta $x=0$ es asíntota vertical (solo por la derecha, ya que $D(f)=(0,+\infty)$) y, como $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, la recta $y=x$ es asíntota oblicuaen $+\infty$.

h) La recta $y=x$ es asíntota oblicua en $+\infty$, ya que, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}=1$ y

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$. De igual manera se comprueba que la recta $y=-x$ es asíntota oblicua en $-\infty$.

i) La recta $x=4$ es asíntota vertical y la recta $y=2x-3$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y $+\infty$.

j) La recta $y=-3$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$ y la recta $x=3$ es asíntota vertical.

82. Sea la función $f(x) = a + \dfrac{b}{x + c}$ con *a*, *b* y *c* números reales. Calcúlalos sabiendo que:

- **La gráfica de *f* presenta en $-\infty$ una asíntota horizontal de ecuación $y = 2$.**
- **La gráfica de *f* presenta en $x = 1$ una asíntota vertical.**
- **El punto (6, 3) pertenece a la gráfica de *f*.**

La primera condición nos dice que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, por tanto, $a = 2$.

Por la segunda condición, el denominador de $f(x) = \dfrac{ax + (ac + b)}{x + c}$ se tiene que anular si $x = 1$, por tanto, $c = -1$.

Finalmente, la tercera condición nos dice que $f(6) = 3$, es decir, $a + \dfrac{b}{6 + c} = 3 \Rightarrow 2 + \dfrac{b}{6 - 1} = 3 \Rightarrow b = 5$.

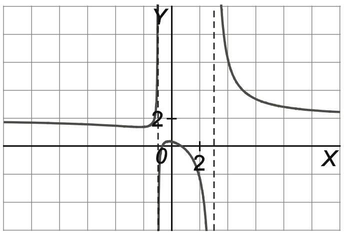
83. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{3 + 2x - x^2}$ y esboza su gráfica.

Las asíntotas verticales pueden estar en $x = -1$ y $x = 3$, que son los valores que anulan el denominador.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, por lo que la recta $x = -1$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, por lo que la recta $x = 3$ es asíntota vertical.

Como los grados del numerador y denominador coinciden, tiene una asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$, de ecuación $y = 2$.



84. El denominador de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}$ se anula para dos valores: $x = -1$ y $x = 5$, y sin embargo, solo tiene una asíntota vertical. Explica por qué.

Como $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \dfrac{(x - 5)(x - 2)}{(x - 5)(x + 1)} = \dfrac{x - 2}{x + 1}$ si $x \neq 5$, la función tiene una única asíntota vertical $x = -1$.

Sucesiones de números reales. Límites

85. Demuestra que la sucesión $a_n = \dfrac{2n - 1}{3n + 2}$ es creciente y acotada superiormente y halla su límite.

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{2n + 1}{3n + 5} - \dfrac{2n - 1}{3n + 2} = \dfrac{(2n + 1)(3n + 2) - (2n - 1)(3n + 5)}{(3n + 5)(3n + 2)} = \dfrac{7}{(3n + 5)(3n + 2)} > 0$ para todo *n*, por lo que la sucesión es creciente, además, $\dfrac{2n - 1}{3n + 2} < \dfrac{2n + 2}{3n + 3} = \dfrac{2(n + 1)}{3(n + 1)} = \dfrac{2}{3}$ para todo *n*, por lo que también está acotada superiormente.

Su límite es: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n - 1}{3n + 2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \dfrac{2}{3}$

86. a) Enuncia un resultado similar al de las sucesiones crecientes y acotadas superiormente para sucesiones decrecientes.

b) Compruébalo para la sucesión $a_n = \dfrac{1-n^2}{n^2+5n+6}$.

a) si a_n es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces en convergente.

b) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{-5n-4}{n^3+9n^2+26n+14} < 0$ para todo$n$, por lo que la sucesión es decreciente.

Además, tenemos, $a_n = \dfrac{1-n^2}{n^2+5n+6} = -1 + \dfrac{5n+7}{n^2+5n+6} > -1$ para todo$n$, por lo que también es acotada inferiormente.

Por tanto, la sucesión es convergente, de hecho, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n^2}{n^2+5n+6} = -1$.

87. Investiga si la sucesión $a_n = \dfrac{5-n}{10-3n}$ es creciente, o decreciente, y acotada y, en su caso, calcula su límite.

si$n$> 3 tenemos $a_{n+1} - a_n = \dfrac{5}{(3n-7)(3n-10)} > 0$ y $\dfrac{5-n}{10-3n} = \dfrac{n-5}{3n-10} < \dfrac{1}{3}$, es decir, la sucesión es creciente y acotada superiormente, por lo que converge.

De hecho, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-n}{10-3n} = \dfrac{1}{3}$.

88. Sabiendo que:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty} d_n = -\infty$

calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $a_n + b_n$ **d)** $\dfrac{a_n}{b_n}$ **g)** $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^{d_n}$

b) $b_n d_n$ **e)** $a_n + d_n$ **h)** $a_n^{b_n}$

c) $c_n d_n$ **f)** $\dfrac{c_n}{d_n}$ **i)** $a_n^{-b_n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 1$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = -\dfrac{2}{3}$ **g)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^{d_n}$ no existe.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n d_n) = -\infty$ **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + d_n) = -\infty$ **h)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = -8$ si existe la función.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n d_n)$ indeterminado **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{c_n}{d_n}\right) = 0$ **i)** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{a_n} = \dfrac{1}{9}$

89. Determina el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}-\frac{2+n}{1+n}\right)$ **c)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+7n-5}}{2n-9}$ **e)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3-n}{5+n}$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2-7n)(8n-3)}{(2n-1)^2}$ **d)** $\lim_{n\to\infty}\left(3n-5\sqrt{n}\right)$ **f)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-2n\right)$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}-\frac{2+n}{1+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+n)^2-n(2+n)}{n(1+n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+n)}\right)=0$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2-7n)(8n-3)}{(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-56n^2+37n-6}{4n^2-4n+1}=-\frac{56}{4}=-14$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+7n-5}}{2n-9}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(3n-5\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n-5\sqrt{n}\right)\left(3n+5\sqrt{n}\right)}{3n+5\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-25n}{3n+5\sqrt{n}}=+\infty$

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{3-n}{5+n}=-1$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-2n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+2n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+3n}{\sqrt{n^2+3n}+2n}=-\infty$

90. Halla los límites siguientes.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3}\right)$ **c)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5}-n\right)$ **e)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^4+5n^2+-3}-2n^2\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}\right)$ **d)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-6}-n^2\right)$ **f)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3-n+1}-3n^2\right)$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3}\right)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3}}=\frac{2}{1+1}=1$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}\right)}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+3}}=0$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-5}-n\right)\left(\sqrt{n^2-5}+n\right)}{\sqrt{n^2-5}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5}{\sqrt{n^2-5}+n}=0$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-6}-n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-6}-n^2\right)\left(\sqrt{n^2-6}+n^2\right)}{\sqrt{n^2-6}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^4+n^2-6}{\sqrt{n^2-6}+n^2}=-\infty$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^4+5n^2-3}-2n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^4+5n^2-3}-2n^2\right)\left(\sqrt{4n^4+5n^2-3}+2n^2\right)}{\sqrt{4n^4+5n^2-3}+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3}{\sqrt{4n^4+5n^2+-3}+2n^2}=\frac{5}{2}$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3-n+1}-3n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^3-n+1}-3n^2\right)\left(\sqrt{n^3-n+1}+3n^2\right)}{\sqrt{n^3-n+1}+3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-9n^4+n^3-n+1}{\sqrt{n^3-n+1}+3n^2}=-\infty$

91. Calcula, si existen, los siguientes límites.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{n-1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{n+1}{n}}$ **c)** $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n+3}{n^2+3n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{n+3}}$ **e)** $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{6n+3}\right)^{n}$ **g)** $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{n^2+3n}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{n-2}$ **d)** $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-5}{2n^2+n}\right)^{\frac{n^2-3n}{n+2}}$ **f)** $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{-2n}$ **h)** $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+4}\right)^{-5\sqrt{n}-1}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{n-1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{n+1}{n}}=3^1=3$, ya que la base converge a 3 y el exponente a 1.

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{n-2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{\frac{n-2}{n+3}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n+3}}=e^1=e$.

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n+3}{n^2+3n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n-1}{n^2-n+3}\right)^{-\frac{n^2+1}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4n-4}{n^2-n+3}\right)^{-\frac{n^2+1}{n+3}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{n^2-n+3}{4n-4}}\right)^{\frac{n^2-n+3}{4n-4}}\right]^{\frac{4n-4}{n^2-n+3}\cdot\left(-\frac{n^2+1}{n+3}\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^3+4n^2+4n-4}{n^3+2n^2+9}}=e^{-4}$$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-5}{2n^2+n}\right)^{\frac{n^2-3n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n}{2n^2-5}\right)^{-\frac{n^2-3n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n+5}{2n^2-5}\right)^{-\frac{n^2-3n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{2n^2-5}{n+5}}\right)^{\frac{2n^2-5}{n+5}}\right]^{\frac{n+5}{2n^2-5}\left(-\frac{n^2-3n}{n+2}\right)}=$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3-2n^2-15n}{2n^3+3n^2+2n}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{6n+3}\right)^{n}=0$, ya que la base converge a $\dfrac{1}{2}$ y el exponente a $+\infty$.

f) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\right]^{\frac{2n}{2n-1}}=$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}}=e^1=e$$

g) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n^2-3}\right)^{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{n^2-3}{4}}\right)^{\frac{n^2-3}{4}}\right]^{\frac{4(n^2+3n)}{n^2-3}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{4(n^2+3n)}{n^2-3}}=e^4$

h) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+4}\right)^{-5\sqrt{n}-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}-3}\right)^{5\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{\sqrt{n}-3}\right)^{5\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{\sqrt{n}-3}{7}}\right)^{\frac{\sqrt{n}-3}{7}}\right]^{\frac{35\sqrt{n}+7}{\sqrt{n}-3}}=$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{35\sqrt{n}+7}{\sqrt{n}-3}}=e^{35}$$

Síntesis

92. Estudia razonadamente las asíntotas y la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Tenemos $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$ y la función es continua en su dominio.

La recta $x=-1$ es una asíntota vertical:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty \text{ y } \lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty .$$

No tiene asíntotas horizontales, ya que el grado del numerador es mayor que el del numerador, o, más formalmente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=+\infty$$, por lo que no tiene asíntotas horizontales.

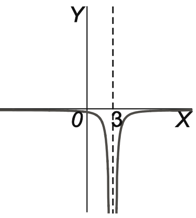
Sí tiene asíntota oblicua, ya que el grado del numerador es uno más que el del denominador.

Dividiendo tenemos:

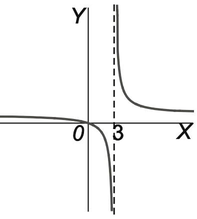
$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}=x-2+\dfrac{4x+2}{x^2+2x+1}$, con lo que la recta $y=x-2$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y $+\infty$.

93. A continuación se muestra el comportamiento de cuatro gráficas en torno a su asíntota vertical $x=3$.

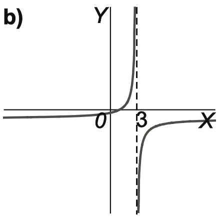
a)



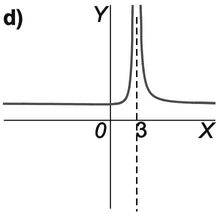
c)



b)



d)



Asocia cada una de ellas con una de estas funciones:

I. $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$

II. $h(x)=\dfrac{-2}{(x-3)^2}$

III. $g(x)=\dfrac{x-1}{(x-3)^2}$

IV. $j(x)=\dfrac{1-x}{x-3}$

I con c, ya que $\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty$.

II con a, ya que $\lim_{x\to3^-} h(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to3^+} h(x)=-\infty$.

III con d, ya que $\lim_{x\to3^-} g(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to3^+} g(x)=+\infty$.

IV con b, ya que $\lim_{x\to3^-} j(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to3^+} j(x)=-\infty$.

94. Completa la siguiente tabla (*f* y *g* son funciones reales de variable real).

Formulación analítica	Interpretación gráfica
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$	***
***	La gráfica de *f* pasa por el origen de coordenadas.
Si $x \in [-1, 3]$, entonces $f(x) < g(x)$	***
***	*f* y *g* se cortan en el punto de abscisa $x = 4$
La ecuación $f(x) = -6$ no tiene solución.	***
***	La recta $y = 1$ corta a la gráfica de *g* en los puntos (–5, 1) y (1, 1).

Formulación analítica	Interpretación gráfica
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$	Tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y por su izquierda la gráfica decrece.
$f(0) = 0$	La gráfica de *f* pasa por el origen de coordenadas.
Si $x \in [-1, 3]$, entonces $f(x) < g(x)$	La gráfica de *g* está por encima de la de *f* si $x \in [-1, 3]$.
$f(4) = g(4)$	*f*y *g* se cortan en el punto de abscisa $x = 4$.
La ecuación $f(x) = -6$ no tiene solución	La gráfica no corta a la recta $y = -6$.
$g(-5) = 1$ y $g(1) = 1$	La recta $y = 1$ corta a la gráfica de *g* en los puntos (–5, 1) y (1, 1).

95. Sea *f* la función definida por $f(x) = \dfrac{x+3}{|x|-3}$. ¿Cuál es el dominio de *f*? Calcula los límites $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Estudia los límites $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

El dominio de *f* es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x-3} = 1 \text{ y } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{-x-3} = -1.$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x-3} = +\infty \text{ y } \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x+3}{x-3} = -\infty.$$

96. Calcula los números *a*, *b* y *c*, sabiendo que la recta $y = 2x - 3$ es una asíntota oblicua de la función:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$$

$f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x+1} = ax + (b-a) + \dfrac{a-b+c}{x+1}$, así $y = ax + (b-a)$ es la asíntota oblicua, por lo que $a = 2$, $b = -1$ y c, en principio, puede tomar cualquier valor.

Pero observemos que si $c = -3$, $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x+1} = 2x - 3$ si $x \neq -1$, es decir, su gráfica es una recta con un agujero y, aunque en rigor, la recta $y = 2x - 3$ es asíntota de esta función, no se suele considerar como tal.

En resumen: $a = 2$, $b = -1$, $c \neq -3$.

97. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-12x^2 + 7x + 1}{(2x+1)(1-4x)}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 3x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x^3+1}}{(2x+1)^3}$

d) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x - 3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + x}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1}$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-1}$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+1}\right)$

l) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{x+1}$

m) $\lim\limits_{x \to 5^+} \left(\dfrac{2x}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x + 3x - 1}{(x+1)^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-12x^2 + 7x + 1}{(2x+1)(1-4x)} = \dfrac{-12}{-8} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 3x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(2x - \sqrt{4x^2+3x}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2+3x}\right)}{2x + \sqrt{4x^2+3x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x}{2x + \sqrt{4x^2+3x}} = -\dfrac{3}{4}$

c) Dividiendo numerador y denominador por x^3 tenemos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x^3+1}}{(2x+1)^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^3} = \dfrac{1}{8}$.

d) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x - 3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \dfrac{2}{2} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+ax} - x\right)\left(\sqrt{x^2+ax} + x\right)}{\sqrt{x^2+ax} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax}{\sqrt{x^2+ax} + x} = \dfrac{a}{2}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+x}} = +\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-5)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-5)=-3$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2(x-1)}{x}}=e^2$

j) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-1}=4^2=16$

k) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right)=-\infty$

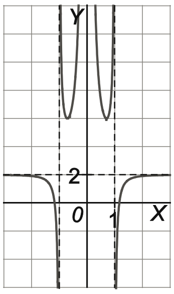
l) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x+1}$ no existe porque $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-1}{x+1}\neq\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-1}{x+1}$.

m) $\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\dfrac{2x}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}=\lim\limits_{x\to 5^+}\left(1+\dfrac{x-5}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}=\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{x+5}{x-5}}\right)^{\frac{x+5}{x-5}}\right)^{\frac{x-5}{(x-5)(x+5)}}=e^{\frac{1}{10}}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3x-1}{(x+1)^2}=0$

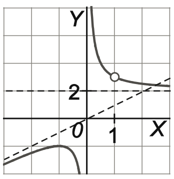
98. Esboza el dibujo de la gráfica de una función que cumpla todas las condiciones siguientes.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ **y** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$
- **Asíntota horizontal** $y=2$ **en** $-\infty$
- **Asíntota vertical en** $x=1$



99. Haz el dibujo aproximado de una función que tenga las siguientes características.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$
- **Si** $x>0$, $f(x)>2$
- **Tiene como asíntota oblicua a la recta** $y=x$
- **Tiene una discontinuidad evitable en (1, 3)**



CUESTIONES

100. Determina si las expresiones $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-3)}$ y $g(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x-3}$ corresponden a la misma función.

No es la misma función, $D(f)=(-\infty,\ 1]\cup[3,\ +\infty)$ y $D(g)=[3,\ +\infty)$.

101. ¿Es verdad que si no existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ni $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ entonces tampoco existe $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$?

No, no es cierto. Por ejemplo, $a_n=(-1)^n n$ y $b_n=3-(-1)^n n$ no lo cumplen.

102. Sean dos funciones *f* y *g* definidas en $\mathbb{R}$ cuyas gráficas coinciden para todos los valores del intervalo [1, 3] pero luego no coinciden, ¿es verdad o mentira que dichas funciones no pueden ser ambas funciones polinómicas?

Es cierto que no pueden ser polinómicas pues una función polinómica de grado *n* queda unívocamente determinada por su valor en *n* + 1 números y estas funciones coinciden en infinitos números.

103. Si la sucesión a_n es convergente y tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, entonces, ¿ha de ser su límite necesariamente cero?

Sí, pues si su límite fuera positivo (o negativo) a partir de un cierto valor de *n* los términos de la sucesión tendrían que estar “cerca” de su límite, por lo tanto, serían positivos (o negativos) todos los términos salvo una cantidad finita de ellos.

104. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: “Si $x=a$ no pertenece al dominio de *f*, entonces no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ”.

Falso, por ejemplo si $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ y $a=1$, la afirmación es falsa.

105. Si la función *f* es un cociente de polinomios y el denominador se anula en $x=3$ entonces, ¿será la recta $x=3$ una asíntota vertical de $y=f(x)$ en todos los casos?

No, porque podría ser que el numerador también se anulara en x = 3 y entonces la función podría tener una discontinuidad evitable, que es lo que sucede, por ejemplo, con la función $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$.

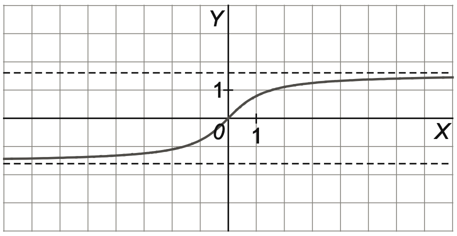
106. Si $x=a$ es una asíntota vertical de $y=f(x)$, ¿es verdadero o es falso que entonces el número *a* no está en el dominio de *f*?

Falso, por ejemplo, si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 3 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$ y $a=0$, la afirmación es falsa.

107. Para la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+1} & \text{si } x\notin\mathbb{Z}\\ 3 & \text{si } x\in\mathbb{Z}\end{cases}$, ¿es verdadero o es falso que la recta $y=0$ sea una asíntota horizontal de $f(x)$?

No, no es cierto, para que la recta $y=0$ sea una asíntota horizontal debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ y, en este caso, no existe dicho límite.

108. ¿Puede expresarse la función cuya gráfica es la de la figura con un cociente de polinomios?



No, la gráfica de la figura presenta dos asíntotas horizontales y si una curva es cociente de polinomios solo puede tener una asíntota horizonatal, ya que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$, entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k$.

109. Si $y=a$ es una asíntota horizontal de $y=f(x)$, entonces, ¿es posible que el valor de a pertenezca al recorrido de la función?

Es posible, por ejemplo, sucede con $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$ y $a=0$.

PROBLEMAS

110. Una empresa produce ratones inalámbricos en grandes cantidades. Atendiendoa los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, al salario de sus trabajadores y a otros factores, se ha llegado a la conclusión de que producir *p* ratones tiene un coste total, en euros, de *C*(*p*) = 10*p* + 100 000.

a) Encuentra la expresión de la función C_m que nos da el precio unitario medio de un ratón al fabricar *p* unidades.

b) Calcula $C_m(10)$ y $C_m(1000)$. ¿A qué es debido que haya tanta diferencia entre un coste y otro?

c) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} C_m(p)$ y da una interpretación económica al resultado.

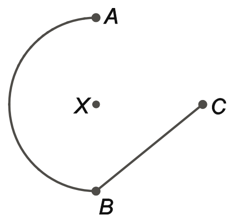
a) $C_m(p)=\dfrac{C(p)}{p}=10+\dfrac{100\,000}{p}$

b) $C_m(10)=10\,010$ € y $C_m(1000)=110$ €, la diferencia estriba en que una componente importante del precio de producción de *p* ratones, 100000 €, es independiente del número de éstos.

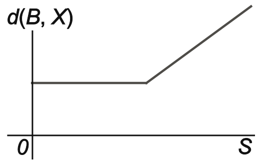
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} C_m(p)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10+\dfrac{100\,000}{p}\right)=10$ €, cuando *p* se hace grande el precio unitario medio se aproxima a 10 €, ya que el otro sumando, debido a gasto de puesta en marcha de maquinaria, etc., se va amortizando al haber mucha producción.

111. Un barco navega del punto *A* hasta el punto *B*, describiendo una semicircunferencia centrada en una isla *X*.

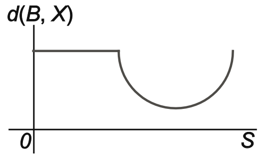
Luego navega en línea recta desde *B* a *C*. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la distancia del barco a la isla, según la distancia recorrida?



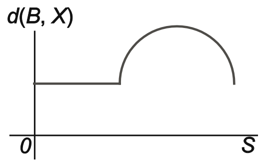
A.



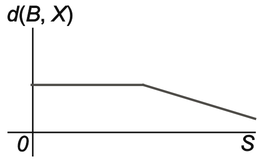
C.



B.



D.



En la primera parte del viaje se mantiene a igual distancia de la isla, después se va acercando y luego alejando, por lo que la gráfica es la C.

112. La longitud *l* (cm) de una barra metálica varía con la temperatura T (°C) de acuerdo a la función:

$$l(T) = 30,5 + 0,025T$$

Determina para qué rango de temperaturas la longitud se mantiene a menos de 1 mm de 30 cm.

$30 - 0,1 \le l(T) \le 30 + 0,1 \Rightarrow 29,9 \le 30,5 + 0,025T \le 30,1 \Rightarrow -0,6 \le 0,025T \le -0,4 \Rightarrow -24\text{ºC} \le T \le -16\text{ºC}$,

113. El franqueo de las cartas varía según su peso, como se indica en la tabla.

a) ¿Cuánto costaría franquear una carta de 145 g?

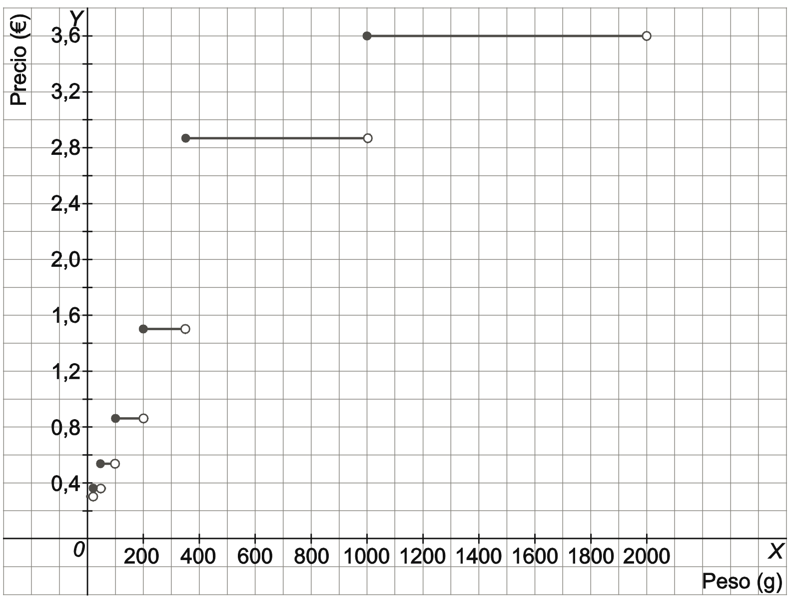
b) Represente la gráfica de la función que nos indica el precio del franqueo según el peso de la carta. Elige adecuadamente la escala de los ejes para que se refleje toda la información.

c) ¿Es continua dicha función? ¿Cómo se llaman este tipo de funciones?

Peso (g)	Precio (€)
Hasta 20	0,34
Hasta 50	0,38
Hasta 100	0,54
Hasta 200	0,84
Hasta 350	1,50
Hasta 1000	2,85
Hasta 2000	3,60

a) Un carta de 145 g constaría 0,84 €.

b)



c) No es continua. Es una función a trozos.

114. Tres parejas de una especie en peligro de extinción se introducen en un parque natural para intentar su recuperación. Los estudios indican que la población, *n*, aumentará de acuerdo a la función:

$$\boldsymbol{n(t) = 6 + \frac{300t^2}{t^2 + 100}}$$

donde *t* es el tiempo en años.

a) La población crítica a partir de la cual se considera que la repoblación ha tenido éxito se logra cuando se superan los 50 ejemplares. Calcula cuándo se alcanza dicho nivel crítico.

b) ¿Cuál es el comportamiento de la población para $t = 10$, 20, 40 y 60 años? ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estos resultados?

a) $n(t) = 50 \Rightarrow \dfrac{300t^2}{t^2+100} = 44 \Rightarrow t^2 = \dfrac{4400}{256} \Rightarrow t = 4{,}15$ años.

b) $n(10) = 156$, $n(20) = 246$, $n(40) = 288{,}35$ y $n(60) = 297{,}89$. La población tiende a estabilizarse, siendo su valor límite $\lim\limits_{t\to+\infty} n(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(6 + \dfrac{300t^2}{t^2+100}\right) = 306$ ejemplares.

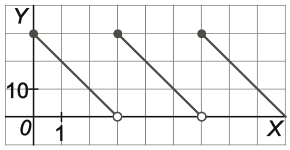
115. El número de ordenadores que tiene en *stock* una pequeña empresa viene dado por la fórmula

$$\boldsymbol{N(t) = 10\left(3\left[\frac{t+3}{3}\right] - t\right)}$$

donde el tiempo, *t*, se mide en semanas. Esboza la gráfica de la función y estudia su continuidad. ¿Cada cuánto tiempo debe reponer su mercancía la empresa?

La función es discontinua en $t = 3k$ si $k \in \mathbb{N}$ y periódica de periodo 3.

Debe reponer producto cada tres semanas.



PARA PROFUNDIZAR

116. Halla el valor de *a* para que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2}$$

$$\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^{x} = \left(1+\frac{2}{4x+3}\right)^{x} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x+3}{2}}\right)^{\frac{4x+3}{2}}\right]^{\frac{2x}{4x+3}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^{x} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2} = \left(\frac{4x^2+\pi}{4x^2+1}\right)^{-ax^2} = \left(1+\frac{\pi-1}{4x^2+1}\right)^{-ax^2} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x^2+1}{\pi-1}}\right)^{\frac{4x^2+1}{\pi-1}}\right]^{-\frac{(\pi-1)ax^2}{4x^2+1}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2} = e^{-\frac{(\pi-1)a}{4}}$$

Por tanto, $e^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{(\pi-1)a}{4}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = -\dfrac{(\pi-1)a}{4} \Rightarrow a = -\dfrac{2}{\pi-1}$.

117. El término *n*-ésimo de una sucesión es $a_n = \dfrac{2^n n^n}{n!}$. Escribe el término a_{n+1} y calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

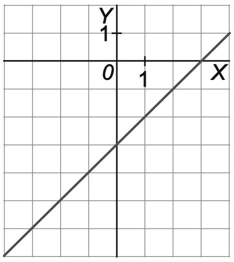
$a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$, por lo que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n n^n}{n!}} = 2\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2e$.

118. Dibuja el conjunto de puntos del plano (*x*, *y*) que verifica cada una de las siguientes igualdades.

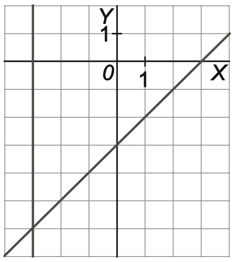
a) $y = x-3$ **b)** $(x+3)y = x^2-9$ **c)** $y = \dfrac{x^2-9}{x+3}$ **d)** $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$

¿Corresponden todas a la gráfica de una función?

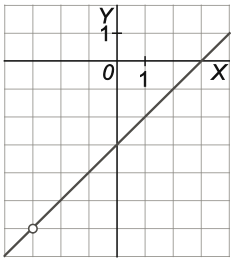
a)



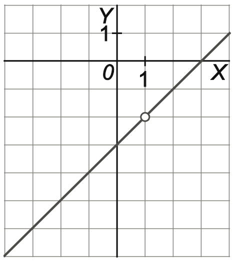
b)



c)



d)



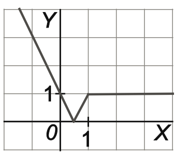
La curva del apartado b no corresponde la gráfica de una función, ya que si $x = -3$, y puede tomar cualquier valor.

119. Dibuja la gráfica de la función:

$$y = \left| x - \sqrt{(x-1)^2} \right|$$

Como $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$, tenemos que dibujar la gráfica de

$$y = \left| x - |x-1| \right| = \begin{cases} |2x-1| & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$



120. Determina de las siguientes afirmaciones cuáles son siempre ciertas y cuáles pueden ser falsas.

a) Si $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, debe haber un número *c* en (1, 2) tal que $f(c) = 0$.

b) Si *f* es continua en [1, 2] y hay un número *c* en (1, 2) tal que $f(c) = 0$, entonces $f(1)$ y $f(2)$ deben ser de diferente signo.

c) Si *f* es continua en [1, 2] y nunca se anula en (1, 2), entonces $f(1)$ y $f(2)$ tienen el mismo signo.

a) Si *f* no es continua, no es necesariamente cierta. Sí es cierta si *f* es continua.

b) No tiene por qué ser cierta. Ejemplo: $f(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$.

c) Es verdadera, pues si *f*(1) y *f*(2) tuvieran distinto signo, al ser la función continua, debería cortar el eje de abscisas entre los puntos (1, *f*(1)) y (2, *f*(2)), en contradicción con el enunciado.

121. Todas las asíntotas estudiadas en este capítulo son líneas rectas. Hay otras curvas a las que se aproxima la gráfica de *f* cuando *x* se aleja del origen. Son las llamadas "ramas parabólicas". Veamos un ejemplo:

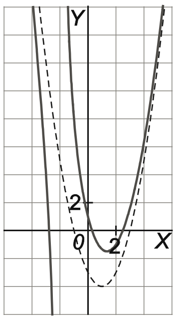
a) Con ayuda de una calculadora gráfica o un ordenador, representa en una misma pantalla las curvas de ecuaciones $f(x)=\dfrac{x^3-7x+2}{x+2}$ y $g(x)=x^2-2x-3$.

b) A la vista del apartado anterior haz una conjetura sobre a qué curva se aproxima la función.

c) Demuestra que tu conjetura es cierta calculando los límites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-g(x)\right)$.

d) Por último, divide el numerador de *f* entre su denominador y comenta el resultado obtenido.

a)



b) $f(x)$ se aproxima a $g(x)$ cuando *x* se aleja del origen.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-7x+2}{x+2}-\left(x^2-2x-3\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x+2}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3-7x+2}{x+2}-\left(x^2-2x-3\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x+2}=0$

d) $\dfrac{x^3-7x+2}{x+2}=x^2-2x-3+\dfrac{8}{x+2}$, con lo que $f(x)$ se aproxima a $g(x)$ cuando *x* se aleja del origen.

De igual manera, en cualquier cociente de polinomios $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ con grado $g\leq$ grado *f*, al hacer la división nos va a dar de cociente un polinomio $c(x)$ y de resto un polinomio $r(x)$ con grado r < grado g, así $\dfrac{f(x)}{g(x)}-c(x)=\dfrac{r(x)}{g(x)}$, con lo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-c(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-c(x)\right]=0$, es decir, la curva $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se va a aproximar, cuando *x* se aleja del origen, a la curva $y=c(x)$.

122. a) Si $g(x)=3x+2$ y $h(x)=9x^2+12x+1$, encuentra una función *f* tal que $f\circ g=h$.

b) Si $g(x)=2x-3$ y $h(x)=x^2+1$, encuentra una función *f* tal que $f\circ g=h$.

a) Como $h(x)=(3x+2)^2-3$, tenemos: $f\circ g=h\Rightarrow f\left(g(x)\right)=h(x)\Rightarrow f\left(3x+2\right)=(3x+2)^2-3\Rightarrow f(x)=x^2-3$

b) $f\circ g=h\Rightarrow f\left(g(x)\right)=h(x)\Rightarrow f\left(2x-3\right)=x^2+1$, esta afirmación será correcta si $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{2}\right)^2+1$, pues $f\left(2x-3\right)=\left(\dfrac{2x-3+3}{2}\right)^2+1=x^2+1$.

123. Pon un ejemplo de dos funciones *f* y *g* tales que no existan $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to1}g(x)$, pero sí exista $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)+g(x)\right)$.

$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x\geq1\end{cases}$ y $g(x)=-f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ -1 & \text{si } x\geq1\end{cases}$

124. Si existen $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)+g(x)\right)$, ¿puede asegurarse que existe $\lim\limits_{x\to1}g(x)$?

Sí, pues $g(x)=\left(f(x)+g(x)\right)-f(x)$ y si existe el límite de dos funciones, también existe el límite de la diferencia de esas funciones.

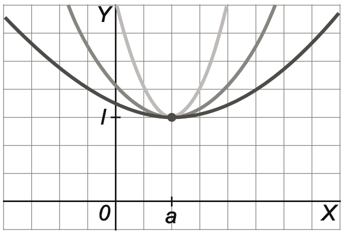
125. Si $f(x)=g(x)$ salvo en 2009 puntos, ¿qué puedes decir de los límites de ambas funciones en $x=5$?

Podemos afirmar que existe el límite de una de ellas solamente si existe el de la otra y, en caso de existir, serán iguales.

126. a) Comprueba gráficamente que si *f*, *g* y *h* son tres funciones tales que $f(x)\le h(x)\le g(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ entonces $\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$

a)



b) Como $-x^2\le x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\le x^2$, y $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,

tenemos $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)=0$.

127. Calcula las asíntotas oblicuas, si existen, de:

a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

b) $f(x)=2x+2^{-x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$

Por tanto, la recta $y=x$ es asíntota oblicua por la derecha y la recta $y=-x$ lo es por la izquierda.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{2^{-x}}{x}\right)=2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-2^{-x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2^{-x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-2^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{2^{-x}}{x}\right)=+\infty$ Por tanto, la recta $y=2x$ es asíntota oblicua por la derecha.

128. En cada caso, dibuja los puntos del plano (*x*, *y*) con $x\ge 0$ que verifican las condiciones:

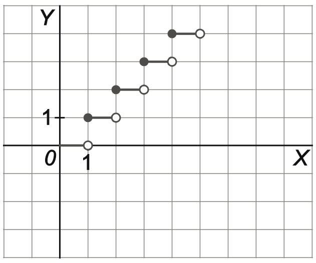
a) $y=[x]$

b) $y=\dfrac{1}{[x]}$

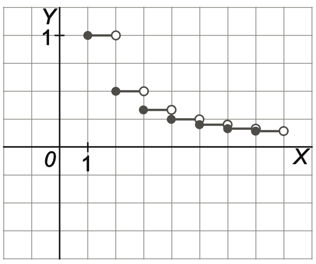
c) $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$

d) $y=\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$

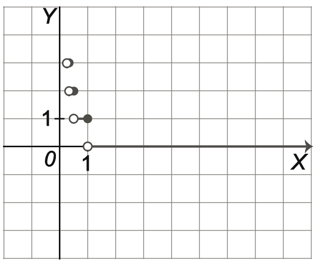
a)



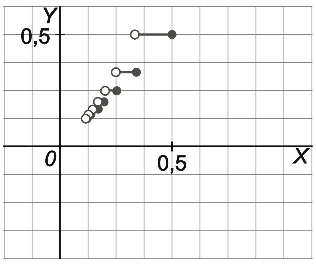
b)



c)



d)



129. ¿Hay algún número *c* para el que exista el siguiente límite?

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 4x + cx + 2c}{x^2 + x - 2}$$

Calcula *c* y el límite correspondiente.

Como el denominador se anula en $x = 1$, para que exista dicho límite el numerador también se debe anular en $x = 1$, por tanto, $2 + 4 + c + 2c = 0$. Así $c = -2$ y $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2(x^2 + x - 2)}{x^2 + x - 2} = 2$.

ENTORNO MATEMÁTICO

Epidemia en clase

En un centro educativo, todos los cursos a la vuelta de Navidades suelen darse unos cuantos casos de gripe, que se contagian unos alumnos a otros, sin mayores consecuencias y que, en la mayoría de los casos, remiten tras algunos días de fiebre y toses.

Este año, doña Ana Lisis, profesora de matemáticas ha preparado un modelo para estudiar la propagación y la evolución de la gripe estacional. Su idea es que sus alumnos lo apliquen y trabajen sobre él, especialmente un grupo de cuatro amigos que cayeron enfermos a la vez el pasado curso, y cuya convalecencia se alargó sospechosamente durante casi dos semanas, causando la envidia de sus compañeros. El 16 de enero, Ana entra en clase y les dice a los chicos: "Anteayer cayó enfermo el primer griposo de este año. Con la experiencia de otros años puedo afirmar que el porcentaje de alumnos enfermos *t* días después de haberse detectado el primer caso viene dado por la función:

$$p(t) = \frac{50t}{t^2 + 49}$$

Eduardo, Luis, Juan y Miguel, dada vuestra amplia experiencia en esta enfermedad, aplicaréis el modelo y controlaréis el número de compañeros afectados. Tendréis que hacer un informe y contestar a estas preguntas:

a) ¿Cuál será el porcentaje de contagiados en los diez primeros días a partir del día uno, 14 de enero?

b) ¿A partir de qué día empezará a remitir la epidemia?

c) A la larga, ¿habrá aún estudiantes enfermos?"

Eduardo mira a sus amigos y se empieza a poner colorado, y no de fiebre precisamente. ¿Puedes intentar ayudar a los "elegidos"?

a) $p(10) = \frac{500}{100 + 49} \simeq 3{,}36$ %

b) Representando la gráfica o haciendo una tabla de valores se observa que la epidemia empieza a remitir a partir del séptimo día.

c) A la larga no hay estudiantes enfermos, ya que $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{50t}{t^2 + 49} = 0$.

Ciudad inmunda

Los medios de comunicación han dado a una ciudad, de manera satírica y algo cruel, el apelativo de "Ciudad Inmunda" debido a la contaminación que tiene. Se estima que, de no poner remedio, la concentración de contaminantes en la ciudad evolucionará según la ecuación $h(t)=5,4+0,6t^2$ con t en años.

Haz, al igual que se hizo en el estudio citado, las predicciones siguientes:

a) Representa la cantidad de polución en función del tiempo.

b) Al final del primer año, ¿cuántas partículas/m^3 habrá en "Ciudad Inmunda"?

c) Si el número de partículas/m^3 supera el valor de 10, se llegaría a un estado de alerta total incompatible con la vida. En ese momento, o se toman medidas drásticas o los ciudadanos podrían morir. ¿En qué año se llegaría a esta catástrofe? (Toma como año inicial el actual).

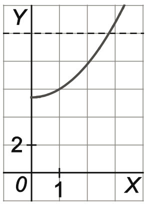
El alcalde don Gris Plomizo muy preocupado por mejorar las perspectivas y la reputación de su ciudad decide poner en marcha un plan de limpieza, cuyo coste en euros por habitante y año se estima dado por la función $c(t)=\dfrac{10+0,1t^2}{0,01\left(1+2t^2\right)}$.

d) ¿Cuánto dinero por habitante habrá que invertir el primer año?

e) ¿En cuántos años el coste por habitante será menor de 10 euros?

f) ¿Cuál será el coste a largo plazo, por habitante y año, del plan de emergencia?

a)



b) Al finalizar el primer año habrá $h(1)=6$ partículas/m^3.

c) $h(t)\geq 10 \Rightarrow 5,4+0,6t^2\geq 10 \Rightarrow t\geq 2.77$, es decir, si tomamos como año inicial 2015 la concentración letal se alcanzaría a finales de 2018.

d) El primer año hay que invertir $c(1)\approx 336,67$ € por habitante.

e) $c(t)<10 \Rightarrow \dfrac{10+0,1t^2}{0,01\left(1+2t^2\right)}<10 \Rightarrow 10+0,1t^2<0,1+0,2t^2 \Rightarrow t>9.95$, es decir, en, aproximadamente, 10 años el coste por habitante se reduce a menos de 10 €.

f) El coste a largo plazo será de $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{10+0,1t^2}{0,01\left(1+2t^2\right)}=\dfrac{0,1}{0,02}=5$ € por habitante y año.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el dominio de la función $f(x)=\sqrt{x^2-x-3}$.

Debe ser $x^2-2x-3\geq 0$, por tanto, $D(f)=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

2. Dadas las funciones $f(x)=5x^2-3x$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$ halla la expresión y el dominio de $f\circ g$, $g\circ f$ y $\frac{g}{f}$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{x-1}\right)=5x-5-3\sqrt{x-1}$ y $D(f\circ g)=[1,+\infty)$.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(5x^2-3x\right)=\sqrt{5x^2-3x-1}$ y $D(g\circ f)=\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{29}}{10}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{29}}{10},+\infty\right)$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{5x^2-3x}$ y $D\left(\frac{g}{f}\right)=[1,+\infty)$.

3. Calcula, si $f(x)=\sqrt{3x^2-x+2}$ y $g(x)=\sqrt{3x^2+1}$, los límites en $-\infty$ y $+\infty$ de las funciones $f-g$ y $\frac{f}{g}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}\right)}{\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+x+2}+\sqrt{3x^2+1}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2-x+2}}{\sqrt{3x^2+1}}=1$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-x+2}}{\sqrt{3x^2+1}}=1$.

4. Indica si la siguiente función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{1}{2|x|-x+1}$$

Tenemos $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{-3x+1} & \text{si } x\le 0\\[2mm] \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x>0\end{cases}$

El denominador de la primera expresión se anula en $x=\frac{1}{3}$ y el de la segunda en $x=-1$, por tanto, solo hay que comprobar si es continua en $x=0$ .Como $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=1$ la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

5. Comprueba que la recta $y=-4x$ es una asíntota de la gráfica de $f(x)=\sqrt{x^2+4}-3x$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}-3x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+3x}{-x}=-4$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-3x+4x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$$

Por tanto, la recta $y=-4x$ es asíntota oblicua por la izquierda.

6. ¿Es la recta $x = 2$ una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$?

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$. Por tanto, la recta $x = 2$ no es asíntota vertical.

7. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+15}} & \text{si } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Comprueba si es continua en $x = 1$.

b) Calcula el valor de a para que sea continua en $x = \dfrac{1}{2}$.

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\left(\sqrt{x+3} - 2\right)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \dfrac{1}{4}$,

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+15}} = \dfrac{1}{4}$ y $f(1) = \dfrac{1}{4}$, por tanto, la función es continua en $x = 1$.

b) Como $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+16}} = 0$ y $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} (ax + 3) = \dfrac{a}{2} + 3$, debe ser $a = -6$.

8. Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5 = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5 = -\infty$, por tanto, $x = 0$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5 = \dfrac{1}{243}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right)^5 = \dfrac{1}{243}$, por tanto, $y = \dfrac{1}{243}$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y $+\infty$.

9. Escribe dos sucesiones que no tengan límite pero que su suma sí lo tenga.

Por ejemplo $a_n = (-1)^n n$ y $b_n = 3 - (-1)^n n$.

10. Calcula $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n^2 + 1}{n^2 - 2n + 1}\right)^{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 2n + 1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2n}{n^2 - 2n + 1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 - 2n + 1}{2n}}\right)^{\frac{n^2 - 2n + 1}{2n}}\right]^{\frac{2n\sqrt{n}}{n^2 - 2n + 1}} = e^0 = 1$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. ¿Cuántas de las siguientes funciones tienen como eje de simetría una recta vertical?

$$f(x) = 1 + |x-4| \qquad g(x) = (x-1)^2 + 2 \qquad h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

La recta $x = 4$ es un eje de simetría de la gráfica de *f*, pues $f(-x+4) = f(x+4)$. La recta $x = 1$es un eje de simetría de *g*pues $g(-x+1) = g(x+1)$. La función *h* no tiene ejes de simetría verticales, de hecho, es simétrica con respecto al origen, pues $h(-x) = h(x)$. Por tanto, la respuesta correcta es C.

2. Si $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ y $f(-3) = 2$, $f(3)$ es igual a

A. 8 **B.** –2 **C.** 1 **D.** 3

$f(-3) = 2 \Rightarrow 91a - 9b - 3 + 5 = 2 \Rightarrow 91a - 9b = 0$ y, por tanto, $f(3) = 91a - 9b + 3 + 5 = 8$, la respuesta A.

3. En una de las cuatro funciones siguientes, la recta $x = 5$ no es una asíntota vertical:

A. $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$

B. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-5} & \text{si } x > 5 \\ 2 & \text{si } x \le 5 \end{cases}$

C. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-7x+10}$

D. $f(x) = \dfrac{x^2-3x-10}{x-5}$

La respuesta correcta es D pues $\lim\limits_{x\to5} f(x) = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2-3x-10}{x-5} = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{(x-5)(x+2)}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}(x+2) = 7$ y en el resto de los casos o bien el límite a la izquierda o el límite a la derecha (o ambos) es infinito.

4. Sea a_n una sucesión en la que ningún término es cero, entonces es cierto que:

A. Si a_n está acotada, entonces es convergente.

B. Si a_n es convergente $\Rightarrow b_n = \sqrt[3]{a_n^{\,2} + 1}$ es convergente.

C. Si a_n es creciente, entonces es convergente.

D. Si a_n es convergente, entonces es creciente o es decreciente.

La respuesta correcta es B, ya que si a_n converge a *a*, b_n converge a $\sqrt[3]{a^2+1}$.

El resto de respuestas son falsas, por ejemplo, $a_n = (-1)^n$ contradice A, $a_n = n$ contradice C y $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ contradice D.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

5. Dada la función $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$, entonces:

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=1$

C. La recta $y=x+1$ es asíntota de la gráfica de *f* en $-\infty$.

D. La recta $y=x-1$ es asíntota de la gráfica de *f* en $-\infty$.

A es falsa, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{-x}=-1$.

B es verdadera, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}=\dfrac{2}{2}=1$.

C y D son falsas, ya que, según los límites anteriores, la asíntota en $-\infty$ es $y=-x+1$.

6. Sean *f* y *g* funciones definidas en $[1,+\infty)$

A. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

B. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

C. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

D. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

A es falsa, un contraejemplo es $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$.

B es falsa, un contraejemplo es $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

C es falsa, un contraejemplo es $f(x)=3$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

D es falsa, un contraejemplo es $f(x)=3$ y $g(x)=x$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

7. Sea *f* una función continua en el intervalo [1, 5]. Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones siguientes:

1. **Existe algún número *c* en (1, 5) con $f(c)=0$.**

2. $(f(1))^3(f(5))^7<0$

A. $1\Rightarrow 2$ pero $2\not\Rightarrow 1$

B. $2\Rightarrow 1$ pero $1\not\Rightarrow 2$

C. $1\Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La condición 2 implica que *f*(1) y *f*(5) tienen signos distintos y por tanto se debe verificar 1. En cambio el recíproco no es cierto, por ejemplo, si $f(x)=(x-3)^2$, se verifica 1 pero no 2. Por tanto, la relación correcta es B.