9 Funciones elementales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Encuentra los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones y estudia su signo.

a) $f(x) = 6x - 5$ **b)** $f(x) = x^2 + 3x - 4$ **c)** $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x+1}$ **d)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

a) $D(f) = \mathbb{R}$. Signo de la función: $f(x) > 0$ si $x > \dfrac{5}{6}$ y $f(x) < 0$ si $x < \dfrac{5}{6}$

Cortes con eje X: $y = 0$; $6x - 5 = 0$; $x = \dfrac{5}{6}$. El punto $A\left(\dfrac{5}{6}, 0\right)$

Corte con eje Y: $x = 0$; $y = 6 \cdot 0 - 5 = -5$. El punto $B(0, -5)$

b) $D(f) = \mathbb{R}$. Signo de la función: $f(x) < 0$ si $x \in (-4, 1)$ y $f(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

Cortes con eje X: $y = 0$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 1$. Los puntos $A(-4, 0)$ y $B(1, 0)$

Corte con eje Y: $x = 0$, $y = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 = -4$. El punto $C(0, -4)$

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Signo de la función: $f(x) > 0$ si $x \in (-2, -1) \cup (3, +\infty)$ y $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 3)$

Cortes con eje X: $y = 0$; $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x+1} = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 3$. Los puntos $A(-2, 0)$ y $B(3, 0)$

Corte con eje Y: $x = 0$, $y = \dfrac{(0-3)(0+2)}{0+1} = \dfrac{-3 \cdot 2}{1} = -6$. El punto $C(0, -6)$

d) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. Signo de la función: $f(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

Cortes con eje X: $y = 0$; $\sqrt{x^2 - 3x} = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$. Los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 0)$

Corte con eje Y: $x = 0$, $y = \sqrt{0^2 - 3 \cdot 0} = 0$. El punto $A(0, 0)$

3. Estudia si las siguientes funciones son pares o impares, o ninguna de las dos cosas.

a) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ **c)** $f(x) = |x|$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

a) $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x = -f(x)$. Por lo que $f(x)$ es impar.

b) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$. Por lo que $f(x)$ es par.

c) $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Por lo que $f(x)$ es par.

d) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^3 + 1} = \dfrac{1}{-x^3 + 1}$. $f(-x) \neq f(x)$. $f(-x) \neq -f(x)$. Por lo que $f(x)$ no es par ni impar.

4. Ejercicio resuelto.

5. Esboza las gráficas de las siguientes parábolas.

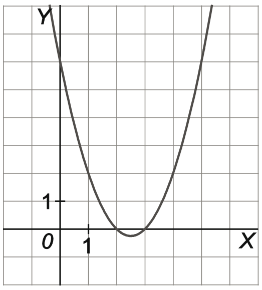
a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = x^2 - x + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 9$

d) $f(x) = -x^2 - 1$

a) $D(f) = \mathbb{R}$. $f(x) = (x-2)(x-3)$.



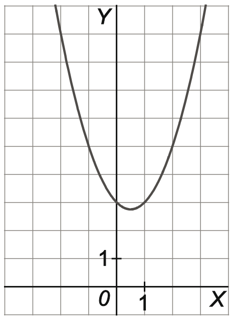
Cortes con el eje *X*: *A*(2, 0) y *B*(3, 0). Corte con el eje *Y*: *B*(0, 6)

Signo de la función: $f(x) > 0$ *si* $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ y $f(x) < 0$ si $x \in (2, 3)$

Vértice de la parábola: $f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = 0$ *si* $x = \frac{5}{2} \Rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. *V* es un mínimo absoluto.

b) $D(f) = \mathbb{R}$. $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$.



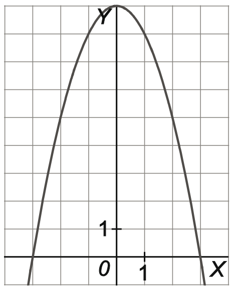
No corta al eje *X*. Corte con eje *Y*: $C(0, 3)$

Signo de la función: *f*(*x*) es siempre positiva.

Vértice de la parábola: $f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 0$ *si* $x = \frac{1}{2} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. *V* es un mínimo absoluto.

c) $D(f) = \mathbb{R}$. $f(x) = -(x-3)(x+3)$.



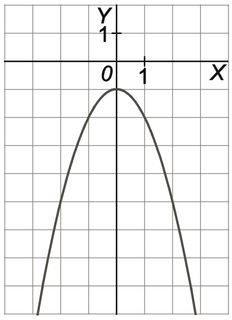
Corte con eje *X*: *A*(–3, 0) y *B*(3, 0). Corte con eje *Y*: *C*(0, –9)

Signo de la función: $f(x) > 0$ si $x \in (-3, 3)$ y $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

Vértice de la parábola: $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0$ *si* $x = 0 \Rightarrow V(0, 9)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. *V* es un máximo absoluto.

d) $D(f) = \mathbb{R}$. $f(x) = -(x^2 + 1)$



No corta al eje *X*. Corte con eje *Y*: *C*(0, –1)

Signo de la función: *f*(*x*) es siempre negativa.

Vértice de la parábola: $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0$ *si* $x = 0 \Rightarrow V(0, -1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. *V* es un máximo absoluto.

6. Determina los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones polinómicas y esboza su correspondiente gráfica.

a) $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

b) $(x) = (x-1)(x+2)(x-4)$

c) $f(x) = -(x-1)^2(x-3)^2$

d) $f(x) = (x^2-4)(x+1)$

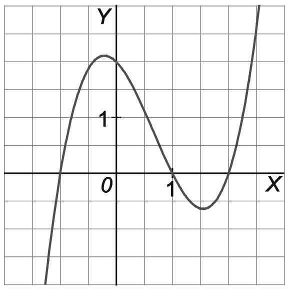
e) $f(x) = -2x(x^2-3x+2)$

f) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$

a) Cortes los ejes: Eje X ($y = 0$): $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(2, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $D(0, 2)$

$-\infty \qquad -1 \qquad 1 \qquad 2 \qquad +\infty$

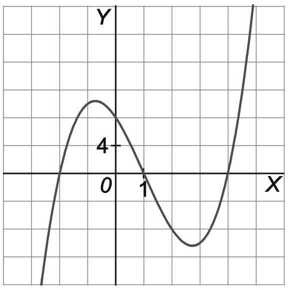
$x+1$	–	+	+	+
$x-1$	–	–	+	+
$x-2$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+



b) Cortes con los ejes: Eje X ($y = 0$): $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(4, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $D(0, 8)$.

$-\infty \qquad -2 \qquad 1 \qquad 4 \qquad +\infty$

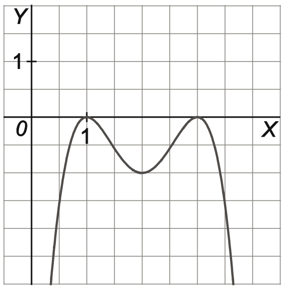
$x+2$	–	+	+	+
$x-1$	–	–	+	+
$x-4$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+



c) Cortes con los ejes: Eje X ($y = 0$): $A(1, 0)$ y $B(3, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $C(0, -9)$

$-\infty \qquad 1 \qquad 3 \qquad +\infty$

$(x-1)^2$	+	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+
$f(x)$	–	–	–

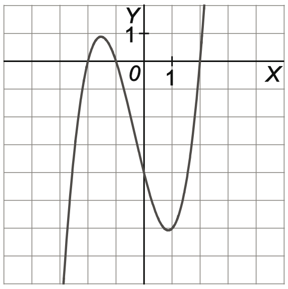


d) $f(x) = (x+2)(x-2)(x+1)$

Cortes con los ejes: Eje X ($y = 0$): $A(-2, 0)$, $B(-1, 0)$ y $C(2, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $D(0, -4)$

$-\infty \qquad -2 \qquad -1 \qquad 2 \qquad +\infty$

$x+2$	–	+	+	+
$x+1$	–	–	+	+
$x-2$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+

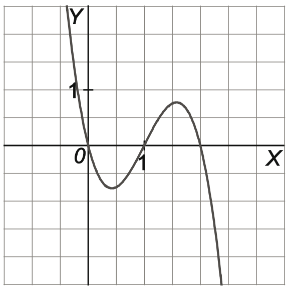


e) $f(x) = -2x(x-1)(x-2)$

Cortes con los ejes: Eje X ($y = 0$): $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ y $B(2, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $O(0, 0)$

$-\infty \qquad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad +\infty$

$-2x$	+	–	–	–
$x-1$	–	–	+	+
$x-2$	–	–	–	+
$f(x)$	+	–	+	–

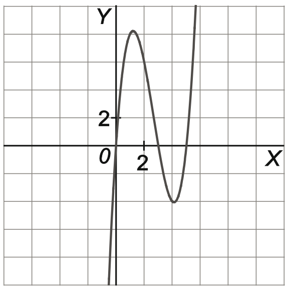


f) $f(x) = x(x-3)(x-5)$.

Corte con los ejes: Eje X ($y = 0$): $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ y $B(5, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $O(0, 0)$

$-\infty \qquad 0 \qquad 3 \qquad 5 \qquad +\infty$

x	–	+	+	+
$x-3$	–	–	+	+
$x-5$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+



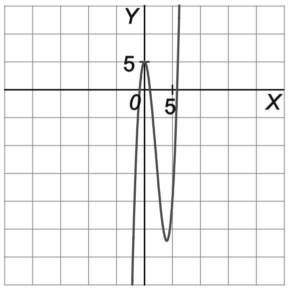
7. Haz el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y dibuja sus gráficas.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
b) $f(x) = x^3 - 7x + 6$
c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 5$
e) $f(x) = 3x^4 - 15x^3 + 19x^2 - 5x + 6$
f) $f(x) = x^5 - 5x^3$

a) $f(x) = (x-1)\left(x - \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{5-3\sqrt{5}}{2}\right) \simeq (x-1)(x-5{,}85)(x+0{,}85)$

Cortes con el eje X ($y = 0$): (–0,85; 0), (1, 0) y (5,85; 0). Corte con el eje Y ($x = 0$): (0, 5)

	$-\infty$ … –0,85	–0,85 … 1	1 … 5,85	5,85 … $+\infty$
$x + 0{,}85$	–	+	+	+
$x - 1$	–	–	+	+
$x - 5{,}85$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \Rightarrow f(x)$ creciente

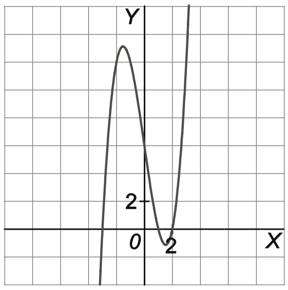
$f'(x) < 0$ si $x \in (0, 4) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $E(0, 5)$ Mínimo relativo: $F(4, -27)$

b) $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$

Cortes con el eje X ($y = 0$): (–3, 0), (1, 0) y (2, 0). Corte con el eje Y ($x = 0$): (0, 6)

	$-\infty$ … –3	–3 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$x + 3$	–	+	+	+
$x - 1$	–	–	+	+
$x - 2$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = 3x^2 - 7$

$f'(x) > 0$ si $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{7}{3}}, +\infty\right) \Rightarrow f(x)$ creciente

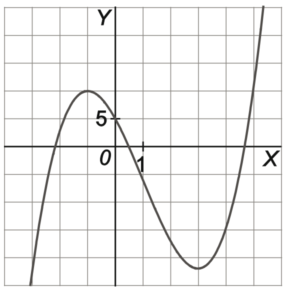
$f'(x) < 0$ si $x \in \left(-\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $\left(-\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \dfrac{14}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}} + 6\right)$ Mínimo relativo: $\left(\sqrt{\dfrac{7}{3}}, -\dfrac{14}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}} + 6\right)$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x = x(x^2 - 3x - 9)$

Cortes con el eje X ($y = 0$): (0, 0), $\left(\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$. Corte con el eje Y ($x = 0$): (0, 0)

	$-\infty$ … –1,850	–1,850 … 0	0 … –4,85	–4,85 … $+\infty$
x	–	–	+	+
$x^2 - 3x - 9$	+	–	–	+
f(x)	–	+	–	+



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \Rightarrow f(x)$ creciente

$f'(x) < 0$ si $x \in (-1, 3) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $(-1, 5)$. Mínimo relativo: $(3, -27)$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 5$

Corte con eje X ($y = 0$): (5, 0).
Corte con eje Y ($x = 0$): (0, –5).

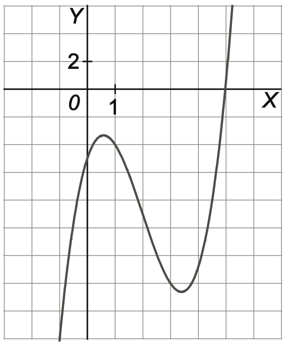
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 6$

$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup \left(2+\sqrt{2}, +\infty\right) \Rightarrow f(x)$ creciente

$f'(x) < 0$ si $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $\left(2-\sqrt{2}, -9+4\sqrt{2}\right)$; Mínimo relativo: $\left(2+\sqrt{2}, -9-4\sqrt{2}\right)$



e) $f(x) = 3x^4 - 15x^3 + 19x^2 - 5x + 6$

Corte con eje X ($y = 0$): (2, 0) y (3, 0)
Corte con eje Y ($x = 0$): (0, 6)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

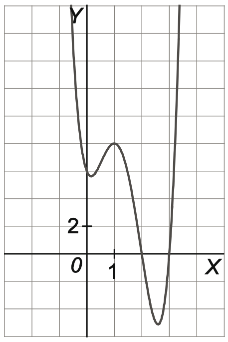
No presenta simetrías.

$f'(x) = 12x^3 - 45x^2 + 38x - 5 = (x-1)\left(12x^2 - 33x + 5\right) \simeq (x-1)(x-0{,}16)(x-2{,}59)$

$f'(x) > 0$ si $x \in (0{,}16; 1) \cup (2{,}59; +\infty) \Rightarrow f(x)$ creciente

$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty; 0{,}16,) \cup (1; 2{,}59) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $(1, 8)$; Mínimo relativo: $(0{,}16; 5{,}63)$; Mínimo absoluto: $(2{,}59; -5{,}11)$



f) $f(x) = x^5 - 5x^3 = x^3(x^2 - 5) = x^3(x + 2{,}24)(x - 2{,}24)$ es una función impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

Cortes con el eje X ($y = 0$): A(–2,24; 0), O(0, 0) y B(2,24; 0). Corte con el eje Y ($x = 0$): O(0, 0)

	$-\infty$ … –2,24	–2,24 … 0	0 … 2,24	2,24 … $+\infty$
$x + 2{,}24$	–	+	+	+
x^3	–	–	+	+
$x - 2{,}24$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+

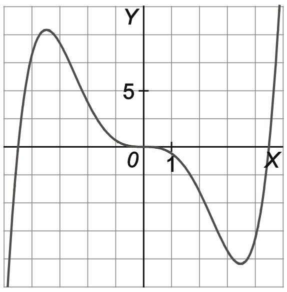
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$

$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right) \Rightarrow f(x)$ creciente

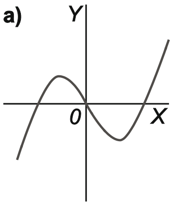
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $\left(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right)$ Mínimo relativo: $\left(\sqrt{3}, -6\sqrt{3}\right)$

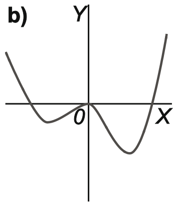


8. Las gráficas siguientes son de funciones polinómicas. Deduce en cada caso cuál es su mínimo grado posible y el signo del coeficiente de mayor grado.

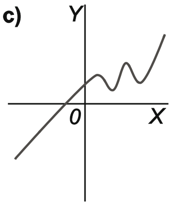
a)



b)



c)



a) Está función tiene 2 extremos relativos, por lo que su derivada $f'(x)$ debe tener, al menos, 2 raíces distintas, y será, pues, como mínimo de grado 2. Por tanto, como la función f(x) es de un grado más que su derivada, será, como mínimo, de grado 3: $f(x) = ax^3 + \ldots$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (ax^3 + ...) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^3 = +\infty$, el coeficiente *a* del monomio de mayor grado es positivo.

b) En la gráfica se ve que la función tiene 3 extremos relativos, por lo que su derivada $f'(x)$ debe ser, al menos, de grado 3. Así pues, la función f(x), será, como mínimo, de grado 4: $f(x) = ax^4 + \ldots$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (ax^4 + ...) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^4 = +\infty$, el coeficiente *a* del monomio de mayor grado es positivo.

c) La función tiene 4 extremos relativos, por lo que la función $f(x)$, será, como mínimo, de grado 5: $f(x) = ax^5 + \ldots$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (ax^4 + ...) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^4 = +\infty$, el coeficiente *a* del monomio de mayor grado es positivo.

9. Determina la expresión de una función polinómica de grado cuatro que tenga simetría respecto del eje *Y* y que no corte en ningún punto al eje de abscisas.

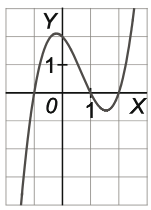
Por ser simétrica respecto del eje *Y*, $f(x)$ tiene simetría par, y por ser polinómica, debe ser de la forma: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Además, si $f(x)$ no corta al eje de abscisas, los coeficientes *a*, *b* y *c* debe ser tales que la ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ no tenga solución real, por ejemplo $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$.

10. Escribe una función polinómica de tercer grado, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $b \neq 0$ que no tenga ni máximos ni mínimos relativos.

Para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ no tenga ni máximos ni mínimos relativos, es suficiente que la derivada nunca se haga cero, es decir, que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \neq 0$ para todo *x*. Para ello basta con que el discriminante de la ecuación $3ax^2 + 2bx + c = 0$ sea negativo, es decir, que $4b^2 - 12ac < 0$. Esta situación se presenta, por ejemplo, con $b = 1$, $c = 1$, $a = 1$. Podemos elegir, en ese caso, cualquier valor para el coeficiente *d*, como por ejemplo $d = 0$
Así pues $f(x) = x^3 + x^2 + x$ no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

11. Escribe una función polinómica de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo.

Basta con pensar en una función que corte tres veces al eje de abscisas, cambiando de signo cada vez, por ejemplo: $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$.



12. Ejercicio resuelto.

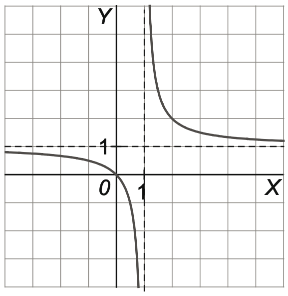
13. Realiza el estudio de estas funciones racionales y dibuja su correspondiente gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ **g)** $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+1}$ **e)** $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-4}$ **h)** $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **i)** $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$



Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

La función es positiva en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(0,1)$.

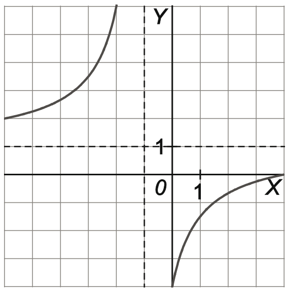
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, por tanto, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ no se anula nunca: es negativa en todo el dominio, por tanto la función es siempre decreciente y carece de extremos relativos.

b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$



Corte con el eje X: $f(x)=0\Rightarrow\dfrac{x-4}{x+1}=0\Rightarrow x-4=0\Rightarrow x=4$, es decir, f corta al eje X en el punto $A(4,0)$.

Corte con el eje Y: $f(0)=-4$, es decir, f corta al eje Y en $B(0,-4)$.

La función es positiva en $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ y negativa en $(-1, 4)$.

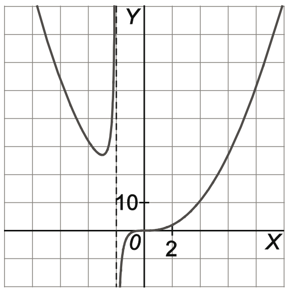
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-4}{x+1}=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-4}{x+1}=1$, por tanto, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}$ no se anula nunca: es positiva en todo el dominio, por tanto la función es siempre creciente y carece de extremos relativos.

c) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x+2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\}$



Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

La función es positiva en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y negativa en $(-2, 0)$.

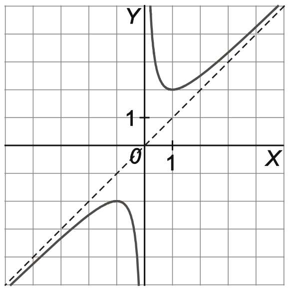
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=\dfrac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$ se anula en $x=-3$ y en $x=0$. La derivada es negativa (función decreciente) en $(-\infty,-3)$ y positiva (función creciente) en $(-3,-2)$ por lo que el punto $A(-3, 27)$ es un mínimo relativo. Es positiva (función creciente) en $(-2, 0)$ y sigue siendo positiva (función creciente) en $(0,+\infty)$, por lo que el punto $O(0, 0)$ no es un extremo a pesar de que tenga tangente horizontal. Es un punto de inflexión.

d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$



Es una función impar porque $f(-x) = -f(x)$, por tanto, su gráfica es simétrica respeto del origen de coordenadas.

No corta al eje X porque $f(x)$ nunca se anula.

No corta al eje Y porque $x = 0 \notin D(f)$.

La función es negativa en $(-\infty, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$

Asíntotas verticales: Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -0^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$, por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

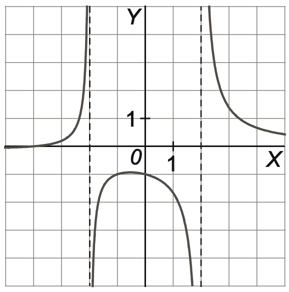
Como sí cumple la condición de los grados, dividimos para obtener la asíntota oblicua: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.

La asíntota oblicua es la recta $y = x$.

La derivada $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ se anula en $x = -1$ y en $x = 1$.

La derivada es positiva (función creciente) en $(-\infty, -1)$ y negativa (función decreciente) en $(-1, 0)$, por lo que el punto $A(-1, -2)$ es un máximo relativo. Y es negativa (función decreciente) en $(0, 1)$ y positiva (función creciente) en $(1, +\infty)$, por lo que el punto $B(1, 2)$ es un mínimo relativo.

e) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$



Corta a los ejes en los puntos $A(-4, 0)$ y $B(0, -1)$.

La función es negativa en $(-\infty, -4) \cup (-2, 2)$ y positiva en $(-4, -2) \cup (2, +\infty)$.

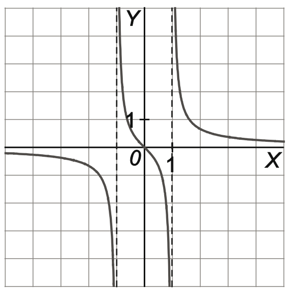
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Y también, como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas, porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x) = -\dfrac{x^2+8x+4}{(x^2-4)^2}$ se anula en $x = -7{,}46$ y en $x = -0{,}54$. La derivada es negativa (función decreciente) en $(-\infty; -7{,}46)$ y positiva (función creciente) en $(-7{,}46, -2)$, por lo que el punto $C(-7{,}46; -0{,}07)$ es un mínimo relativo. La derivada es positiva (función creciente) en $(-2; -0{,}54)$ y negativa (función decreciente) en $(-0{,}54; 2)$, por lo que el punto $D(-0{,}54; -0{,}93)$ es un máximo relativo. Además, en $(2, +\infty)$ la derivada es negativa y la función decreciente.

f) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$



Es una función impar porque $f(-x) = -f(x)$, por tanto, su gráfica es simétrica respeto del origen de coordenadas.

Solo corta a los ejes en el punto $O(0, 0)$.

La función es negativa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y positiva en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

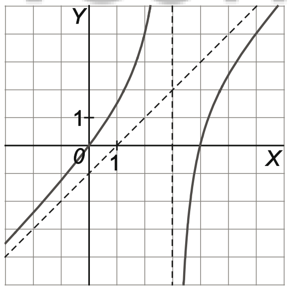
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical. Y también, como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$, por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x) = -\dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ no se anula nunca: es negativa en todo el dominio, por tanto la función es siempre decreciente y carece de extremos relativos.

g) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$



Corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x}{x - 3} = \frac{x(x-4)}{x-3} = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 4$, por tanto, *f* corta al eje *X* en los puntos $O(0,0)$ y $A(4,0)$.

Corta al eje *Y* en el origen de coordenadas.

La función es negativa en $(-\infty, 0) \cup (3, 4)$ y positiva en $(0, 3) \cup (4, +\infty)$.

Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

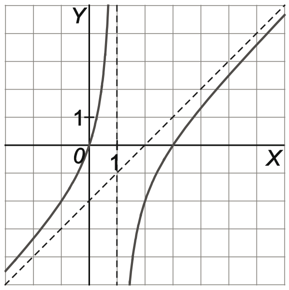
Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

Como cumple la condición de los grados, dividimos para obtener la asíntota oblicua:

$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 3} = x - 1 - \frac{3}{x - 3}$. La asíntota oblicua es la recta $y = x - 1$.

La derivada $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 12}{(x-3)^2}$ no se anula nunca pues $x^2 - 6x + 12 = (x-3)^2 + 3$. Es positiva en todo el dominio, por tanto la función es siempre creciente y carece de extremos relativos.

h) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$



Corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \frac{x(x-3)}{x-1} = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 3$, por tanto, *f* corta al eje *X* en los puntos $O(0,0)$ y $A(3,0)$.

Corta al eje *Y* en el origen de coordenadas *O*.

La función es negativa en $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$ y positiva en $(0, 1) \cup (3, +\infty)$.

Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

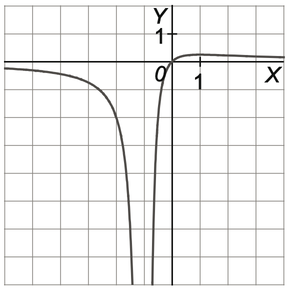
Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = -\infty$, por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

Como cumple la condición de los grados, dividimos para obtener la asíntota oblicua:

$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = x - 2 - \frac{2}{x - 1}$. La asíntota oblicua es la recta $y = x - 2$.

La derivada $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$ no se anula nunca ya que $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$, por lo que es positiva en todo el dominio. Por tanto la función es siempre creciente y carece de extremos relativos.

i) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{-1\}$



Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

La función es negativa en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$.

Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

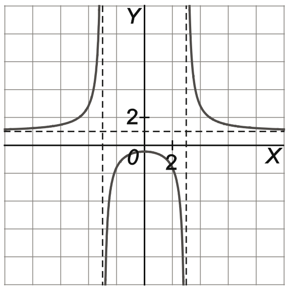
No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada, $f'(x) = \frac{1 - x}{(x+1)^3}$, se anula en $x = 1$: es positiva (función creciente) en $(-1, 1)$ y es negativa (función decreciente) en $(1, +\infty)$, por tanto el punto $A\left(1, \frac{1}{4}\right)$ es un máximo absoluto.

14. Estudia las siguientes funciones racionales y dibuja su correspondiente gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-9}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{9x^2}{x^2+x-2}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} : x^2-9\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-3, 3\}$



La función es par, por lo tanto, simétrica respecto del eje *Y*.

No corta al eje X. El corte con el eje Y es el punto $A\left(0, -\dfrac{4}{9}\right)$.

Asíntotas verticales:

Como $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-3$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=3$ es una asíntota vertical.

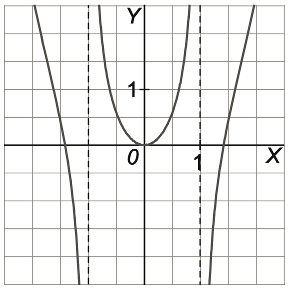
Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2-9}=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2-9}=1$, por tanto, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=\dfrac{-26x}{(x^2-9)^2}$ se anula en $x=0$. Es positiva en $(-\infty, -3)\cup(-3, 0)$ y negativa en $(0, 3)\cup(3, +\infty)$ por lo que el punto $A\left(0, -\dfrac{4}{9}\right)$ es un máximo relativo.

b) $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2-1}=\dfrac{x^2(x^2-2)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x^2\left(x+\sqrt{2}\right)(x-\sqrt{2})}{(x+1)(x-1)}$



$D(f)=\{x\in\mathbb{R} : x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1, 1\}$

La función es par, por lo tanto, simétrica respecto del eje *Y*.

Solo corta a los ejes en el punto $O(0, 0)$.

Asíntotas verticales:

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

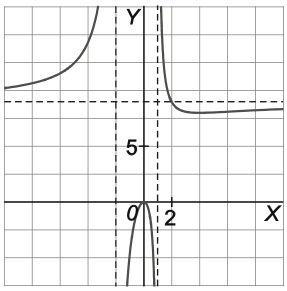
Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=\dfrac{2x(x^4-2x^2+2)}{(x^2-1)^2}$ se anula en $x=0$. Es negativa (función decreciente) en $(-\infty, -1)\cup(-1, 0)$ y positiva (función creciente) en $(0, 1)\cup(1, +\infty)$. El punto $O(0, 0)$ es un mínimo relativo.

c) $f(x)=\dfrac{9x^2}{x^2+x-2}=\dfrac{9x^2}{(x+2)(x-1)}$



$D(f)=\{x\in\mathbb{R} : (x+2)(x-1)\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2, 1\}$.

Solo corta a los ejes en el punto $O(0, 0)$.

La función es positiva en $(-\infty, -2)\cup(1, +\infty)$ y negativa en $(-2, 0)\cup(0, 1)$.

Asíntotas verticales: Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical y como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ también lo es.

Asíntotas horizontales: Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=9$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=9$, la recta $y=9$ es asíntota horizontal de la función, tanto a la derecha como a la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{9x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$ se anula en $x=0$ y en $x=4$. Es positiva (función creciente) en $(-\infty, -2)\cup(-2, 0)\cup(4, +\infty)$ y negativa (función decreciente) en $(0, 1)\cup(1, 4)$.

Por tanto, el punto $O(0, 0)$ es un máximo relativo y el punto $A(4, 8)$ es un mínimo relativo.

15. Representa una función racional cuyas asíntotas son las rectas $x = -2$, $x = 4$ e $y = -2$ y cuya derivada es siempre negativa en todos los puntos en que está definida. ¿Cuántas veces se anula una función con estas propiedades?

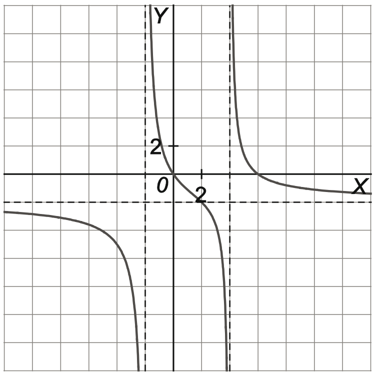
Se trata de un cociente de polinomios de igual grado en el numerador y en el denominador. El denominador se anula en $x = -2$ y $x = 4$.

Al ser la función siempre decreciente, debe ocurrir que $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$, por lo que entre $x = -2$ y $x = 4$ debe anularse una vez y tener un punto de inflexión, (no puede tener máximos ni mínimos).

También debe anularse en $(4, +\infty)$.

Otra posible opción es que en esos puntos tuviese una discontinuidad evitable.

Una posible gráfica se muestra al margen.



16. Ejercicio resuelto.

17. Haz un estudio de las siguientes funciones radicales y dibuja su gráfica.

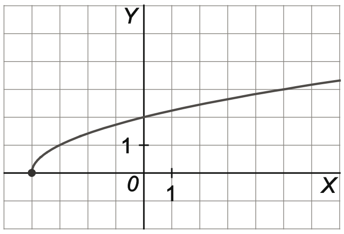
a) $f(x) = \sqrt{x+4}$ **b)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x}{x-2}}$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x + 4 \geq 0\} = [4, +\infty)$

$f(x) = \sqrt{x+4}$ es continua y nunca es negativa.

Corte con ejes: $A(-4, 0)$ y $B(0, 2)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales. No tiene asíntotas verticales.



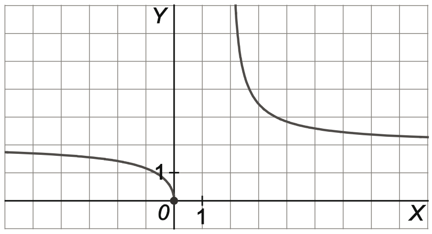
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$, siempre es positiva (salvo en $x = -4$), por lo que la función es creciente.

b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{4x}{x-2} \geq 0\right\} = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$

Nunca es negativa. Corte con ejes: $O(0, 0)$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

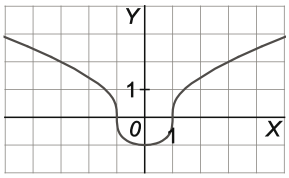
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.



$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}$ siempre es negativa, la función es decreciente. No tiene puntos con tangente horizontal.

c) $D(f) = \mathbb{R}$. Es continua. No tiene asíntotas verticales. Es par, por lo tanto, simétrica respecto del eje X. Corte con ejes: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ no tiene asíntotas horizontales. No tiene asíntotas oblicuas.

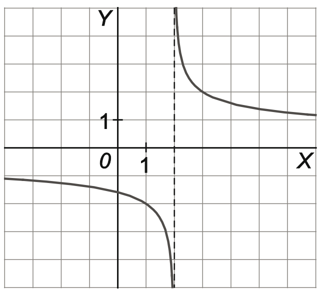


$f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ se anula en $x = 0$: es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. $O(0,0)$ es un mínimo absoluto.

d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$ No corta a los ejes.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha. No tiene asíntotas oblicuas.



$f'(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{(x-2)^4}} = \dfrac{-2}{(3x-6)\sqrt[3]{x-2}}$ es siempre negativa, por lo que la función $f(x)$ es decreciente. No tiene puntos con tangente horizontal.

18. Realiza el estudio completo y representa:

a) $f(x)=\sqrt{(x-2)(x-1)}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:(x-2)(x-1)\geq 0\}=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

Corte con el eje X: $f(x)=0\Rightarrow\sqrt{(x-2)(x-1)}=0\Rightarrow(x-2)(x-1)=0\Rightarrow x=1$ y $x=2\Rightarrow$ Puntos $A(1,0)$ y $B(2,0)$.

Corte con el eje Y. $f(0)=\sqrt{2}$, es decir, f corta al eje Y en $C\left(0,\sqrt{2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. No tiene asíntotas horizontales. No tiene asíntotas verticales.

Las asíntotas oblicuas serán de la forma $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x-2)(x-1)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2}}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x-2)(x-1)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)(x-1)-x^2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}+x}=-\frac{3}{2}$$

Así pues, la recta $y=x-\dfrac{3}{2}$ es una asíntota oblicua.

Cuando $x\to-\infty$, podría haber otra asíntota oblicua, también de la forma $y=mx+n$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{(x-2)(x-1)}}{x}=-1$. Obsérvese que $\left|\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\right|=1$ y como $\dfrac{f(x)}{x}$ es negativo para valores negativos de x, entonces $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ debe ser -1 claramente.

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x-2)(x-1)}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)(x-1)-x^2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}-x}$$

Para hallar este último límite, lo mejor es hacer un cambio de variable $x=-t$ y calcular:

$$n=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}-x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t+2}{\sqrt{(-t-2)(-t-1)}+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t+2}{\sqrt{t^2+3t+2}+t}=\frac{3}{2}$$

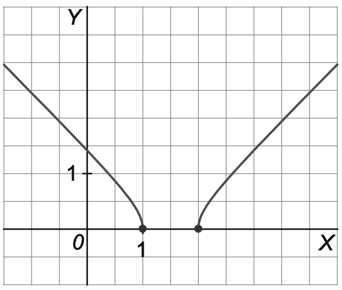
Es decir, por la izquierda la asíntota oblicua es la recta $y=-x+\dfrac{3}{2}$.

Este último cálculo de la asíntota oblicua por la izquierda podríamos haberlo obviado si caemos en la cuenta de que la función es simétrica respecto de la recta vertical $x=\dfrac{3}{2}$.

La derivada $f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x-2)(x-1)}}$ se anula en $x=\dfrac{3}{2}\notin D(f)$. No tiene puntos con tangente horizontal.

La función decrece si $x<1$ y crece si $x>2$.

La gráfica será, pues:



b) $\sqrt{1-x}$ está definida para $x \le 1$. El denominador se anula para $x = 0$, así que $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

Corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} = 0 \Rightarrow x = 0$, que como no pertenece al dominio, *f* no corta al eje *X*.

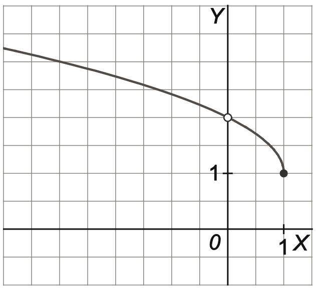
No corta al eje *Y* ya que $x = 0$ no está en el dominio.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ no existe ya que la función no está definida para dichos valores.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-1+x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1-x}\right) = 2$.

No tiene asíntotas verticales. En el punto de abscisa $x = 0$ hay una discontinuidad evitable.
No tiene asíntotas oblicuas.
La derivada $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ nunca es positiva. La función es decreciente. No tiene puntos con tangente horizontal.



19. Ejercicio interactivo.

20. Ejercicio resuelto.

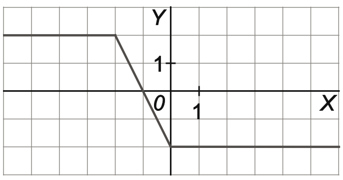
21. Escribe las siguientes funciones como funciones a trozos y dibuja su gráfica.

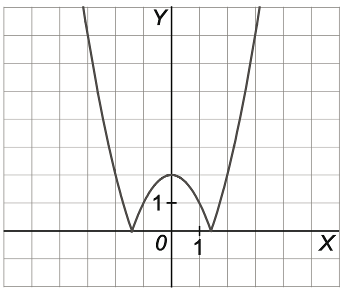
a) $f(x) = |x| - |x+2|$

b) $g(x) = |x^2 - 2|$

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -2 \\ -2x-2 & \text{si } -2 < x < 0 \\ -2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x < -\sqrt{2} \\ 2-x^2 & \text{si } -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \\ x^2-2 & \text{si } x > \sqrt{2} \end{cases}$



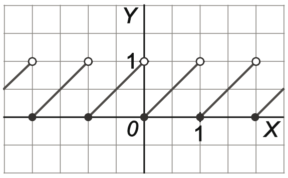


22. Ayudándote de una tabla de valores representa las siguientes funciones:

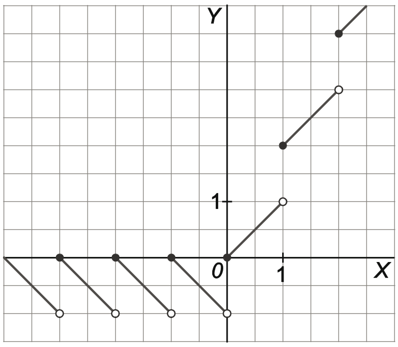
a) $f(x) = x - [x]$

b) $g(x) = |x| + [x]$

a) La función coincide con la parte decimal de x.



b) Cuidado al calcular $g(x)$ para valores negativos de x



23. Ejercicio resuelto.

24. Determina el dominio de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas.

a) $f(x) = a^{\sqrt{x^2-1}}$

b) $f(x) = a^{\frac{x}{x+2}}$

c) $g(x) = \log_a\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

d) $g(x) = \log_a \sqrt[3]{1-x^2}$

a) $x^2 - 1 \geq 0$ si $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \Rightarrow D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

c) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $1 - x^2 > 0$ si $x \in (-1, 1) \Rightarrow D(f) = (-1, 1)$

25. Realiza el estudio de las siguientes funciones y dibuja sus gráficas.

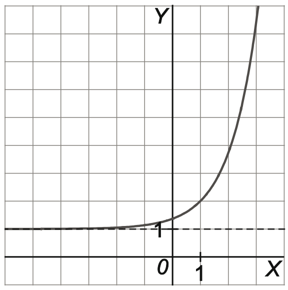
a) $f(x) = e^{x-1} + 1$

b) $f(x) = xe^{-x}$

c) $f(x) = \ln(x+1)$

d) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

a) Una opción sencilla para representar esta función es partir de $y = e^x$, desplazándola una unidad a la derecha para obtener $y = e^{x-1}$ y, finalmente, subirla una unidad, para obtener $f(x)$.



$D(f) = \mathbb{R}$. Es continua y siempre positiva. No tiene asíntotas verticales.

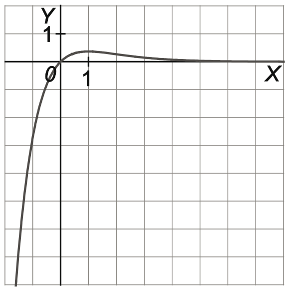
Puntos de corte con los ejes: $A\left(0, \frac{1}{e} + 1\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La recta y = 1 es una asíntota horizontal por la izquierda.

Su derivada $f'(x) = e^{x-1}$ es siempre positiva por lo que la función es creciente en todo su dominio.

No tiene extremos relativos.

b) $D(f) = \mathbb{R}$. Es continua. No tiene asíntotas verticales.



Puntos de corte con los ejes: $O(0, 0)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

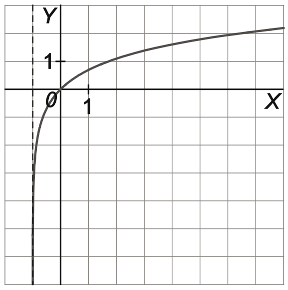
La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por la derecha.

Su derivada $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$ se anula si $x = 1$.

La función es creciente si x < 1 y decreciente si x > 1.

El punto $B\left(1, \frac{1}{e}\right)$ es un máximo absoluto.

c) La gráfica es la de la de $y = \ln x$ desplazada una unidad a la izquierda.



$D(f) = (-1, +\infty)$. Es continua.

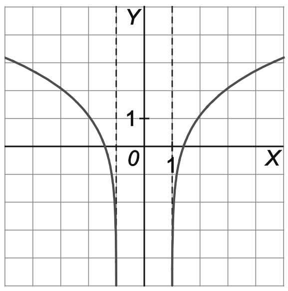
Puntos de corte con los ejes: $O(0, 0)$.

Como $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la función.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Su derivada $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ es siempre positiva por lo que la función es creciente en todo su dominio. No tiene extremos relativos.

d) $x^2 - 1 > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.



Puntos de corte con los ejes: $A\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $B\left(\sqrt{2}, 0\right)$.

Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la función.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Su derivada $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ se anula en $x = 0 \notin D(f)$.

La función es decreciente si x < –1 y creciente si x > 1.

No tiene extremos relativos.

26. Utilizando la calculadora, halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones, restringiendo el resultado a ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

a) $\text{sen}x = \frac{1}{2}$

b) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\text{sen}x = 0$

a) $x = \frac{\pi}{6}\text{rad} = 30°$

b) $x = \frac{\pi}{3}\text{rad} = 60°$

c) $x = \frac{\pi}{4}\text{rad} = 45°$

d) $x = 0\,\text{rad} = 0°$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{arcsen}\left(3x^3 - 2x + 1\right)$

b) $f(x) = \arccos\left(x + \text{sen}x\right)$

c) $f(x) = \arccos e^x$

d) $f(x) = \text{arctg}\sqrt{x}$

a) $f'(x) = \frac{9x^2 - 2}{\sqrt{1 - \left(3x^3 - 2x + 1\right)^2}}$

b) $f'(x) = \frac{-(1 + \cos x)}{\sqrt{1 - \left(x + \text{sen}x\right)^2}}$

c) $f'(x) = \frac{-e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

d) $f'(x) = \frac{1}{1 + x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

28. Ejercicio interactivo.

29. Ejercicio resuelto.

30. Un joven es contratado por una compañía telefónica como vendedor. Debe elegir entre dos tipos de retribución:

- ***A*: un sueldo fijo de 420 € más el 14 % de las ventas que consiga.**
- ***B*: un 26 % de las ventas que consiga.**

a) Encuentra dos funciones que aclaren al joven cómo se comporta cada uno de los sueldos dependiendo de lo que venda.
b) Según el volumen de ventas que realice, ¿cuál de los dos sueldos es más ventajoso?

a) Si llamamos *x* a las ventas (€) conseguidas, los sueldos (€) vienen dados por estas dos funciones: $A(x) = 420 + \frac{14}{100}x$; $B(x) = \frac{26}{100}x$

b) $A(x) = B(x)$ si $420 + 0{,}14x = 0{,}26x$, es decir, si $x = 3500$ €.
Hasta 3500 € de venta es preferible *A* y a partir de dicho volumen es preferible *B*.

31 a 36. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Propiedades globales de las funciones

37. Para las siguientes funciones, determina el dominio, calcula los puntos de corte con los ejes y estudia el signo, según los valores que tome la variable independiente a lo largo del dominio. Esboza la gráfica de la función.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = (x-1)(x-3)^2(x-7)$

c) $f(x) = x(x^2+2)(x^2-1)$

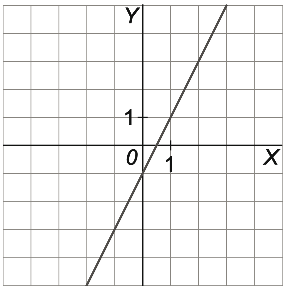
d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4}$

e) $f(x) = \dfrac{(x^2-9)x}{x+3}$

a) La función es una recta creciente. $D(f) = \mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes: $A\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ y $B(0, -1)$

La función es positiva en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ y negativa en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.



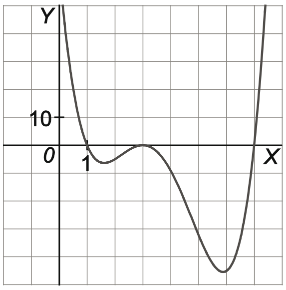
b) Función polinómica. $D(f) = \mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $A(0, 63)$; $B(1, 0)$; $C(3, 0)$; $D(7, 0)$

Signo: Como es continua, sólo podría cambiar de signo cuando corta al eje X.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La función es positiva en $(-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ y negativa en $(1, 3) \cup (3, 7)$.



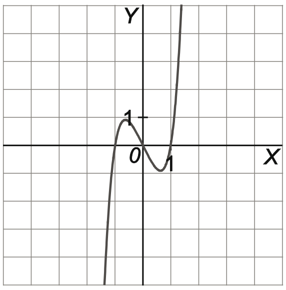
c) Función polinómica. $f(x) = x(x^2+2)(x^2-1) = x(x^2+2)(x-1)(x+1)$

$D(f) = \mathbb{R}$. Puntos de corte con los ejes: $A(0, 0)$; $B(-1, 0)$; $C(1, 0)$

Signo: Como es continua, sólo podría cambiar de signo cuando corta al eje X.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La función es positiva en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

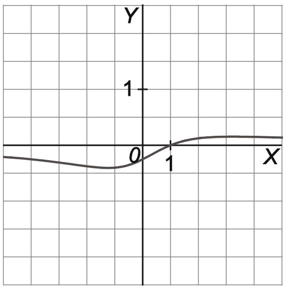


d) Función racional. $D(f) = \mathbb{R}$. El denominador no se anula nunca.

Puntos de corte con los ejes: $A\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$; $B(1, 0)$

Signo: La función es positiva en $(7, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, 1)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

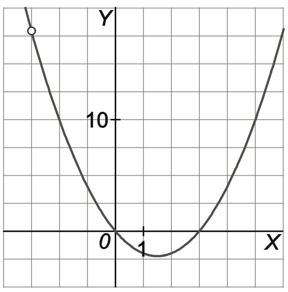


e) Si $x \neq -3$, $f(x) = \dfrac{(x^2-9)x}{x+3} = \dfrac{(x+3)(x-3)x}{x+3} = x(x-3)$. La gráfica de $f(x)$ es la de la parábola $g(x) = x(x-3)$ con un agujero en $A(-3, 18) \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

Puntos de corte con los ejes: $B(0, 0)$; $C(3, 0)$

La función es positiva en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ y negativa en (0, 3).

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



38. Estudia si las siguientes funciones tienen simetría respecto del eje *Y* o respecto del origen de coordenadas.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

b) $f(x) = x(x-1)(x+1)$

c) $f(x) = x^2 - 3x$

d) $f(x) = x^2(x^2-1)(x^2+1)$

e) $f(x) = \dfrac{x}{2x^3 - 5}$

f) $f(x) = \dfrac{x^4 + x}{2x+1}$

g) $f(x) = x^2|x|$

h) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x| - x^2}$

a) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3 = f(x)$. La función es simétrica con respecto del eje *Y*.

b) $f(-x) = -x(-x-1)(-x+1) = -x(x+1)(x-1) = -f(x)$. La función es simétrica respecto del origen.

c) $f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) = x^2 + 3x$. No presenta ninguna de las dos simetrías.

d) $f(-x) = (-x)^2\left[(-x)^2 - 1\right]\left[(-x)^2\right] + 1 = x^2(x^2-1)(x^2+1) = f(x)$. La función es simétrica con respecto del eje *Y*.

e) $f(-x) = \dfrac{-x}{2(-x)^3 - 5} = \dfrac{-x}{-2x^3 - 5} = \dfrac{x}{2x^3 + 5}$. No presenta ninguna de las dos simetrías.

f) $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 + (-x)}{2(-x) + 1} = \dfrac{x^4 - x}{-2x + 1}$. No presenta ninguna de las dos simetrías.

g) $f(-x) = (-x)^2|-x| = x^2|x| = f(x)$. La función es simétrica con respecto del eje *Y*.

h) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{|-x| - (-x)^2} = \dfrac{-x^3}{|x| - x^2} = -f(x)$. La función es simétrica respecto del origen.

39. Halla el dominio de las siguientes funciones y los puntos en donde cortan a los ejes de coordenadas.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 2 + \dfrac{10}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3+x} - \dfrac{1}{3-x}$

[Nota: en cada caso escribe la función dada como cociente de dos polinomios.]

a) $f(x) = x^2 + 2x + 2 + \dfrac{10}{x-3} = \dfrac{(x^2+2x+2)(x-3)+10}{x-3} = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x-3} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)}{x-3}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Puntos de corte con los ejes: $A\left(0, -\dfrac{4}{3}\right); B(-2, 0); C(1, 0); D(2, 0)$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{3+x} - \dfrac{1}{3-x} = \dfrac{-2x}{(3+x)(3-x)}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Funciones polinómicas

40. Encuentra la función lineal $f(x) = ax + b$ que pasa por los puntos (2, –3) y (5, 3).

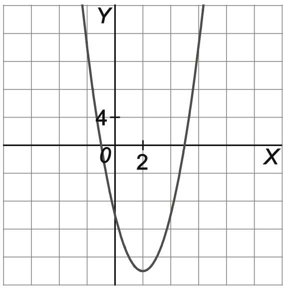
Si $f(x) = ax + b$, $\left.\begin{matrix} f(2) = -3 \\ f(5) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a + b = -3 \\ 5a + b = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 2, b = -7 \Rightarrow f(x) = 2x - 7$

41. Una parábola corta los ejes en los puntos (–1, 0), (5, 0) y (0, –10).

a) ¿Cuál es su vértice?

b) ¿Pasa por el punto (3, 16)?

c) Esboza su gráfica.



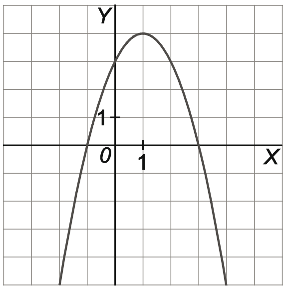
Al cortar al eje de abscisas en $A(-1, 0)$ y $B(5, 0)$ la abscisa de su vértice es $\frac{5+(-1)}{2} = 2$, y la ecuación de la parábola es $f(x) = a(x - 2)^2 + k$.
Como $f(5) = 0$, es $9a + k = 0$ y como $f(0) = -10$, tenemos que $4a + k = -10$.
Restando estas dos últimas igualdades, llegamos a $a = 2$, $k = -18$
La parábola es $y = 2(x - 2)^2 - 18 = 2x^2 - 8x - 10$.

a) El vértice es el punto V(2, –18).

b) No, porque $f(3) = -16$.

c) La gráfica se muestra al margen.

42. Haz un estudio completo de la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

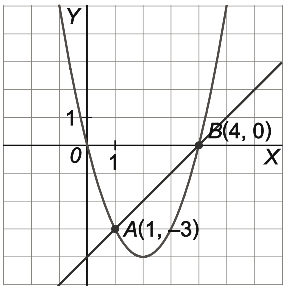


Es cóncava hacia abajo.
Corte con eje X: $A(-1, 0)$ y $B(3, 0)$
Corte con eje Y: $C(0, 3)$
Vértice: $V(1, 4)$

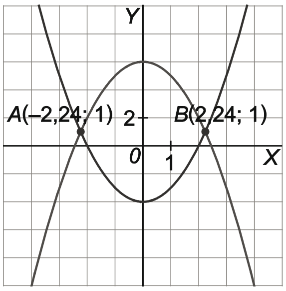
43. Halla gráficamente los puntos de corte de:

a) La recta $y = x - 4$ con la parábola $y = x^2 - 4x$.
b) Las parábolas $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 6$.

a)



b)

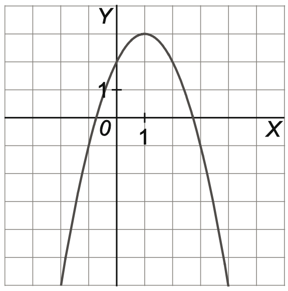


44. Halla la ecuación de la parábola que corta al eje vertical en y = 2 y cuyo vértice es el punto (1, 1).

Se calcula el valor de los coeficientes a, b, c en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Se sabe que $f(0) = 2 = c$; y que $f(1) = 1$, por lo que $a + b + 2 = 1$; y que $-\frac{b}{2a} = 1$.
Así pues, $a + b = -1$, $-b = 2a$. De esto se deduce que $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$.
La ecuación de la parábola es $y = x^2 - 2x + 2$.

45. La ecuación de una parábola es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + 2$. Se sabe que el punto (1, 3) es su vértice y que pasa por el punto (2, 2). Calcula los valores de *a* y *b* y representa su gráfica.

Se calcula el valor de los coeficientes a, b en $f(x) = ax^2 + bx + 2$.
Se sabe que $f(1) = 3$, es decir, que $a + b + 2 = 3 \Rightarrow a + b = 1$.
Como $f(2) = 2$, $4a + 2b + 2 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = 0$.
Con estas dos ecuaciones se calcula a y b: $a = -1$, $b = 2$.
La ecuación de la parábola es $y = -x^2 + 2x + 2$.
El dato que asegura que el punto (1, 3) es el vértice es innecesario. Basta con decir que la parábola pasa por dicho punto.
Se comprueba fácilmente que $V(1, 3)$ es el vértice de la parábola.



46. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y esboza sus gráficas.

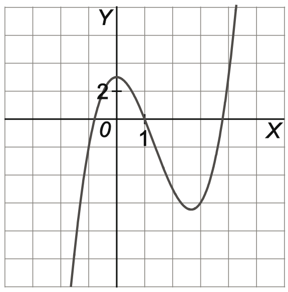
a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$
b) $f(x) = 4x^3 + 4x - 8$
c) $f(x) = x(x^2 + 2)(x^2 - 1)$
d) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$
e) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$
f) $f(x) = (x + 3)^2(x - 2)^2$

a) Corte con los ejes: $A(0, 3)$; $B(-0{,}79; 0)$; $C(1, 0)$; $D(3{,}79; 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 3x^2 - 8x$ se anula si $x = 0$ y si $x = 2{,}67$.

El punto $A(0,3)$ es un máximo relativo y el punto $E(2{,}67; -6{,}48)$ es un mínimo relativo.

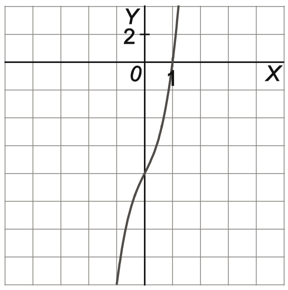


b) $f(x) = 4x^3 + 4x - 8 = 4(x - 1)(x^2 + x + 2)$

Corte con los ejes: $A(0, -8)$; $B(1, 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 12x^2 + 4$ no se anula nunca: es siempre positiva y, por tanto, la función es creciente.



c) $f(x) = x(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$ La función es impar, por tanto, simétrica respecto del origen.

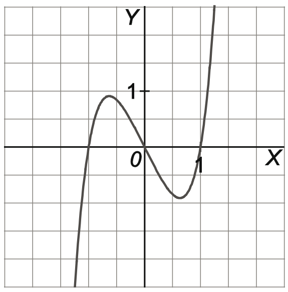
Corte con los ejes: $O(0, 0)$, $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

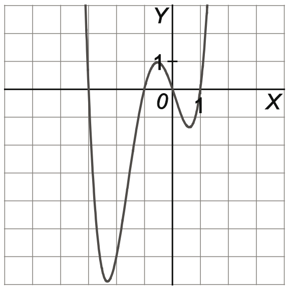
La derivada $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2$ se anula si $x = -0{,}63$ y si $x = 0{,}63$.

El punto $C(-0{,}63; 0{,}91)$ es un máximo relativo.

El punto $D(0{,}63; -0{,}91)$ es un mínimo relativo.



d) $f(x) = x(x+3)(x+1)(x-1)$

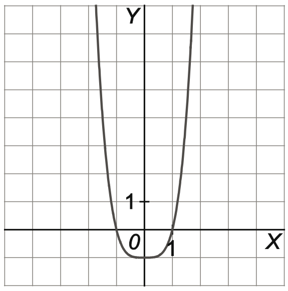


Corte con los ejes: $O(0,0)$, $A(-3, 0)$, $B(-1, 0)$ y $C(1, 0)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 2x - 3$ se anula en tres números, cuyos valores aproximados son $x_1 = -2{,}33$; $x_2 = -0{,}53$ y $x_3 = 0{,}61$.

e) $f(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$



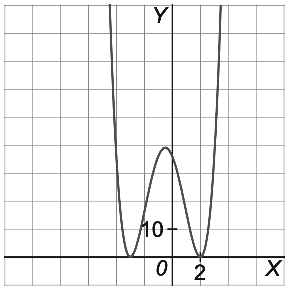
La función es par, por tanto, simétrica respecto del eje *X*.

Corte con los ejes: A(0, –1), *B*(–1, 0) y *C*(1, 0)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 4x^3$ solo se anula si $x = 0$. El punto $A(0,-1)$ es un mínimo absoluto.

f) $f(x) = (x+3)^2(x-2)^2$



Corte con los ejes: *A*(0, 36), *B*(–3, 0) y *C*(2, 0)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 22x - 12$ se anula para tres valores:

$x_1 = -3$; $x_2 = -0{,}5$ y $x_3 = 2$.

Los puntos *B*(–3, 0) y *C*(2, 0) son mínimos absolutos.

El punto *D*(–0,5; 39,6) es un máximo relativo.

47. Encuentra *a*, *b* y *c* para que la función polinómica $y = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ cumpla que tiene tangente horizontal en el punto *A*(1, 0) y su tangente en el punto de abscisa $x = 2$ es paralela a la recta de ecuación $12x - y + 7 = 0$.

La derivada de la función es $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$.

La ecuación explícita de la recta es $y = 12x + 7$, por lo que su pendiente es $m = 12$.

Como la función pasa por el punto *A*(1, 0), se sabe que $f(1) = 0 \Rightarrow 2 + a + b + c = 0$.

Como la función tiene tangente horizontal en el punto *A*(1, 0), entonces $f'(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a + b = 0$.

Como en $x = 2$ la recta tangente tiene pendiente $m = 12$, entonces $f'(2) = 12 \Rightarrow 24 + 4a + b = 12$.

Resolviendo el sistema obtenido, se tiene que $a = -3$, $b = 0$, $c = 1$.

Funciones racionales y radicales.

48. Determina el dominio, la continuidad, los puntos de corte con los ejes, el signo y las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{-6x^2}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^3+8}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^2+2x+5}$

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$ .Es continua. No tiene asíntotas verticales.

Es par, es decir, simétrica respeto del eje *Y*.

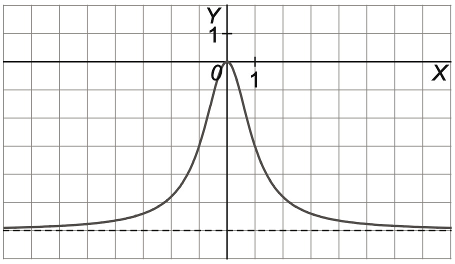
Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es siempre negativa salvo en el origen que vale cero.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -6$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -6$, la recta $y=-6$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

No tiene asíntotas oblicuas.

La derivada $f'(x) = \dfrac{-12x}{(x^2+1)^2}$ se anula en $x=0$ y es positiva (función creciente) en $(-\infty, 0)$ y negativa (función decreciente) en $(0, +\infty)$ Tiene un máximo relativo en el punto $O(0,0)$.



b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^4+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$. Es continua. No tiene asíntotas verticales.

Es impar, es decir, simétrica respeto del origen.

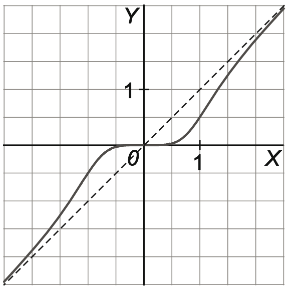
Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es negativa en $(-\infty,0)$ y positiva en $(0,+\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados. La recta $y = x$ es asíntota oblicua.

La derivada $f'(x) = \dfrac{x^4(x^4+5)}{(x^4+1)^2}$ se anula en $x=0$ y es positiva (función creciente) en los demás casos por tanto, el punto $O(0,0)$ no es un extremo a pesar de que tenga tangente horizontal. Es un punto de inflexión.



c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2-4x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, 4\}$

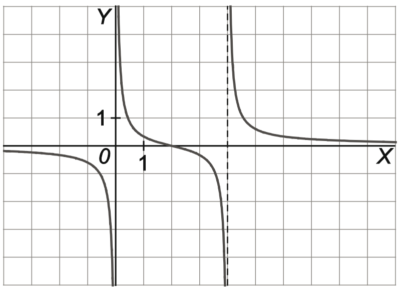
Corta a los ejes en el punto $A(2,0)$.

Es negativa en $(-\infty, 0) \cup (2, 4)$ y positiva en $(0, 2) \cup (4, +\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, la recta $x=0$ es una asíntota vertical y como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$, la recta $x=4$ también lo es.

Asíntotas horizontales: como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x) = \dfrac{-(x^2-4x+8)}{(x^2-4x)^2}$ no se anula nunca, (observa que $-\left(x^2-4x+8\right) = -[(x-2)^2+4]$) es negativa en todo el dominio), por tanto la función es siempre decreciente y carece de extremos relativos.



d) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^3+8\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\}$. Corta a los ejes en el origen $O(0,0)$.

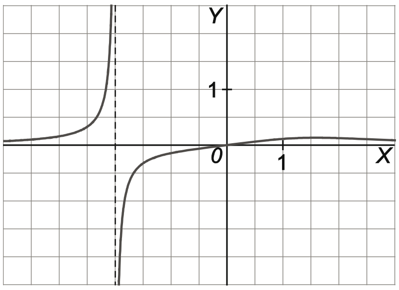
Es positiva en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y negativa en $(-2,0)$.

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{-2(x^3-4)}{(x^3+8)^2}$ se anula si $x=1{,}59$. Es positiva (función creciente) en $(-2;\ 1{,}59)$ y negativa (función decreciente) en $(1{,}59;+\infty)$.

El punto $A(1{,}59;\ 0{,}13)$, es un máximo relativo. La función también es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)$.



e) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^3-x^2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1,0\}$.No corta a los ejes. Es negativa en $(-\infty,-1)$ y positiva en $(-1,0)\cup(0,+\infty)$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

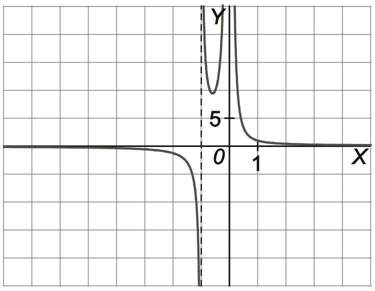
Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=0$ también lo es.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{-(x^3+3x+2)}{x^3(x+1)^2}$ se anula pero no se puede resolver fácilmente la ecuación $-(x^3+3x+2)=0$ porque no es posible hallar su raíz con Ruffini. Con ordenador se encuentra que la solución es $x=-0{,}60$. La derivada es negativa (función decreciente) en $(-1;\ -0{,}60)$ y positiva (función creciente) en $(-0{,}60;\ 0)$.

El punto $A(-0{,}60;\ 9{,}44)$, es un mínimo relativo.

La función es también decreciente en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.



f) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2+2x+5\neq 0\}=\mathbb{R}$. Es continua y no tiene asíntotas verticales.

Corta a los ejes en $A(3,0)$ y en $B(0;\ -1{,}2)$. Es negativa en $(-\infty,3)$ y positiva en $(3,+\infty)$.

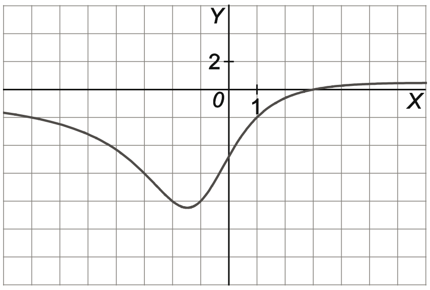
Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{-2(x^2-6x-11)}{(x^2+2x+5)^2}$ se anula en $x=-1{,}47$ y en $x=7{,}47$.

Es negativa (función decreciente) en $(-\infty;-1{,}47)$ y positiva (función creciente) en $(-1{,}47;\ 7{,}47)$

El punto $C(-1{,}47;\ -2{,}12)$ es un mínimo absoluto.

Por otra parte, la derivada es negativa (función decreciente) en $(7{,}47;+\infty)$, por lo que el punto $D(7{,}47;0{,}12)$ es un máximo, que también es absoluto.

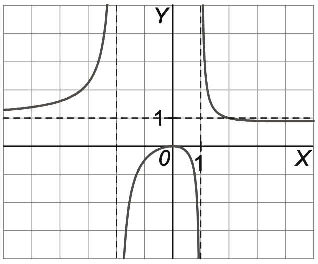


49. Haz un estudio completo de las siguientes funciones y esboza, en cada caso, su gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$ **e)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x+4}$ **g)** $f(x)=\dfrac{5}{x^4-x^2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}$ **h)** $f(x)=\dfrac{-2x^3}{x+2}$

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=\dfrac{x^2}{(x+2)(x-1)}$



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:(x+2)(x-1)\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2,1\}$

Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es positiva en $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(-2,0)\cup(0,1)$.

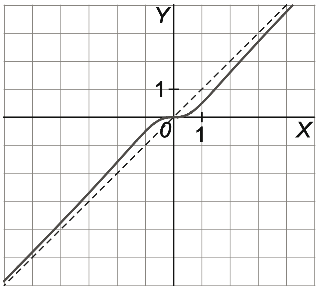
Como $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical y como $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ también lo es.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, la recta $y=1$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$ se anula en $x=0$ y en $x=4$. Es positiva (función creciente) en $(-2,0)$ y negativa (función decreciente) en $(0,1)$. El punto $O(0,0)$ es un máximo relativo.

Por otra parte, la derivada es negativa (función decreciente) en $(1,4)$ y positiva (función creciente) en $(4,+\infty)$ por lo que punto $A(4;0{,}89)$ es un mínimo relativo.

b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:x^2+1\neq 0\}=\mathbb{R}$. Es continua. No tiene asíntotas verticales.



Es impar, es decir, simétrica respeto del origen.

Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es negativa en $(-\infty,0)$ y positiva en $(0,+\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

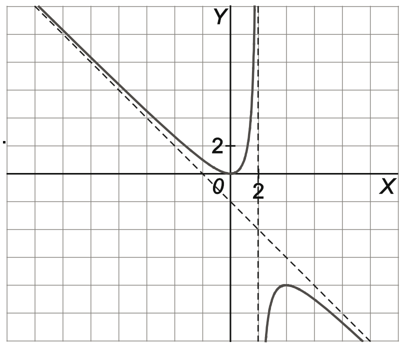
Tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados:

$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}=\dfrac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$. La recta $y=x$ es asíntota oblicua.

La derivada $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ se anula en $x=0$ y es positiva (función creciente) en los demás casos.

El punto $O(0,0)$ no es un extremo a pesar de que tenga tangente horizontal. Es un punto de inflexión.

c) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:2-x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{2\}$



Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es positiva en $(-\infty,0)\cup(0,2)$ y negativa en $(2,+\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$, la recta $x=2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados:

$f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}=-x-2+\dfrac{4}{2-x}$ La recta $y=-x-2$ es asíntota oblicua.

La derivada $f'(x)=\dfrac{-x(x-4)}{(2-x)^2}$ se anula en $x=0$ y en $x=4$.

Es negativa (función decreciente) en $(-\infty,0)$ y positiva (función creciente) en $(0,2)$.

El punto $O(0,0)$ es un mínimo relativo.

Por otra parte, la derivada es positiva (función creciente) en $(2,4)$ y negativa (función decreciente) en $(4,+\infty)$

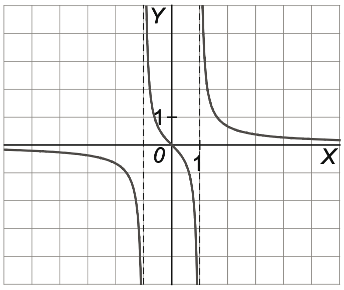
El punto $A(4,-8)$ es un máximo relativo.

d) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$. La función es impar, por tanto, simétrica respecto al origen.

Solo corta a los ejes en el $O(0,0)$.

Es negativa en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ y positiva en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical y como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ también lo es.



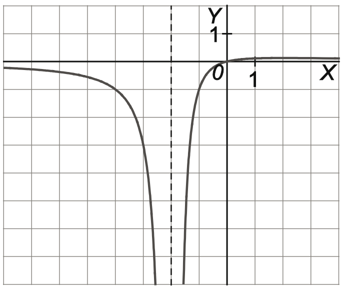
Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=-\dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ no se anula nunca, es negativa en todo el dominio. La función es siempre decreciente y carece de extremos relativos.

e) $f(x)=\dfrac{x}{(x+2)^2}$. $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:(x+2)^2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\}$. Solo corta a los ejes en el origen $O(0,0)$.

Es negativa en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y positiva en $(0,+\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.



Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{2-x}{(x+2)^3}$ se anula si $x=2$. Es positiva (función creciente) en $(-2,2)$ y negativa (función decreciente) en $(2,+\infty)$.

El punto $A(2;\ 0{,}125)$, es un máximo absoluto.

En el intervalo $(-\infty,-2)$ la función es decreciente.

f) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Solo corta a los ejes en los puntos $A(1,0)$ y $B(0;\ 0{,}25)$

Es negativa en $(-\infty,-2)\cup(0{,}25;\ 2)$ y positiva en $(-2;\ 0{,}25)\cup(2,+\infty)$.

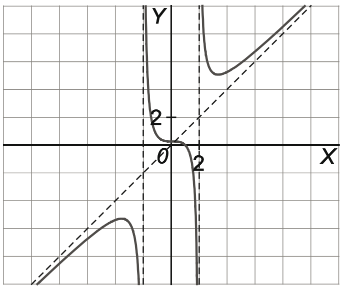
Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados:

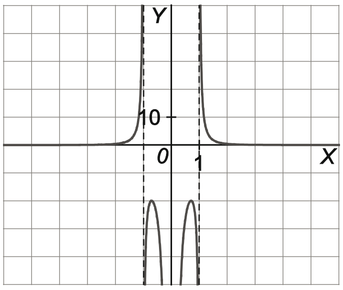
$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}=x+\dfrac{4x-1}{x^2-4}$ La recta $y=x$ es asíntota oblicua.



La derivada $f'(x)=\dfrac{x(x^3-12x+2)}{(x^2-4)^2}$ se anula en $x=0$ y en otros tres puntos que no se pueden calcular a través de Ruffini, pero sí con ayuda de algún programa informático.

Los puntos $C(-3{,}54;\ -5{,}32)$ y $D(0{,}17;\ 0{,}2505)$ son máximos relativos y los puntos $O(0;\ 0{,}25)$ y $E(3{,}38;\ 5{,}07)$ son mínimos relativos.

g) $f(x)=\dfrac{5}{x^2\left(x^2-1\right)}$



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x^4-x^2\neq 0\right\}=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

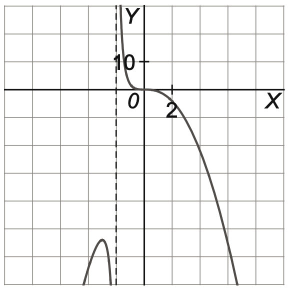
Es una función par y, por tanto, simétrica respecto del eje de ordenadas.
No corta a los ejes.
Es positiva en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(-1,0)\cup(0,1)$.

Como $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical. Por simetría, la recta $x=1$ también es asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto a la derecha como a la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{10-20x^2}{x^3(x^2-1)^2}$ se anula si $x=-0{,}71$ y si $x=0{,}71$. Es positiva (función creciente) en $(-1;-0{,}71)$ y negativa (función decreciente) en $(-0{,}71;0)$, por tanto, el punto $A(-0{,}71;-20)$, es un máximo relativo. Por simetría, el punto $B(0{,}71;-20)$ también es un máximo relativo.

h) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x+2\neq 0\right\}=\mathbb{R}-\{-2\}$



Solo corta a los ejes en el origen $O(0,0)$.
Es negativa en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y positiva en $(-2,0)$.

Como $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Tampoco tiene asíntotas oblicuas por no cumplir la condición de los grados.

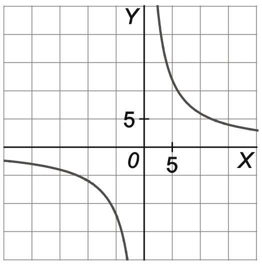
La derivada $f(x)=\dfrac{-4x^2(x+3)}{(x+2)^2}$, se anula en $x=-3$ y en $x=0$.

Es positiva (función creciente) en $(-\infty,-3)$ y negativa (función decreciente) en $(-3,-2)$, por lo que el punto $A(-3,-54)$ es un máximo relativo.

Por otra parte, la derivada es negativa (función decreciente) en $(-2,0)$ y sigue siendo negativa (función decreciente) en $(0,+\infty)$ por lo que el punto (0, 0) no es un extremo a pesar de que tenga tangente horizontal. Es un punto de inflexión.

50. Escribe varias parejas de números cuyo producto sea 60 y, posteriormente, escribe una función que los relacione. Dibuja su gráfica.

x	1	3	4	–1	–6
y	60	20	15	–60	–10



La función ha de cumplir $xy=60\Rightarrow y=\dfrac{60}{x}$. Es decir, $f(x)=\dfrac{60}{x}$.

51. Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x}}{x-2}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$

f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2+4\ge 0\}=\mathbb{R}$.

b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:[x+2\ge 0]-[x=0]\}=[-2,0)\cup(0,+\infty)$.

c) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:[x+6\ge 0]-[x=2]\}=[-6,2)\cup(2,+\infty)$.

d) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-9\ge 0\}=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

e) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:[x^2-1\ge 0]-[x=-3]\}=(-\infty,-3)\cup(-3,-1]\cup[1,+\infty)$.

f) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:[x^2+1\ge 0]-[x=\pm 1]\}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

52. Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x+1}{x}}$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^3}}$

a) $D(f)=\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right]\cup(0,+\infty)$

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Por tanto, la recta $x=0$ es una asíntota vertical de *f*(*x*).

Asíntotas horizontales: Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$, la recta $y=2$ es una asíntota horizontal de *f*(*x*), tanto por la derecha como por la izquierda.
No tiene asíntotas oblicuas.

b) $D(f)=(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$. Por tanto, la recta $x=0$ es una asíntota vertical de *f*(*x*).

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. Por tanto, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de *f*(*x*), tanto por la derecha como por la izquierda.
No tiene asíntotas oblicuas.

53. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^b}{x-b}$ siendo *b* un entero positivo.

a) Determina las asíntotas de la función *f*(*x*) para cualquier valor del parámetro *b*.

b) Halla el valor del parámetro *b* para que *f* tenga tangente horizontal en el punto de abscisa $x=4$.

a) Si $b=1$, entonces, $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$. La recta $x=1$ es una asíntota vertical y la recta $y=1$ es una asíntota horizontal de la función.

Si $b=2$, entonces, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$. La recta $x=2$ es una asíntota vertical y la recta $y=x+2$ es una asíntota oblicua de la función.

Si $b\ge 3$, entonces, $f(x)=\dfrac{x^b}{x-b}$. La recta $x=b$ es una asíntota vertical. No tiene más asíntotas.

b) La derivada de $f(x)=\dfrac{x^b}{x-b}$ es $f'(x)=\dfrac{bx^{b-1}(x-b)-x^b}{(x-b)^2}$.

Como $f'(4)=0\Rightarrow b4^{b-1}(4-b)-4^b=4^{b-1}\left[b(4-b)-4\right]=0\Rightarrow b(4-b)-4=0\Rightarrow (b-2)^2=0\Rightarrow b=2$

Funciones valor absoluto y parte entera

54. Expresa como funciones definidas a trozos y representa gráficamente, cada una de las siguientes funciones.

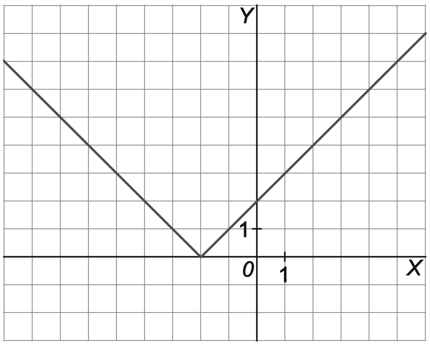
a) $f(x) = |x+2|$

b) $f(x) = |x-1| + 2$

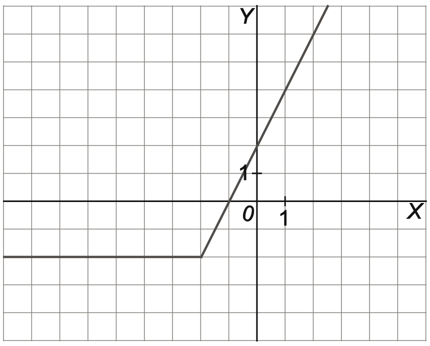
c) $f(x) = |x+2| + x$

d) $f(x) = 2|x-1|$

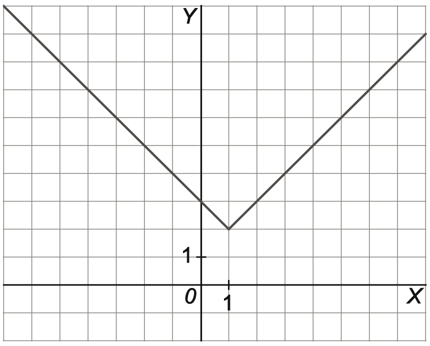
a) $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si} \quad x < -2 \\ x+2 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$



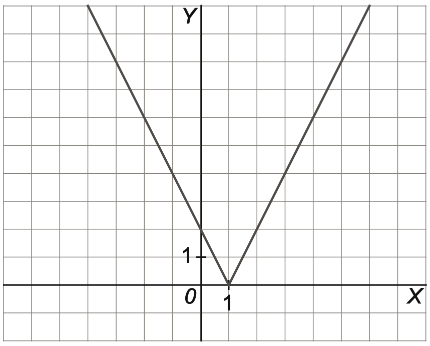
c) $f(x) = \begin{cases} -x-2+x = -2 & \text{si} \quad x < -2 \\ x+2+x = 2x+2 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} -x+1+2 = -x+3 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1+2 = x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

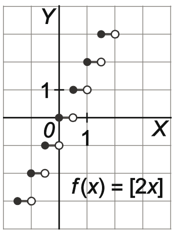


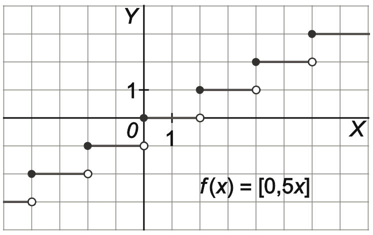
d) $f(x) = \begin{cases} 2(-x+1) = -2x+2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2(x-1) = 2x-2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$



55. Dada la función $f(x) = [ax]$, razona cuál será la representación de *f* en función del valor del parámetro *a* y dibuja la gráfica para los casos $a = 2$ y $a = 0{,}5$.

Suponemos que *a* es positivo.
Si $0 < a < 1$ la parte entera se "expande". Si $a > 1$, la parte entera se "contrae".





56. Realiza un estudio completo y esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$.

$D(f)=\mathbb{R}$ y es continua, por lo que no tiene asíntotas verticales. Además, no presenta simetrías.

La función nunca es negativa.

Corte con ejes: $f(x)=0$ si $x=-1$. Los puntos $A(-1, 0)$ y $B(0, 1)$ son los puntos de corte con los ejes.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Por tanto, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ por la derecha.

$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot 2(x+1)-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x^2}{e^x}$.

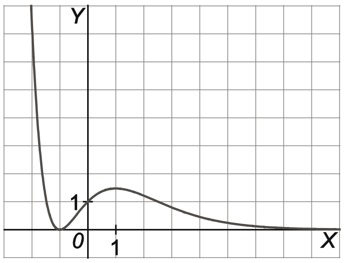
La derivada se anula sólo si $x=1$, $x=-1$.

si $x<-1$, $f'(x)<0$

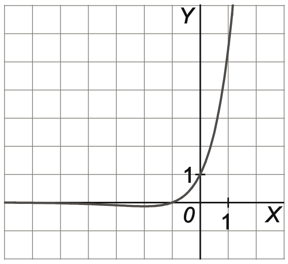
si $-1<x<1$, $f'(x)>0$

si $x>1$, $f'(x)<0$

Así pues $A(-1, 0)$ es un mínimo absoluto y $C\left(1,\dfrac{4}{e}\right)$ es un máximo relativo.



57. Estudia los puntos de corte con los ejes, el signo, los límites en el infinito de la función $f(x)=(1+x)e^x$ y, finalmente, esboza su gráfica.



$D(f)=\mathbb{R}$ y es continua, por lo que no tiene asíntotas verticales.

No presenta simetrías.

Corte con ejes: $f(x)=0$ si $x=-1$.

Los puntos $A(-1, 0)$ y B(0, 1) son los puntos de corte con los ejes.

La función es negativa si $x<-1$ y positiva si $x>-1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Por tanto, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ por la izquierda.

58. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

a) $D(f)=\mathbb{R}$ porque e^{5x} siempre es positivo.

b) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x^2-4}{x}>0\right\}$

$\dfrac{x^2-4}{x}>0\Rightarrow\dfrac{(x+2)(x-2)}{x}>0\Rightarrow x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$ y $D(f)=(-2,0)\cup(2,+\infty)$

59. Dadas las funciones $f(x)=\log_2(x^2-16)$ y $g(x)=\log_2(6x)$, estudia su dominio y encuentra las coordenadas del punto de corte entre ellas.

$f(x)=\log_2\left(x^2-16\right)$ está definida solo si $x^2-16=(x-4)(x+4)>0$ luego $D(f)=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

$g(x)=\log_2(6x)$ está definida para $6x>0$, luego $D(g)=(0,+\infty)$.

Las funciones se cortan si $\log_2\left(x^2-16\right)=\log_2(6x)$, es decir, si $x^2-6x-16=0$, cuyas soluciones son $x=8$ y $x=-2$. Como $x=-2\notin D(g)$, tenemos que las funciones se cortan en el punto $A\left(8,\log_2(48)\right)=A(8; 5{,}58)$.

60. Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\ln\frac{2x}{2-x}$ **b)** $f(x)=x^2e^x$

a) $D(f)=(0,2)$. Por tanto, no tiene asíntotas horizontales

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Por tanto, la recta $x=0$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$. Por tanto, la recta $x=2$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

b) $D(f)=\mathbb{R}$ y es continua, por lo que no tiene asíntotas verticales.

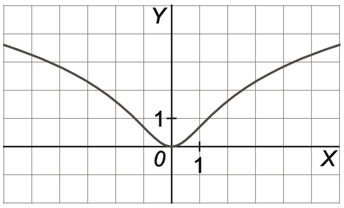
Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

Por tanto, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ por a la izquierda.

61. Haz un estudio completo y esboza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\ln(1+x^2)$ **b)** $f(x)=2x^2+4\ln x$

a) $D(f)=\mathbb{R}$



La función es par, por tanto es simétrica respecto del eje Y.

Puntos de corte con los ejes: $f(x)=0\Rightarrow 1+x^2=1\Rightarrow x=0$. $O(0,0)$

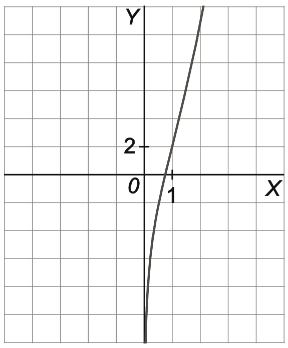
La función es siempre positiva.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

No tiene asíntotas.

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$. La derivada se anula si $\frac{2x}{1+x^2}=0\Rightarrow x=0$. La derivada es negativa a la izquierda de $x=0$ y positiva a su derecha, por lo que el punto $O(0,0)$ es un mínimo, además, es absoluto.

b) $D(f)=(0,+\infty)$



Puntos de corte con los ejes: $f(x)=0\Rightarrow 2x^2+4\ln x=0$,

ecuación que no se sabe resolver.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ y la función es continua;

cortará en algún punto al eje X (ya que pasa de negativa a positiva).

Además, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, indica que la recta $x=0$ es una asíntota vertical.

$f'(x)=4x+\frac{4}{x}$. La derivada es siempre positiva en $D(f)=(0,+\infty)$.

Por tanto, la función es siempre creciente. No tiene extremos.

62. Dada la función $f(x)=\log_2(8x-4)-\log_2(x+3)$, estudia su dominio y sus asíntotas verticales.

¿Se puede expresar $f(x)$ en función de un solo logaritmo?

Dominio: se debe cumplir que $8x-4>0$ y que $x+3>0$ por lo que $D(f)=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

$f(x)=\log_2(8x-4)-\log_2(x+3)=\log_2\left(\frac{8x-4}{x+3}\right)$ con $x>\frac{1}{2}$

Asíntotas verticales. Se estudia lo que ocurre a la derecha de $x=\frac{1}{2}$, como $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

Aunque no lo pide el enunciado, como $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\log_2\left(\frac{8x-4}{x+3}\right)\right]=\log_2 8=3$, se puede asegurar que la recta $y=3$ es una asíntota horizontal por la derecha.

63. Sea $f(x) = xe^{-ax}$, con a un parámetro real. Calcula los valores del parámetro a para que f tenga un extremo relativo en $x = 3$. Para estos valores del parámetro, indica si en $x = 3$ se alcanza un máximo o mínimo.

Como un extremo relativo anula la derivada: $f'(3) = 0$.

$f'(x) = e^{-ax} + x\left(e^{-ax}\cdot(-a)\right) = e^{-ax}(1-ax)$

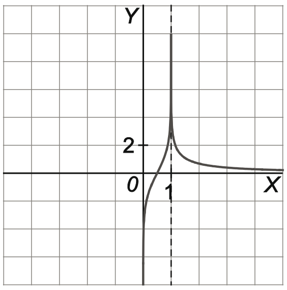
$f'(3) = 0 \Rightarrow e^{-3a}(1-3a) = 0 \Rightarrow 1-3a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$

La función es $f(x) = xe^{-\frac{x}{3}}$ y su derivada es $f'(x) = e^{-\frac{x}{3}}\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$.

La derivada es positiva a la izquierda de $x = 3$ y negativa a su derecha, por tanto, el punto $A(3, f(3))$ es un máximo. Además, es un máximo absoluto.

64. Dada la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{|x-1|}\right)$, estudia su dominio, sus puntos de corte con los ejes, su signo y sus asíntotas, y dibuja su gráfica.

Es una función logarítmica.



$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{|x-1|} > 0\right\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Se escribe como una función a trozos:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función no corta al eje Y.

Corte con eje X:

si 0< x <1, $\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} = 1 \Rightarrow x = 1-x \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$. La función corta al eje X en el punto $A\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

si x > 1, $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow x = x-1$ no tiene solución.

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. La recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Funciones trigonométricas y sus inversas

65. Si se sabe que sen x = 0,4 y que x está en el cuadrante I; calcula, utilizando las relaciones trigonométricas, cos x y tg x.

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, entonces, $0{,}4^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 0{,}84 \Rightarrow \cos x = \pm 0{,}92$.

Como el ángulo x pertenece al primer cuadrante, el coseno ha de ser positivo, es decir $\cos x = 0{,}92$.

Finalmente: $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{0{,}4}{0{,}92} = 0{,}43$

66. Halla sen x y tg x si se sabe que cos x = –0,4 y que x pertenece al cuadrante II.

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, entonces, $\text{sen}^2 x + (-0{,}4)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 0{,}84 \Rightarrow \text{sen}\, x = \pm 0{,}92$.

Como el ángulo x pertenece al segundo cuadrante, el seno ha de ser positivo: $\text{sen}\, x = 0{,}92$.

$\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{0{,}92}{-0{,}4} = -2{,}3$

67. Para un ángulo *x* del cuadrante III, la tangente toma el valor de 3. Calcula sen *x* y cos *x*.

$\cos x = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\, x}} = -\sqrt{\dfrac{1}{1+3^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ $\quad\quad$ $\mathrm{sen}\, x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

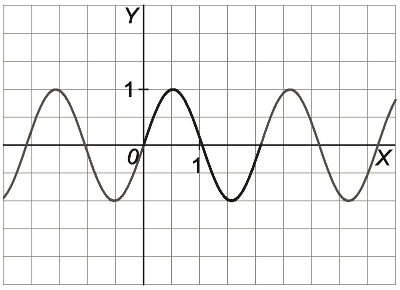
68. Con la ayuda de la calculadora o el ordenador, representa las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas e identifica su dominio, su recorrido, los puntos de corte con los ejes, su signo y su período.

a) $f(x) = \mathrm{sen} 3x$ $\quad$ **b)** $f(x) = 2+3\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$ $\quad$ **c)** $f(x) = 5\cos x$ $\quad$ **d)** $f(x) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

[Nota: recuerda que los valores de *x* han de estar en radianes.]

En cada caso se restringe el estudio de la función a su período correspondiente.

a) $f(x) = \mathrm{sen}(3x)$. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [-1{,}1]$.

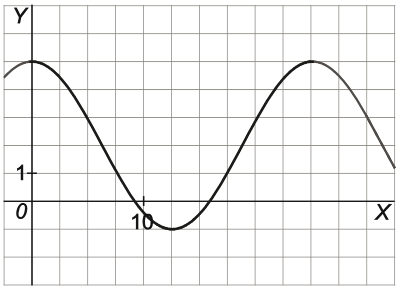


Periodo: Como la función seno es periódica de período 2π , la función $f(x) = \mathrm{sen}(3x)$ es periódica de período $\dfrac{2}{3}\pi$.

Puntos de corte con los ejes dentro del período: $sen(3x) = 0$ si $3x = 0$ o $3x = \pi$, luego los cortes con los ejes son $A(0, 0)$; $B\left(\dfrac{\pi}{3}, 0\right)$.

Aunque no lo pide, es conveniente saber los puntos máximos y mínimos (donde la función vale –1 y 1) que en este caso son $C\left(\dfrac{\pi}{6}, 1\right); D\left(\dfrac{\pi}{2}, -1\right)$.

b) $f(x) = 2+3\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$. $D(f) = \mathbb{R}$. $R(f) = [-1,\ 5]$.

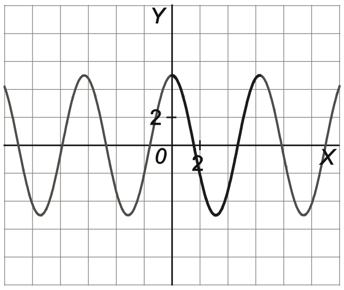


Período: La función coseno es periódica de periodo 2π luego esta función es periódica de periodo 8π .

Puntos de corte con los ejes dentro del período: $\cos\left(\dfrac{x}{4}\right) = -\dfrac{2}{3}$ si $x = 9{,}2$ o $x = 15{,}9$. Los puntos de corte son $A(0, 5)$; $B(9{,}2; 0)$; $C(15{,}9; 0)$.

Aunque no lo pide, es conveniente saber los puntos máximos y mínimos (dónde la función vale –1 y 5) que en este caso son $D(0, 5); E(4\pi, -1)$.

c) $f(x) = 5\cdot\cos x$ **.** $D(f) = \mathbb{R}$ **.** $R(f) = [-5{,}5]$

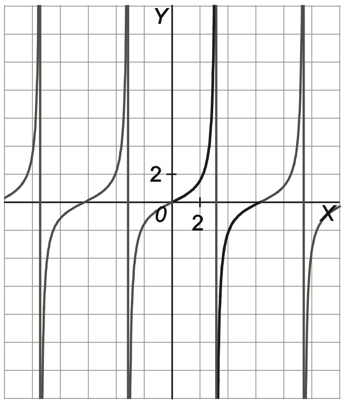


Período: La función coseno es periódica de periodo 2π .

Puntos de corte con los ejes dentro del período: $5\cdot\cos x = 0$ si $x = \dfrac{\pi}{2}$ o $x = \dfrac{3\pi}{2}$, luego los cortes con los ejes son $A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$; $B\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$.

Aunque no lo pide, es conveniente saber los puntos máximos y mínimos (donde la función vale –5 y 5) que en este caso son $C(0, 5); D(\pi, -5)$.

d) $f(x) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ **.** $D(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi \,/\, k \text{ entero}\}$ **.** $R(f) = \mathbb{R}$ **.**



Período: Como la función tangente es periódica de periodo π , la función $f(x) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ es periódica de periodo 2π .

Puntos de corte con los ejes dentro del período: $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = 0$ si $x = 0$ luego los cortes con los ejes son $A(0, 0)$.

69. **¿Tiene algún punto con tangente horizontal la función $f(x) = \text{arctg}\,(3x + 1)$?**

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{3}{1+(3x+1)^2}$, que no se anula para ningún valor de x, por tanto, no hay ningún punto con tangente horizontal.

70. **Calcula las derivadas de estas funciones.**

a) $f(x) = \text{arcsen}\left(x^3 - 3x\right)$

b) $f(x) = \arccos\left(x + e^x\right)$

c) $f(x) = \text{arctg}\left(\sqrt{x-1}\right)$

d) $f(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{\sqrt{1-\left(x^3 - 3x\right)^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-\left(1+e^x\right)}{\sqrt{1-\left(x+e^x\right)^2}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x-1} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2} \cdot \dfrac{x+1-x}{\left(x+1\right)^2} = \dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

Cuestiones

71. **¿Qué debe cumplir el número *b* para que la función $f(x) = x^4 + bx^2$ corte tres veces al eje *X*?**

$f(x) = x^4 + bx^2 = x^2(x^2 + b)$ **.** Un punto de corte es el $O(0, 0)$. Los otros dos salen de la relación $x^2 + b = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-b}$ para lo cual es necesario que $b < 0$.

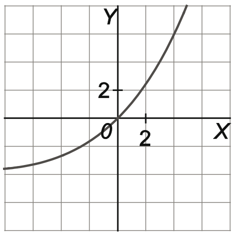
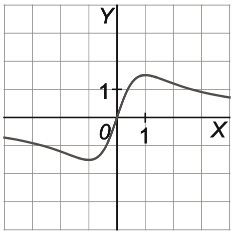
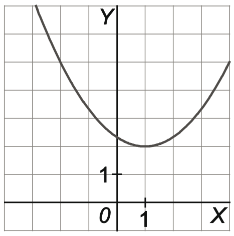
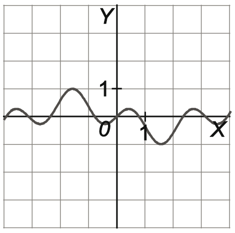
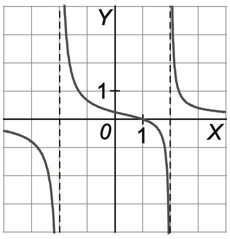
72. **Si $y = f(x)$ es una función simétrica respecto del eje de ordenadas y $f(x)$ nunca se anula, ¿puedes asegurar que $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ es también simétrica respecto de dicho eje?**

$g(a) = \dfrac{1}{f(a)}$; $g(-a) = \dfrac{1}{f(-a)}$. Como $f(a) = f(-a)$, entonces $g(a) = g(-a)$ y, efectivamente, g es también simétrica respecto del eje de ordenadas.

73. **¿Puedes asegurar que para cualquier función *f* definida en $\mathbb{R}$, la gráfica de $g(x) = f(x) - f(-x)$ sea simétrica respecto del origen?**

$g(a) = f(a) - f(-a)$; $g(-a) = f(-a) - f\left(-(-a)\right) = f(-a) - f(a) = -\left[f(a) - f(-a)\right] = = -g(a)$, así que la función $g(x)$ es simétrica respecto del origen.

74. En la siguiente tabla, asocia las funciones de la columna izquierda a las gráficas de la columna derecha y justifica tu elección:

$f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$	
$g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$	
$h(x) = \text{sen}\, x \cos(2x)$	
$j(x) = x e^{\frac{x}{10}}$	
$k(x) = \dfrac{(x-1)^2}{3} + 2$	

La segunda gráfica corresponde a la función f pues tiene la asíntota horizontal $y = 0$, $D(f) = \mathbb{R}$ y pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0)$.

La quinta gráfica corresponde a la función g pues tiene dos asíntotas verticales $x = 2$ y $x = -2$ y pasa por el punto $(1, 0)$.

La tercera gráfica corresponde a la función k pues es una parábola con el vértice en el punto $(1, 2)$.

La cuarta gráfica corresponde a la función h pues es una función periódica por estar formadas por trigonométricas.

Lógicamente, la gráfica que queda, la primera, debería corresponder a la función j, y así es, pues dicha función pasa por el punto $O(0, 0)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

75. ¿Puede ocurrir que la función $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x^2+1}$ tome algún valor positivo?

No puede ocurrir nunca pues $\dfrac{x^2}{x^2+1} < 1$ para cualquier valor de x y su logaritmo sería negativo.

76. Demuestra que la función $f(x) = x^5 + 6x^3 + \text{tg}\, x$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) = 5x^4 + 18x^2 + \dfrac{1}{\cos^2 x} \geq 0$ para todo x del dominio de f.

77. Si a es un número negativo y la tangente a la gráfica de $y = ae^x$ en el punto de abscisa 0 pasa por el punto $A(-a, 0)$, ¿cuál es el valor de a?

La pendiente de la tangente es $y'(0) = ae^0 = a$.

Por otra parte, dicha tangente pasa por (0, a) y ($-a$, 0), así que su pendiente debe ser $\frac{a-0}{0-(-a)} = 1$, con lo que

$1 = y'(0) = a$, así que a debería valer 1, pero eso no es posible pues a es negativo.

78. Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de segundo grado y el polinomio $q(x)$ tiene dos raíces reales, ¿puedes asegurar que la gráfica de f tiene dos asíntotas verticales?

No, pues puede ocurrir que alguna de las raíces del denominador lo sea también del numerador y, en ese caso, no tendría una asíntota vertical sino una discontinuidad evitable.

Por ejemplo, si $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$, su denominador tiene dos raíces: $x = 1$ y $x = 2$ y en cambio $f(x)$ tiene sólo una asíntota vertical pues $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ si $x \neq 1$, que sólo tiene como asíntota vertical la recta $x = 2$.

79. ¿Es posible que haya funciones polinómicas de tercer grado que tengan en común con el eje de abscisas solamente dos puntos?

Sí, si una de sus raíces es doble, por ejemplo $f(x) = x^2(x-1)$.

80. ¿Cortará la gráfica de $y = e^{\frac{x^2+1}{x^2}}$ a la recta $y = 2$?

No, pues para ello debería haber un número x tal que $e^{\frac{x^2+1}{x^2}} = 2$ y como $\frac{x^2+1}{x^2}$ siempre es mayor que 1,

$e^{\frac{x^2+1}{x^2}}$ siempre es mayor que $e = 2{,}718\ldots$, por lo que nunca podrá valer 2.

81. Si la gráfica de $y = f(x)$ admite como asíntota horizontal la recta $y = 3$, entonces ¿puedes asegurar que la gráfica de $y = \frac{2x \cdot f(x)}{x+1}$ admite como asíntota horizontal la recta $y = 6$?

Sí, ya que sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, así que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x\, f(x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \cdot 3 = 6$.

Por tanto la recta $y = 6$ es asíntota de dicha función.

PROBLEMAS

82. Cierto artículo se vende a un precio por kilogramo *x*, que depende de la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:

- **a 10 euros el kg si $0 \le x < 5$**
- **a 9 euros el kg si $5 \le x < 10$**
- **a 7 euros el kg si $10 \le x < 20$**
- **a 5 euros el kg si $20 \le x$**

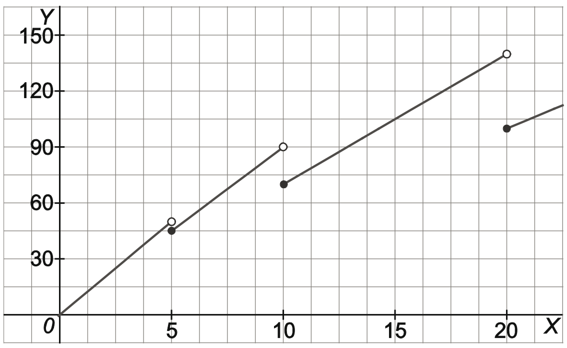
a) Escribe la función que representa el precio del artículo.

b) Haz su representación gráfica.

c) Estudia su continuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} 10x & \text{si} \quad 0 \le x < 5 \\ 9x & \text{si} \quad 5 \le x < 10 \\ 7x & \text{si} \quad 10 \le x < 20 \\ 5x & \text{si} \quad 20 \le x \end{cases}$

b)



c) Como se observa en la gráfica, *f* no es continua en $x = 5$, 10 y 20 y sí es continua en todos los demás valores de *x*.

83. En una empresa el número de montajes diarios hechos por un operario es función del número de días trabajados, *t*, a través de la expresión:

$$\mathbf{M}(t) = \frac{11t + 17}{2t + 12}, \; t \ge 1,$$

a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día?

b) ¿En cuántos días alcanzará cinco montajes diarios?

c) ¿Qué ocurrirá con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?

d) El dueño de la empresa cree que el número de montajes aumenta con los días de trabajo. ¿Piensas que está en lo cierto?

e) Dibuja la gráfica de la función.

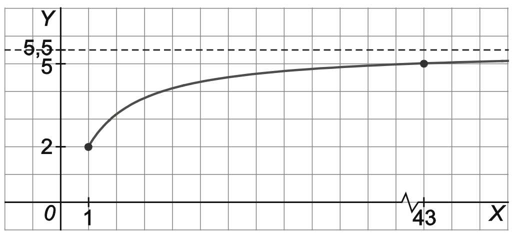
a) $M(1) = \dfrac{28}{14} = 2$ montajes.

b) $M(t) = \dfrac{11t + 17}{2t + 12} = 5$; $11t + 17 = 10t + 60$, $t = 43$ días.

c) Como $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{11t + 17}{2t + 12} = 5{,}5$, el número de montajes diarios se aproximaría a 5,5.

d) Como $M'(t) = \dfrac{(2t + 12)11 - (11t + 17)2}{(2t + 12)^2} = \dfrac{98}{(2t + 12)^2} > 0$ para cualquier valor de *t*, luego *M*(*t*) es creciente, así que el dueño de la empresa sí está en lo cierto.

e)



84. Las tarifas de estacionamiento en un aparcamiento se rigen según esta tabla:

Horas	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)
Precio (€)	5	7	9	11	13

Encuentra la función que relaciona las horas de estacionamiento con el coste del mismo.

$$f(x)=\begin{cases} 5 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 7 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 9 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 11 & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \\ 13 & \text{si} \quad 4 \le x < 5 \end{cases}$$

85. Una discoteca abre a las 10 de la noche sin ningún cliente y cierra cuando se han marchado todos. Se supone que la función que representa el número de clientes (*N*) en función del número de horas que lleva abierto, *t*, es: $N(t) = 80t - 10t^2$.

a) Determina cuál es el máximo número de clientes y a qué hora se alcanza.

b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

a) El máximo número de clientes se alcanza en el vértice de la parábola, es decir si $N'(t) = 80 - 20t = 0$, $t = 4$, es decir, a las cuatro horas de abrir (las 2 de la madrugada) y dicho número es $N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160$ clientes.

b) Cerrará cuando $N(t) = 0$, o sea, $80t - 10t^2 = 0$, $t = 0$, $t = 8$, así que la discoteca cierra a las seis de la mañana.

86. Una plaga de orugas está asolando una isla de alto valor ecológico. Un grupo de biólogos ha realizado estudios de campo y ha comprobado con preocupación que actualmente hay 136 000 ejemplares cuando hace tres años había 17 000.

a) Encuentra la ley exponencial de la forma $y = ae^{kt}$ que da el número de orugas en función del tiempo.

b) Los biólogos han estimado que cuando la población de orugas supere el medio millón de ejemplares, la vegetación de la isla será irrecuperable. ¿Cuándo llegará este momento si no se toman las medidas oportunas?

c) ¿Hace cuántos años había solo cien orugas?

a) $y = ae^{kt}$; $y(0) = a = 136\,000$.

$y(-3) = 17\,000 = 136\,000 \cdot e^{-3k}$, es decir $e^{-3k} = \frac{17}{136} = \frac{1}{8}$, así que $e^k = \sqrt[3]{8} = 2$, por lo que la exponencial buscada es $y = 136\,000 \cdot 2^t$.

b) $136\,000 \cdot 2^t > 500\,000$ si $2^t > 3{,}68$, $t \cdot \ln 2 > \ln 3{,}68$, $t > \frac{\ln 3{,}68}{\ln 2} = 1{,}88$; es decir que dentro de poco menos de 2 años la vegetación de la isla será irrecuperable si no se toman las medidas oportunas.

c) $136\,000 \cdot 2^t = 100$, $2^t = 0{,}000\,74$, $t \ln 2 = \ln 0{,}000\,74$; $t = \frac{\ln 0{,}000\,74}{\ln 2} = -10{,}4$.

Hace poco más de 10 años sólo había 100 orugas en la isla.

87. Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, en los próximos años, por la función $f(t) = 100 \log\left(\frac{1000t + 100}{t + 10}\right)$, donde t es el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es el tamaño actual de la población?
b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población?¿En qué valor?

a) $f(0) = 100 \log 10 = 100$.

b) Sí, pues $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} 100 \log \frac{1000t + 100}{t + 10} = 100 \log \lim_{t\to+\infty} \frac{1000t + 100}{t + 10} = 100 \log 1000 = 300$ con lo que el tamaño de la población se estabilizaría en torno a los 300 individuos.

88. En una fábrica, el coste de producción en euros, de un modelo de motocicleta viene dado por la función

$$C(x) = 10\,x^2 + 2000\,x + 250\,000$$

donde x es el número de motocicletas fabricadas.

El precio de venta de cada motocicleta es 8000 € y se venden todas las motocicletas fabricadas.

a) Define la función de ingresos que obtiene la fábrica en función de las unidades vendidas.

b) ¿Cuál es la función que expresa los beneficios de la cadena de montaje?

c) ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

a) $I(x) = 8000x$, donde $I(x)$ indica los ingresos obtenidos por la venta de x motocicletas.

b) $B(x) = I(x) - C(x) = -10x^2 + 6000x - 250000$, donde $B(x)$ expresa los beneficios obtenidos por x motocicletas vendidas.

c) Al ser $B(x)$ una parábola su máximo lo alcanza en $B'(x) = 0 \Rightarrow$, $x = 300$ siendo los beneficios obtenidos de:

$B(300) = -10 \cdot 300^2 + 6000 \cdot 300 - 250\,000 = 650\,000$ €.

89. La emisión de gases contaminantes, en toneladas, en una gran industria durante las 10 horas de actividad, viene dado por la expresión $n(t) = \frac{t}{8}(20 - 2t)$, $0 \le t \le 10$, siendo t el tiempo en horas.

a) ¿Cuál es el nivel máximo de las emisiones? ¿Cuándo se produce? ¿En qué intervalos aumenta o disminuye dicho nivel?
b) ¿En qué momentos el nivel es de cuatro toneladas?

a) Como la función $n(t)$ es una parábola, su máximo lo alcanzará en su vértice. Así pues $n'(t) = \frac{5}{2} - \frac{t}{2} = 0$ si

$t = 5$, es decir, a las 5 horas de actividad; y dicho nivel máximo valdrá $n(5) = \frac{25}{4} = 6{,}25$ toneladas.

Durante las 5 horas primeras aumenta el nivel, y en las restantes disminuye.

b) $n(t) = \frac{t}{8}(20 - 2t) = 4$; $\frac{5}{2}t - \frac{t^2}{4} - 4 = 0$; $t^2 - 10t + 16 = 0$; $t_1 = 2$ y $t_2 = 8$; por lo que a las dos horas y a las ocho horas de actividad, el nivel de emisión de gases es de 4 toneladas.

90. **Los beneficios de una empresa desde su fundación vienen dados, en millones de euros, por la función $B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$, $0 \le t \le 8$; donde t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.**

a) Estudia la monotonía y los extremos de $B(t)$.

b) Dibuja la gráfica de $B(t)$ en el intervalo [0,8] y explica, a partir de ella la evolución de los beneficios de esta empresa en los últimos 8 años.

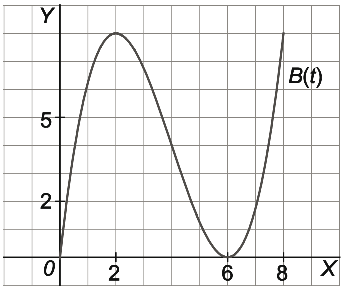
a) $B'(t) = \frac{3t^2}{4} - 6t + 9 = 0$ si $t^2 - 8t + 12 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

Así pues, si $0 \le t < 2$, $B'(t) > 0$ con lo que B es creciente.

Si $2 < t < 6$, $B'(t) < 0$, B es decreciente.

Si $t > 6$, $B'(t) > 0$, B es creciente.

Tenemos, entonces que en $(2, B(2))$ la función presenta un máximo relativo y en $(6, B(6))$ un mínimo relativo.



b) Los beneficios de la empresa crecieron durante los dos primeros años. Entre el segundo y el sexto año bajaron. Del sexto al octavo volvieron a crecer, alcanzando el valor máximo dichos beneficios cuando $t = 2$ o $t = 8$ pues $B(2) = 8$ millones de euros y $B(8) = 8$ millones de euros.

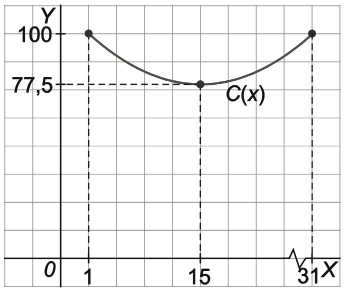
91. **Durante 31 días consecutivos, las acciones de una compañía han tenido una cotización dada por la función $C(x) = 0{,}1x^2 - 3x + 100$, donde x es el número de días transcurridos.**

a) Haz un estudio completo de dicha función y dibuja su gráfica.

b) ¿Cuáles has sido las cotizaciones máxima y mínima de la compañía?¿En qué días se consiguieron?

c) ¿Durante qué período de tiempo las acciones estuvieron al alza?¿Y a la baja?

a) $C(x) = 0{,}1x^2 - 3x + 100$ representa una parábola cuya abscisa x del vértice viene dada por la ecuación
$C'(x) = 0{,}2x - 3 = 0$; $x = 15$, es decir, $V(15; 77{,}5)$ y que por ejemplo corta al eje de ordenadas en (0, 100) siendo su gráfica la de la figura:



b) La mínima cotización se alcanzó en el vértice, es decir, el decimoquinto día y la máxima en el día 31 pues $C(31) > C(1) = 97{,}1$; siendo sus valores

$C(15) = 77{,}5$ y $C(31) = 103{,}1$.

c) Las acciones estuvieron al alza entre los días 15 y 31 y a la baja entre los días 1 y 15.

92. La ley de enfriamiento de Newton establece que un objeto se enfría de acuerdo a la ley:

$$T(t) = T_{amb} + (T_0 - T_{amb})e^{-kt}$$

donde $T(t)$ es la temperatura del objeto después de haber transcurrido t minutos; T_{amb} la temperatura ambiente; T_0 la temperatura inicial del cuerpo, y k una constante que depende del objeto.

Una taza de café en una habitación a 20ºC se enfría de 80ºC a 60ºC en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en enfriarse a 30ºC? ¿Y en alcanzar la temperatura ambiente?

$T_0 = 80$ºC; $T(3) = 60$ºC; $T_{\text{amb}} = 20$º C, así que $60 = 20 + (80 - 20)\, e^{-3k}$, de donde $e^{3k} = \dfrac{3}{2}$, $e^k = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$ por lo que:

$T(t) = 20º + 60\,(e^k)^{-3} = 20 + 60 \left(\dfrac{2}{3}\right)^t$.

Si $t = 30$, resulta que $30 = 20 + 60 \left(\dfrac{2}{3}\right)^t$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t = \dfrac{1}{6}$; $t \ln\dfrac{3}{2} = \ln 6$, $t = \dfrac{\ln 6}{\ln\frac{3}{2}} = 4{,}42$ minutos.

Por otra parte, la temperatura ambiente la alcanzaría en la solución de la ecuación $20 = 20 + 60 \left(\dfrac{2}{3}\right)^t$, por lo que se debe cumplir que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t = 0$, y eso es imposible. Como era de esperar, a largo plazo la temperatura de la taza se aproximará todo lo que queramos a la temperatura ambiente, pero sin llegar a alcanzarla, pues $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = 20$, lo que implica un comportamiento asintótico.

ENTORNO MATEMÁTICO

Un refresco no muy frío

Después de un intenso partido de fútbol, un grupo de amigos compran refrescos en la máquina que hay a la entrada del vestuario. Aunque sus colegas hacen bromas de ello, a Manuel le gusta tomar agua. Para su sorpresa cuando cae la botella está parcialmente congelada. Los demás se parten de risa y le dicen que pida un cuchillo y un tenedor para tomarla, pero él aguanta las bromas y decide dejarla en el banco del vestuario pensando: "seguro que mientras me ducho y me visto el hielo se habrá derretido del todo y el agua tendrá una temperatura adecuada para beberla". Entonces, Quique, el listillo de clase, le comenta: "hombre, como el termómetro del vestuario marca 30ºC, la ley de enfriamiento de los cuerpos de Newton dice que la temperatura del agua, en grados centígrados, después de *t* minutos viene dada por la función

$$f(t) = 30 - Ae^{-kt}$$

donde *A* y *k* son constantes a determinar".

a) Manuel entra a la ducha cuando el hielo ya se ha deshecho y el agua está a 0ºC. Si tarda 20 minutos en estar aseado y vestido y entonces el agua está a unos 5ºC, ¿podrá calcular con la ayuda de Quique los valores de *A* y *k* y saber, cuánto tiempo debe esperar para que el agua alcance los 10ºC y poder beberla?

b) Suponiendo que dejara en la botella una parte del agua a 10ºC, ¿qué habrá pasado con la temperatura si alguien la encuentra al cabo de 1000 años?

a) Inicialmente la temperatura es de 0ºC, por tanto $f(0) = 0 \Rightarrow 30 - Ae^{-k\cdot 0} = 0 \Rightarrow A = 30 \Rightarrow f(t) = 30 - 30e^{-kt}$.

Para calcular k: $f(20) = 30 - 30e^{-20k} = 5 \Rightarrow k = 0{,}01 \Rightarrow f(t) = 30 - 30e^{-0{,}01t}$.

Para que la temperatura alcance los 10ºC debe verificarse: $f(t) = 30 - 30e^{-0{,}01t} = 10 \Rightarrow t \simeq 40$ minutos y medio.

b) $f(1000) = 30 - 30e^{-0{,}01\cdot 1000} = 29{,}998\,638\ldots$, es decir se acercará mucho a la temperatura ambiente de 30ºC, pero no lo alcanzará, ni siquiera, en mil años pues su comportamiento es asintótico.

Intención de voto

Marina y Jorge han terminado hace unos meses sus estudios universitarios de periodismo y estadística, respectivamente, y están trabajando en prácticas en una empresa de comunicación.

A los dos meses de trabajar en la empresa, les encargan la realización de una encuesta de intención de voto en la ciudad de Nueva Mangancia. Allí, llevan varias semanas con noticias relacionadas con casos de corrupción en el Ayuntamiento. Marina le dice a Jorge "Ésta es nuestra ocasión para demostrar que somos unos buenos profesionales. Es un caso muy importante y el director confía en nosotros". Jorge está de acuerdo y contesta "Entre los dos elaboramos las preguntas, tú te ocupas de elegir la muestra y encuestar a las personas y yo de analizar los datos".

Una vez hecho el trabajo de campo, los dos becarios tienen la siguiente información:

En Mangancia hay 100 000 vecinos con derecho a voto.

El apoyo de los vecinos al partido gobernante está decreciendo de forma exponencial, de manera que en un mes ha descendido la intención de voto al mismo del 35 % al 10 %.

El principal partido de la oposición ha aumentado de forma lineal su intención de voto, que ha pasado, en los mismos 30 días, del 15 % al 20 %.

Un nuevo partido que era minoritario en la Corporación, ha aumentado de forma espectacular su apoyo pasando del 5 % al 25 % en el mismo período de tiempo. Ayuda a la pareja de amigos a analizar los datos y contesta:

Si la evolución de la intención de voto sigue igual, ¿cuáles serán los resultados que obtendrán los tres partidos en las elecciones anticipadas que se celebrarán dentro de dos meses?

Para el partido gobernante, elegimos una función exponencial del tipo $f(t) = Ae^{-Bt}$, donde t es el número de meses.

Como $f(0) = 35$, $f(0) = Ae^{-0\cdot t} = A = 35 \Rightarrow f(t) = 35e^{-Bt}$.

Como $f(1) = 10$, $f(1) = 35e^{-B\cdot 1} = 10 \Rightarrow B \simeq 1{,}25 \Rightarrow f(t) = 35e^{-1{,}25t}$.

Así pues, con esa tendencia, en dos meses la intención de voto al partido gobernante será del $f(2) = 35e^{-1{,}25\cdot 2} \simeq 2{,}87$ %.

Para el principal partido de la oposición asociamos una función lineal $g(t) = at + b$.

Como $f(0) = 15$ y $f(1) = 20$, obtenemos que $a = 5$ y $b = 15$ por lo que $g(t) = 5t + 15$.

Si se mantuviera esa tendencia lineal, al cabo de dos meses, la intención de voto sería del $g(2) = 5 \cdot 2 + 15 = 25$ %.

Respecto al nuevo partido, si su crecimiento fuera exponencial obtendríamos la función $f(t) = 5e^{1,6t}$, por lo que al cabo de dos meses, la intención de voto sería del $h(t) = 5e^{1,6\cdot 2} \simeq 123$ %, lo cual no tiene sentido.

Si, por el contrario, su crecimiento fuera lineal, sería $h(t) = 20t + 5$ y nos daría un valor, después de dos meses, del

$h(2) = 20 \cdot 2 + 5 = 45\%$, que es un resultado más realista.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Determina el signo y la simetría de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+4x}{x-1}$ **b)** $g(x)=x^2-4$

a) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+4x}{x-1}$; f no es par pues existe $f(-1)$ y no existe $f(1)$.

$f(x)$ no es impar pues, por ejemplo, $f(2)=24$ y $f(-2)=\dfrac{-8}{-3}=\dfrac{8}{3}$ así que no se verifica en general que $f(x)=-f(-x)$.

Para estudiar el signo se escribe $f(x)=\dfrac{x(x^2+2x+4)}{x-1}$ y como $x^2+2x+4>0$ para cualquier x basta estudiar el signo de $h(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Así pues, si $x<0$, $h(x)>0$, o sea, $f(x)>0$.

Si $0<x<1$, $h(x)<0$, es decir, $f(x)<0$. Finalmente si $x>1$, $h(x)>0$, $f(x)>0$.

Resumiendo: f es positiva en $(-\infty, 0)$, negativa en $(0, 1)$ positiva en $(1, +\infty)$ y $f(0)=0$.

b) g es par pues $g(x)=g(-x)$.

g es positiva en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$ y negativa en $(-2, 2)$ siendo $g(2)=g(-2)=0$.

2. Sean las funciones $f(x)=x^3-3x$ y $g(x)=x^5$.

a) Halla la simetría de las funciones f, g, $f+g$ y fg.

b) La suma de dos funciones impares, ¿será siempre impar?

c) El producto de dos funciones impares, ¿será siempre par?

a) $(f+g)(x)=x^5+x^3-3x$; $fg(x)=x^8-3x^6$

Así pues, f y g son impares (polinomios con sólo exponentes impares)

$f+g$ es impar (polinomios con sólo exponentes impares)

fg es par (polinomios con sólo exponentes pares)

b) Sí, pues si f y g verifican $f(x)=-f(-x)$ y $g(x)=-g(-x)$, entonces:

$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)$.

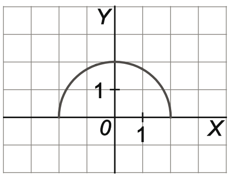
c) Sí, pues $fg(-x)=f(-x)\,g(-x)$ $=$ $fg(-x)=f(-x)g(-x)=\left[-f(x)\right]\left[-g(x)\right]=f(x)g(x)=fg(x)$

3. Calcula el valor de a para que el vértice de la parábola $y=ax^2+6x-a$, esté situado en el punto de abscisa $x=1$.

La abscisa del vértice viene dada por $2ax+6=0$, $x=-\dfrac{3}{a}$ que valdrá 1 si $a=-3$.

4. Determina la simetría, los puntos de corte con los ejes y el signo de la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$. Esboza su gráfica.

$f(-x)=\sqrt{4-(-x)^2}=\sqrt{4-x^2}=f(x)$ por lo que la función tiene simetría par.



Cortes con el eje Y: $x=0$, $y=2$ (sólo admitimos la raíz positiva Punto $A(0, 2)$

Cortes con el eje X: $y=0$, $x=\pm 2$. Puntos $B(-2, 0)$ y $C(2, 0)$.

La función siempre es positiva, por definición, en todo su dominio $D(f)=[-2, 2]$.

5. **Determina todas las asíntotas de la función racional: $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}$.**

$f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=\dfrac{x(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x(x-2)}{(x+3)}$ si $x\neq 3$.

Como $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-3$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Sí tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados:

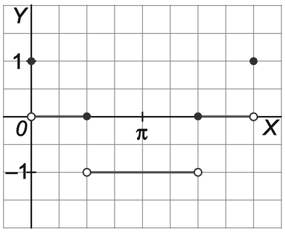
$f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=x-5+\dfrac{15x-45}{x^2-9}=x-5+\dfrac{15}{x+3}$. La recta $y=x-5$ es asíntota oblicua.

6. **Determina los valores de m y n para que la función trigonométrica $f(x)=m+\text{sen}(nx)$ tenga un máximo relativo en el punto $A(\pi, 3)$.**

$f'(x)=n\cos(nx)\Rightarrow f'(\pi)=n\cos(n\pi)=0$ de donde $n=\dfrac{1}{2}+k$ donde k es un numero entero.

Además k debe ser par, pues entonces la función $f(x)$ alcanza un máximo en $x=\pi$, $\text{sen}\left(\left(\dfrac{1}{2}+k\right)\pi\right)=1$ y $m=2$.

7. **Representa la función $f(x)=[\cos x]$ para valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$.**



8. **¿Tiene asíntotas verticales u horizontales la función $f(x)=\ln(e^x+1)$?**

Tiene la asíntota horizontal $y=0$, por la izquierda, pues $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$.

No tiene asíntotas verticales pues $D(f)=\mathbb{R}$.

9. **Halla la derivada de la función $f(x)=\text{arc tg}\left(e^{-x+1}\right)$.**

$f'(x)=-\dfrac{e^{-x+1}}{1+e^{-2x+2}}$

10. **Sea f la función definida en $(0, +\infty)$ por la fórmula $f(x)=2x+3-\ln x$. Señala las afirmaciones correctas:**

a) f es una función impar.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$

c) f tiene una asíntota vertical.

d) La gráfica de f es siempre creciente.

a) $f(-x)\neq -f(x)$ por lo que la afirmación a) es falsa.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+3-\ln x)=+\infty$.

c) Como se ve en el apartado anterior la función tiene la asíntota vertical $x=0$, por lo que la afirmación c) es cierta.

d) Como $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ y $f'(x)<0$ si $0\leq x\leq\dfrac{1}{2}$ y $f'(x)>0$ si $x>\dfrac{1}{2}$ la función no es siempre creciente por lo que la afirmación d) es falsa.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La recta tangente a la curva $f(x) = -0{,}5x + 2\cos x - 1$ en el punto de abscisa 0 es:

A. $x + 2y - 2 = 0$ **B.** $y = x + 2$ **C.** $x - y + 2 = 0$ **D.** $y = 2$

$f'(x) = -\frac{1}{2} - 2\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$ por lo que su recta tangente tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. La respuesta correcta es la A.

2. Si $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, entonces:

A. f es creciente en $\mathbb{R}$.

B. f no es siempre positiva.

C. f presenta un máximo relativo en el punto de abscisa $\frac{3}{2}$.

D. f no tiene ni máximo ni mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

$f(x) = |x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. En $1 \le x \le 2$, $f'(x) = -2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ y $f(x)$ pasa de creciente a decreciente, luego hay un máximo relativo. La respuesta correcta es la C.

3. Si $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{1 + x^4}$, entonces:

A. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de f.

B. La gráfica de f no tiene asíntotas.

C. La gráfica de f nunca corta sus asíntotas.

D. f tiene tangente horizontal en el punto de corte con el eje de ordenadas.

$f(x)$ no tiene asíntotas verticales porque nunca se anula el denominador por lo que la A es falsa.

Además $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ por lo que tiene la asíntota horizontal $y = 0$, con lo que la B es falsa.

La función pasa por el punto (–1, 0) que pertenece también a la asíntota $y = 0$, por lo que la C es falsa.

Finalmente la función corta al eje de ordenadas en el punto (0, 1) y como $f'(x) = \dfrac{-x^6 - 4x^3 + 3x^2}{(1 + x^4)^2} \Rightarrow f'(0) = 0$ la tangente en (0, 1) es horizontal. Por tanto D es cierta.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas.

4. Sea la función $f(x) = xe^{2x} - 1$. Entonces:

A. Para todo x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x + 1)e^{2x}$

B. f es creciente en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

D. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x + 1)e^{2x}$ con lo la A es falsa.

$f'(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{2}$. Si $x > -\frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$ y f es creciente, así que B es verdadera.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, por lo que la C es verdadera.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-xe^{-2x} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \left(-1 - \dfrac{x}{e^{2x}}\right) = -1$ pues $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} = 0$ ya que la curva $y = e^{2x}$ crece mucho más rápido que $y = x$. Así que la D es falsa.

5. Para todo *x* mayor que 3 consideramos la función $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$. Entonces:

A. $f'(x)=\frac{x-3}{x+1}$

B. Para todo x > 3, $f(x)\geq 0$.

C. *f* es decreciente en (3, $+\infty$).

D. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

A es falsa pues $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{-1}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)'=\left(\frac{x-3}{x+1}\right)\left(-\frac{4}{(x-3)^2}\right)=-\frac{4}{(x+1)(x-3)}$

Si $x>3$, $\frac{x+1}{x-3}>1$, con lo que $\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)>0$ y la B es verdadera.

Si $x>3$, $f'(x)<0$, con lo que *f* decreciente y la C es verdadera.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-3}\right)=\ln 1=0$ por lo que la D es falsa.

Elige la solución correcta entre las dos afirmaciones dadas.

6. Sea *f* una función con tangente en todos sus puntos. Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones siguientes:

1 La tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa 1 es horizontal.

2. La curva $y=f'(x)$ corta al eje de abscisas en el punto *A*(1, 0).

A. $1\Rightarrow 2$ pero $2\not\Rightarrow 1$

B. $2\Rightarrow 1$ pero $1\not\Rightarrow 2$

C. $1\Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

1 nos dice que $f'(1)=0$ y 2 nos dice que f' pasa por (1, 0), es decir, $f'(1)=0$. Así pues la respuesta es la C: $1\Leftrightarrow 2$.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Queremos saber si la tangente a la curva $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ en el punto de abscisa 1 forma triángulo con el eje de abscisas y la recta $y=3x-1$ y nos dan los siguientes datos:

1. El valor de *a*

2. El valor de *b*

3. El valor de *c*

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. No puede eliminarse ningún dato.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, $f'(1)=3a+2b+c$

Los datos *a*, *b* y *c* no pueden eliminarse pues influyen en la pendiente de la tangente en $(1, f(1))$, que podría, de eliminarse alguno, ser 0 o 3, y por tanto, ser dicha recta paralela a alguna de las dos anteriores. La respuesta correcta es, por tanto, la D.